دراسة الداليات المتكاملية في فضاء باناخ للدوال العقدية

INVESTIGATION OF INTEGRAL FUNCTIONAL IN BANACH SPACE OF COMPLEX FUNCTIONS

د. حسن بدور
استاذ مساعد في كلية العلوم
جامعة تشرين

يعالج هذا البحث مسألة القيم القصوى للداليات التكاملية غير الخطية ذات الشكل :

$$F(f)= re \quad W[f(z), f'(z),\dots , f^{(n)}(3) \quad] dz$$

في فضاء باناخ للدوال العقدية بعد اضافة بعض الشروط . باستخدام مبدأ القيمة القصوى لـ يوفى ـ تيخوميروف يبرهن في هذا البحث على ان الدالة ، التي يبلغ من اجلها الدالي F قيمة صغرى ، تحقق معادلة تفاضلية مشابهة لمعادلة اولر ـ بواسون المعروفة في حساب التحولات ونظرية القيم المثلى .

١ ـ طرح المسألة :

لنرمز بـ x لفضاء الدوال الهولومورفية في القرص الواحدي $K: 13 < 1$ وليكن x فضاء باناخ . سوف نعالج في هذا الفضاء المسألة الاتية :

مسألة ١. لتكن مجموعة الدوال :

$$(1) \quad W_j = W_j(f) = W_j(f(z), \ f'(z), \ \dots \ , f^{(n)}(z) \ ), 0 \leqslant j \leqslant m$$

ذات المشتقات الجزئية المستمرة بالنسبة للمتحولات $f^{(i)}$ حيث $0 < i < n$. ولنعرف مجموعة الداليات $F_o, F_1, \dots, F_m$ المرتبطة بهذه المجموعة ، كما يلي :

$$(2) \quad F_j = F_j(f) = re \int_C W_j \ (f(z)) \ dz \ ,$$

حيث C منحني نظامي في القرص الواحدي K . والمطلوب ايجاد القيمة النسبية الصغرى للدالي F_o في الفضاء X بشرط ان يكون :

$$F_j(f) \leqslant 0 \quad , j = 1,2, \ldots \quad , m .$$

هذه المسألة مرادفة للمسألة المطروحة في النشرة [7] حيث تمت هناك معالجة المسألة القصوى للداليات التكاملية الخطية في الفضاء H^P المعروف بفضاء هاردي .
نقول ان الدالة f^* هي حل للمسألة 1 اذا كان من اجل كل دالة f واقعة في جوار f^* :

$$F_o(f^*) \leqslant F_o(f) \quad ; \quad F_j.(f^*) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m .$$

يقال ايضا ، في هذه الحالة ، ان f^* هي دالة قصوى (EXTREMAL FUNCTION) للمسألة (1) .

٢- الشروط اللازم لوجود القيمة القصوى :

لنرمز بـ L للدالي التالي :

$$(3) \qquad L(f, \lambda) = \sum_{j=0}^{m} j\, F_j(f) = \sum_{j=0}^{m} {}_j\ re \int_C W_j(f(z))\, dz$$

حيث j أعداد حقيقية و $\lambda = (\lambda o, \lambda 1, \ldots, \lambda n)$. يعرف L بدالي لاغرانج من اجل المسألة 1 وتعرف الاعداد j بمضاريب لاغرانج .
نظرية 1 (مبدأ القيمة القصوى) . الشرط اللازم كي تكون f^* دالة قصوى للمسألة هو وجود اعداد $\lambda o, \lambda 1, \ldots, \lambda m$ غير سالبة ولا تساوي الصفر في آن واحد بحيث يكون :

$$(4) \qquad L'_f(f^*, \lambda).h = 0, \ hEX \ .$$

هذه النظرية هي نتيجة مباشرة لمبدأ القيمة القصوى لـ يوفي - تيخوميروف المبرهن عليه في [4] .
تجدر الاشارة الى مبدأ القيمة القصوى ، بشكله الاصلي ، يضم مجموعة واسعة من المسائل القصوى . وقد صيغت النظرية 1 - كحالة خاصة - لهذا الميدأ - بشكل يتناسب مع المسألة المطروحة . اما الشرط (4) الذي يعرف بشرط لاغرانج ، فهو يعني ان تفاضل فريشيه (FRICHÉ) للدالي L ينعدم في النقطة f^* . وهذا بدوره يعني ان :

$$(5) \qquad \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\ re \int_C \left[\frac{\partial W_j(f^*)}{\partial f} h + \frac{\partial W_j(f^*)}{\partial f'} h' + \ldots + \frac{\partial W_j(f^*)}{\partial f^{(n)}} h^{(n)} \right] dz = 0$$

حيث h عنصر كيفي من الفضاء X و W_j معطاة بالعلاقات (١) .

