مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية ـ المجلد ١١ (العدد ٤) ١٤١٠ هـ ـ ١٩٨٩ م

فضاءات جزئية فوق لامتغيرة من أجل مؤثر خطي معدوم القوة على فضاء باناخ

الدكتور عهد كفى
أستاذ مساعد في كلية العلوم
جامعة تشرين

ليكن E فضاء باناخ ،عقديا ولا متناهي الأبعاد ،وليكن B (E) جبر المؤثرات الخطية المستمرة على E ،و NF(E) مجموعة المؤثرات الخطية المستمرة معدومة القوة A والتي تكون من أجلها الفضاءات الجزئية $A(E), A^2(E) \ldots\ldots$ مغلقة .

نهتم في هذا البحث بدراسة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة ،من أجل مؤثر خطي $A \in NF(E)$ ،فنعين الفضاء الجزئي فوق اللامتغير الذي يولده متجه مفروض من الفضاء E ونعرض أشكالا مختلفة له .

مقدمة :

ليكن E فضاء لباناخ عقديا ،ولا متناهي الأبعاد ،ولنرمز بـ B (E) لجبر المؤثرات الخطية المستمرة على E ،وبـ NF (E) لمجموعة المؤثرات معدومة القوة $A (\in B(E))$ والتي تكون من أجلها الفضاءات الجزئية $A(E), A^2(E) \ldots$ مغلقة .

نهتم في هذا المقال بدراسة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة (Hyperinvariants) من أجل مؤثر خطي $A \in NF(E)$ ،فنعين الفضاء الجزئي فوق اللامتغير من أجل المؤثر A الذي يولده متجه مفروض $x \in E$ ،ونعرض أشكالا مختلفة لهذا الفضاء الجزئي .

يشكل بحثنا الحالي جزءا من دراسة متكاملة نهدف من خلالها الى اعطاء وصف كامل لشبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة من أجل مؤثر خطي $A \in NF(E)$.

تجدر الاشارة الى اننا سنستخدم بوجه عام الرموز والمصطلحات الواردة في (كفى١٩٨٩)

I ـ تعاريف ومصطلحات :

ليكن F فضاء جزئيا(*) من الفضاء E نقول عن F انه لامتغير (Invariant) من أجل المؤثر A , اذا كان $Ax \in F$ من أجل أي متجه $x \in F$ ونقول عن F انه فضاء جزئي فوق لامتغير (hyperinvariant) من أجل A ، اذا كان لامتغيرا من أجل أي مؤثر $B (\in B(E))$ يتبادل مع المؤثر A . نرمز بـ lat (A) (lat_o (A)) لشبكة الفضاءات

(*) يدل المصطلح " فضاء جزئي " حيثما يرد في النص ،على فضاء جزئي مغلق بالنسبة للتوبولوجيا المشتقة من النظيم المعرف على الفضاء E .

الجزئية اللامتغيرة (فوق اللامتغيرة) من أجل المؤثر A ،وبـ $C(A)$ لجبر المؤثرات الخطية المستمرة على الفضاء E والتي تتبادل مع المؤثر A ،كما سنرمز بـ $[x]$ $([x]_A)$ للفضاء الجزئي اللامتغير (فوق اللامتغير) من أجل المؤثر A ،الذي يولده المتجه x ،وبـ $\oplus$ $C(A)$ للمجموع المباشر (Somme directe) لفضاءات جزئية لامتغيرة من أجل المؤثر A .

نقول عن فضاء جزئي F لامتغير من أجل المؤثر A انه مخفض (réduisant) من أجل A اذا وجد فضاء جزئي لامتغير G من أجل المؤثر A ،بحيث يكون $E=F \oplus G$

ليكن $x \in E$ نسمي أكبر عدد طبيعي s تتحقق من أجله العلاقة $x \in A^s(E)$ ارتفاع (hauteur) المتجه x في الفضاء E بالنسبة للمؤثر A ،ونرمز له بـ $h_E(x)$ أو بـ $h(x)$ اذا لم ينجم عن ذلك أي التباس . نصطلح بهذا الصدد على أن $h(0) = \infty$.