٣ ـ متعميم معادلة اولر ـ بواسون :

نعالج في هذا البند مسألة مشابهة للمسألة الاساسية في حساب التغيرات . وهي المسألة السابقة نفسها ولكن بعد اضافة شروط اخرى تعرف بالشروط الابتدائية . سوف نحتاج في سبيل ذلك الى التمهيدية الاتية :

تمهيدية ١ :

اذا كانت الدالة $\phi(z)$ مستمرة في القرص K وكان :

$$\int_0^1 \mathrm{re}[\ \phi(z_o t)\ h(z_o t)\ ]\ dz = 0$$

من اجل كل دالة h تحقق الشرط :

$$h(0) = h(z_o) = 0, \quad h \in X$$

فان $\phi(z) = 0$ من اجل كل z واقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين 0 و z_o حيث $z_o \in K$.

البرهان : نفرض ان $\phi(z)$ غير مطابقة للصفر على طول القطعة المستقيمة $[0, z_o]$. توجد اذن ، نقطة ما $z' = z_o t'$ بحيث يكون :

$$\mathrm{re}\ \phi(z_o t') \neq 0 \qquad \text{او} \qquad \mathrm{im}\ \phi(z_o t') \neq 0\ ,\ t' \in [0,1]$$

ليكن مثلا $\mathrm{re}\ \phi(z_o t') > 0$. من استمرار الدالة ϕ نستنتج وجود مجال جزئي $[t_1, T_2]$ ضمن $[0,1]$ يكون فيه $\mathrm{re}\ \phi(z_o t') > 0$

لنعرف الدالة الحقيقية g على المجال $[0,1]$ كما يلي :

$$g(t) = \begin{cases} (t - t_1)(t - t_2)\ t\ (1-t)\ ;\ t \in [t_1, t_2] \\ 0 \qquad t \quad [t_1, t_2] \end{cases}$$

من نظرية وايرشتراس (WEIERSTRASS) [7] نستنتج وجود متوالية من كثيرات الحدود $P_n^o(t)$، متقاربة بانتظام نحو الدالة

$$g_o(\gamma) = \begin{cases} (t - t_1)(t - t_2)\ ;\ t \quad [t_1, t_2] \\ 0 \qquad ;\ t \quad [t_1, t_2] \end{cases}$$

ومن ذلك نستنتج ان متوالية كثير الحدود

$$P_n(t) = P_n^o(t)\ t\ (1 - t)$$

متقاربة بانتظام نحو التابع $g(t)$.

لنأخذ الان متتالية كثيرات الحدود العقدية $Q_n(z) = P_n(z/z_o)$. نلاحظ ان كثيرات الحدود Q_n حقيقية على القطعة المستقيمة $[0, z_o]$.وإضافة الى ذلك:

$$Q_n(0) = Q_n(z_o) = 0 , \quad Q_n \quad X$$

عندئذ وبحسب الفرض يكون :

$$0 = \int_o^1 re [\emptyset (z_o t) Q_n(z_o t)] dt = \int_o^1 re [\emptyset (z_o t)] P_n(t) dt .$$

بتوزيع التكامل الاخير الى ثلاثة تكاملات على المجالات $0 < t_1 < t_2 < 1$ وجعل n تسعى نحو ∞ ، نحصل على :

$$\int_{t_1}^{t_2} [re \emptyset (z_o t)] (t - t_1) (t - t_2) t (1 - t) dt = 0$$

هذه المساواة غير صحيحة لان المقدار المكامل سالب دوما ضمن المجال $[t_1, t_2]$ ؛ الامر الذي يعني ان $re \emptyset (z_o t) = 0$.

اذا اخترنا ـ الان ـ كثيرات الحدود Q_n على الشكل $i Q_n$ حصلنا بمحاكمة مشابهة لما سبق ، على ان $im \emptyset (z_o t) = 0$. وفي النتيجة يكون $\emptyset(z) = 0$ من اجل كل z واقعة على القطعة المستقيمة $[0,30]$ وهو المطلوب .

لنعد الان الى الداليات F_j المعطاة بالعلاقات (2) وليكن C منحنيا نظاميا في القرص K معادلته :

$$C : z = z (t) , \quad a < t < b$$

ولنفرض ان A_K و B_K اعداد معطاة من اجل $0 < K < n-1$

مسألة ٢ـ اوجد القيمة الصغرى للدالي :

$$F_o(f) = re \int_C W_o [f (z)] dz , \quad f \quad X$$

اذا كان :

$$F_j(f) = re \int_C W_j [f (z)] dz < 0 , \; j = 1 , 2, \ldots, m \tag{6}$$

$$f^{(k)} [z (Q)] = A_K, \; f^{(k)} [z (6)] = B_K, \; K = 0,1 , \ldots, n-1 . \tag{7}$$

حتى نستطيع استخدام مبدأ القيمة القصوى سوف نعود بهذه المسألة الى شكل مشابه للمسألة 1 عن طريق تبديل كل من الشرطين (7) بأربع متراجحات مكافئة لهما. فمن اجل الشرط الاول $f^{(u)}[z(Q)] - A_K = 0$ يكون :

$$M_K(a) = re\ [\ f^{(u)}\ (\ z(Q)\ ) - A_K] \leqslant 0$$

$$- M_K(a) = re\ [\ f^{(u)}(\ z(Q)\ ) - A_K] \leqslant 0$$

$$N_K(a) = im\ [\ f^{(u)}(\ z\ (Q)\ ) - A_K] \leqslant 0$$

$$- N_K(a) = im\ [\ f^{(4)}\ (\ z(Q)\ ) - A_K\ ] \leqslant 0$$

ومن اجل الشرط الثاني نحصل على متراجحات مشابهة :

$$M_K(6) \leqslant 0\ ,\ - M_K\ (6) \leqslant 0\ ,\ N_K(b) \leqslant 0\ ,\ - N_K(6) \leqslant 0\ ,$$

حيث K تتحول من 0 الى $n - 1$. في الحالة هذه يكون لدالي لاغرانج الشكل :

$$L = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j F_j + \sum_{K=0}^{n-1} [\ \alpha_K\ M_K(Q) - \sigma_K M_K\ (Q)$$

$$+ B'_K N_K(Q) - B''_K N_K\ (Q) + \ _K M_K(6) - \gamma_K\ M_K(6) + \ _K(6) - \ _K N_K\ (6)]$$

فاذا وضعنا

$$K = K - K\ ,\quad K = K - K\ ,\quad K = K - K\ ,\quad K = K - K$$

حصلنا ، بعد التعويض في (6) و (7) على :

$$(8)\quad L = L(f,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ) = \sum_{j=0}^{m} \ _j\ re \int_C W_j[\ f(z)\ ]\ dz$$

$$+ re \sum_{K=0}^{n-1} \ _K[\ f^{(k)}(z(Q)) - A_K] + \ _K[\ f^{(k)}(z(6)\ ) - B_K]$$

$$+ im \sum_{K=0}^{n-1} \ _K[f^{(k)}(z(Q) - A_K] + \ _K[f^{(k)}(z\ (6)\ ) - B_K]$$

مع العلم ان j ، k ، k ، k ، k هي مضاريب لاغرانج و R^{m+1} ، ER^n ، ، ، ، $= (_0, _1, \ldots, _m)$;

نظرية 2 ـ الشرط اللازم كي تكون الدالة $f+$ حلا للمسألة 2 هو ان تحقق الدالة هذه المعادلة التفاضلية الاتية :

$$(9) \qquad \sum_{K=0}^{n} (-1)^K \frac{d^K}{dz^k} G_{f(k)}$$

مع العلم بأن

$$(10) \qquad G_{f^{(k)}} = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \frac{\partial W_j (f)}{\partial f^{(k)}} , K = 0, 1, \ldots\ldots, n$$

البرهان : من النظرية 1 نستنتج ان تفاضل دالي لاغرانج (8) يساوي الى الصفر في النقطة f^* . وهذا يعني ان

$$L'_f = L_f(f^*, \; , \; , \; , \; , \;) . h = 0$$

من اجل كل عنصر h في الفضاء X . ومنه :

$$L'_f = \sum_{j=0}^{m} {}_j re \int_C \left[\frac{\partial W_j}{\partial f} h + \frac{\partial W_j}{\partial f'} h' + \ldots + \frac{\partial W_j}{\partial f^{(n)}} h^{(n)} \right] dz$$

$$+ re \sum_{k=0}^{n-1} \left[{}_K h^{(k)}(z(Q)) + {}_K h^{(k)}(z(\sigma)) \right]$$

$$+ im \sum_{K=0}^{n-1} \left[{}_K h^{(k)}(z(Q) + {}_K h^{(k)}(z(\;))) \right] = 0$$