نسمي المتتالية (δ_j) المعرفة بحدها العام $\delta_j = h(A^j x)$ ،من أجل $j=0,1,2,...$ متتالية (أولم) (Ulm) المتعلقة بالمتجه x بالنسبة للمؤثر A ،وندل عليها بالرمز $U(x)$.

نعرّف على مجموعة متتاليات (أولم) بالنسبة للمؤثر A علاقة ترتيب جزئي $\geqslant$ كما يلي :

$$U(y) \geqslant U(x) \longleftrightarrow h(A^j y) \geqslant h(A^j x) \text{ .من أجل } j = 0,1,2,...$$

نسمي، أخيرا، أصغر عدد طبيعي m تتحقق من أجله العلاقة $A^m x = 0$ مرتبة (Ordre) المتجه x بالنسبة للمؤثر A ونرمز لها بـ $O(x)$ كما نرمز بـ $\operatorname{Ker} A$ لمجموعة المتجهات التي مرتبة كل منها أصغر أو تساوي الواحد .

II ـ سنحتاج فيما سيلي من هذا البحث الى النتيجة التالية التي حصلنا عليها في (كفى ١٩٨٩) المبرهنة (5) والنتيجة (6) .

مبرهنة (1) :

ليكن $A \in NF(E)$ و x متجها مفروضا من الفضاء E ،يوجد فضاء جزئي M لامتغير من أجل المؤثر A من الشكل $M = \bigoplus_{i=1}^{k} [x_i]_A$ منتهي الابعاد ،مخفض من أجل المؤثر A . ويحوي المتجه x ،الذي يكتب عندئذ على الشكل :

$$x = A^{n'_1} x'_1 + A^{n'_2} x'_2 + ... + A^{n'_k} x'_k$$

حيث $n'_1 > n'_2 > .... > n'_k$, $O(x'_1) > O(x'_2) > .... > O(x'_k)$

ملاحظة : اذا وضعنا $x'_i = x_{k-(i-1)}$ و $n'_i = n_{k-(i-1)}$ من أجل $i=1,2,...k$ في المبرهنة السابقة ،عندئذ يمكن التعبير عن المتجه x الوارد في المبرهنة المذكورة ،على الشكل :

$$x = A^{n_1} x_1 + A^{n_2} x_2 + ... + A^{n_k} x_k$$

حيث $n_k > \ldots\ldots > n_2 > n_1$ و , $m_k = 0(x_k) > \ldots\ldots > m_2 = 0(x_2) > m_1 = 0(x_1)$

ويمكننا بالاضافة الى ذلك ،بالرجوع الى معطيات المبرهنة (5) كما وردت في (كفى ١٩٨٩) التحقق بسهولة من أن $m_{i+1} - n_{i+1} > m_i - n_i > 0$ وذلك من أجل $i = 1,2,\ldots,k$

سنبدأ فيما يلي مستخدمين نفس رموز ومصطلحات المبرهنة (1) ،بتعيين الفضاء الجزئي فوق اللامتغير من أجل مؤثر $A \ni NF(E)$ الذي يولده المتجه $A^{n_i}x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$

تمهيد 2 :

اذا كان $A \ni B(E)$ فان:

$$A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i}) = A^{n_i}(E) \cap \mathrm{Ker}\, A^{m_i - n_i} \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

البرهان : يكفي في الواقع ، أن نلاحظ تكافؤ العلاقتين :

$$A^{m_i}z = 0 \quad \text{حيث} \quad y = A^{n_i}z \qquad (1)$$

$$A^{m_i - n_i}y = 0 \quad \text{حيث} \quad y = A^{n_i}z \qquad (2)$$

مبرهنة (3) :

اذا كان $A \ni NF(E)$ فان $[A^{n_i}x_i]_{C(A)} = A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i})$, $(1 \leqslant i \leqslant k)$

البرهان : سنبين أولا أن $A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i}) \ni \mathrm{lat}_o(A)$. يكفي من أجل ذلك ،في ضوء التمهيد (2) أن نبرهن على أنه اذا كان $y \ni A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i})$ ،وكان $B \ni C(A)$ فان $By \ni A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i})$.