ولكي تكون الدالة $f + h$ محققة للشروط الابتدائية يجب ان نفرض ان :

$$h(z(Q)) = h' (z(Q)) = \ldots\ldots = h^{(n-1)} (z) (Q) = 0$$

$$h (z(\sigma)) = h' (z(\sigma)) = \ldots = h^{(n-1)} (z(\sigma)) = 0$$

عندئذ وبعد ان نرمز بـ $G_{f^{(k)}}$ كما في (10) نجد ان :

$$L'_f = L'_f (f^*, \lambda) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j re \int_C \sum_{K=0}^{n} \frac{\partial W_j}{\partial f^{(k)}} h^{(k)} dz$$

$$= re \int_C \left[\sum_{K=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \frac{\partial W_j}{\partial f^{(k)}} h^{(k)} \right] dz$$

$$= re \int_C \left[\sum_{K=0}^{n} G_{f^{(k)}}(f(z)) h^{(k)}(z) \right] dz = 0 .$$

ان الدوال $G_{f^{(k)}}$ تحليلية ، بحسب الفرض ، ولذلك نستطيع استبدال المنحني C باي منحن آخر واقع في القرص الواحدي K ويصل بين $z(a)$ و $z(\ )$ كالقطعة المستقيمة الواصلة بينهما مثلا . كذلك يمكن الفرض ـ دون الاقلال من عمومية النظرية ـ أن C هي القطعة المستقيمة الواصلة بين 0 و z_o .عندئذ ، بتكامل المجموع الاخير بالتجزئة ثم الاستفادة من الشروط (11) نجد ان :

$$re \int_0^1 \left[\sum_{K=0}^{n} G_{f^{(k)}}(f^*(z_o t) h^{(k)} (z_o t) z_o \right] dt =$$

$$\int_0^1 re \left[\left(G_f - \frac{d}{dz} G_{f'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} G_{f^{(n)}} \right) z_o h(z_o t) \right] dt = 0$$

من اجل كل دالة h . بالرجوع الى التمهيدية 1 نجد ، في النهاية ، ان :

$$(12) \quad G_f - \frac{d}{dz} G_g + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} G_{f^{(n)}} = 0$$

وذلك من اجل كل النقاط الواقعة على القطعة المستقيمة $[\ 0\ ,\ z_o\ ]$. ومن تحليلية الدالة $G_{f^{(k)}}$ نستنتج ان الصيغة (12)- . وبالتالي الصيغة (0) صحيحة في كل القرص الواحدي K وهو المطلوب .

يبقى ، في النهاية ، ان نلاحظ ان الصيغة (12) مشابهة لمعادلة اولر ـ بواسون المعروفة في حساب التغيرات وهي تعميم لها الى الساحة العقدية (قارن [2]) .

ملاحظة :

كمثال للفضاء X يمكن ان نأخذ الفضاء H^P المعروف بفضاء هاردي . وهو فضاء الدوال f الهولومورفية في القرص الواحدي ، التي تحقق الشرط :

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{-\pi}^{+\pi} | f (re^{it}) |^P dt < \infty, \quad 1 \leqslant P < \infty .$$

هذا الفضاء ـ كما هو معروف ـ هو فضاء باناخ ولذلك تبقى النتائج السابقة صحيحة في هذا الفضاء .

ABSTRACT

This paper deals with extremal problems of non linear integral functionals of the form .

$$F(f) = \mathrm{re} \int_{C} W\, [\, f(z)\, ,\, f'(z)\, ,\, \ldots\, , f^{(n)}(z)\,]\, dz$$

in Banach space of eomplex junctions .

By making use of the Extnemum principle, of IOffe - Tichomirov, it has been proved that the solution of the extremal problem, under some additional eonditions , satisfies a differentiel equation, which is analogous to the Euler - Poisson equation in the calculus of variations and the theary of optimization .

1 - P,L. DUREN ; The theory of H^{P} spaces , AcaD, Press . New YOrk 1970 .

2- I. M. GELFAND ; S.V.FOMIN ,Calculus of variations (Russian).Moscow 1979 .

3- G.S. GOODMAN , Univalent functions and optimal control. PH.D. Thesis, stanford. University, 1968 .

4- A.D. IOFFE ; W.I. TICHOMIROV, the theory of extremal problems(Russian) . Moscow 1974 .

5- A. RALSTON , Introduction to numerical analysis , (Polish).Warsaw 1961 .

6- S. WALCZAK , method of Examininig conditional extremum in some families . of complex functions, Bull.ACAP.Polon. Math. Astr . Phys. XXIV , 11,1976 .