في الواقع لدينا

$$By = BA^{n_i}z = A^{n_i}Bz$$

حيث $z \ni \mathrm{Ker}\, A^{m_i}$. بما أن $BA^{m_i}z = A^{m_i}Bz = 0$, اذن $Bz \ni \mathrm{Ker}\, A^{m_i}$

وبالتالي فان

$$By \ni A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i})$$

لنتحقق الآن من صحة المساواة $[A^{n_i}x_i]_{C(A)} = A^{n_i}(\mathrm{Ker} A^{m_i})$ بما أن $A^{n_i}x_i \ni A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i})$, و $A^{n_i}(\mathrm{Ker} A^{m_i}) \ni \mathrm{lat}_o(A)$ ، اذن :

$$A^{n_i}(\mathrm{Ker}\, A^{m_i}) \supseteq [A^{n_i}x_i]_{C(A)} \qquad (1)$$

من جهة أخرى ،ليكن $y \ni A^{n_i}(\mathrm{Ker} A^{m_i})$ ،عندئذ $y = A^{n_i}z$ حيث $z \ni \mathrm{Ker}\, A^{m_i}$

بما ان $[x_i]_A$ فضاء جزئي مخفض من أجل المؤثر A ، اذن $E = [x_i]_A \oplus E_i$ حيث $E_i \ni \mathrm{lat}(A)$ وبالتالي فان المؤثر B المعرف على الفضاء E بالعلاقتين : $BE_i = \{0\}$ $Bx_i = z$ مؤثر يتبادل مع المؤثر A . ينتج أن :

$$y = A^{n_i}Bx_i = BA^{n_i}x_i \in [A^{n_i}x_i]_{C(A)}$$

أي ان

$$[A^{n_i}x_i]_{C(A)} \supseteq A^{n_i}(\text{Ker } A^{m_i}) \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) ينتج المطلوب

تعين النتيجة التالية الفضاء الجزئي فوق اللامتغير من أجل مؤثر $A \in NF(E)$ الذي يولده المتجه x الوارد في المبرهنة (1) .

نتيجة (4) : (*)

اذا كان $A \in NF(E)$ فان $[x]_{C(A)} = \overline{\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\text{Ker } A^{m_i})}$

البرهان : استنادا الى المبرهنة (1) ، لدينا :

$$x = A^{n_1}x_1 + A^{n_2}x_2 + \dots + A^{n_k}x_k$$

وبالتالي فان $[x]_{C(A)} \supseteq [A^{n_i}x_i]_{C(A)}$ من أجل $i = 1,2, \dots, k$

ينتج أن

$$[x]_{C(A)} \supseteq \overline{\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\text{Ker } A^{m_i})} \qquad (1)$$

من جهة أخرى $x \in \overline{\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\text{Ker } A^{m_i})}$ وحيث أن هذا الفضاء الجزئي الأخير فوق لامتغير من أجل المؤثر A ، اذن :

$$[x]_{C(A)} \subseteq \overline{\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\text{Ker } A^{m_i})} \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نحصل على النتيجة المطلوبة .

نبرهن فيما يلي على أن المجموعة $\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\text{Ker } A^{m_i})$ مغلقة في الفضاء E ، الأمر الذي سيؤدي ، استنادا الى النتيجة (4) الى أن

$$[x]_{C(A)} = \sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\text{Ker } A^{m_i})$$

لدينا أولا التمهيد التالي :

تمهيد 5 :

ليكن $A \in B(E)$.اذا كانت الفضاءات الجزئية $A(E), A^2(E), \dots,$ مغلقة ، فان المجموعة $F_x = \{ y \in E : U(y) \geq U(x) \}$ تكون فضاء جزئيا من الفضاء E ، وذلك من أجل أي متجه x من هذا الفضاء .

(*) نضع خطا مستقيما فوق رمز المجموعة للحصول على لصاقتها .

البرهـــان :

يكفي في الواقع ، أن نتحقق من أن المجموعة F_x مغلقة. ليكن $y \in \overline{F_x}$ عندئـــذ $y = \lim_i y_i$ ، حيث $y_i \in F_x$ من أجل $i=0,1,2,\ldots$

بما أن المؤثر A مستمر على الفضاء E ، اذن $A^j y = \lim_i A^j y_i$ من أجـــل $j = 0,1,2,\ldots$. من جهة أخرى ، بما أن الفضاءات الجزئية $A(E), A^2(E), \ldots, A^i(E)$ مغلقة ، و $A^{h(A^j x)}(E) \ni A^j y$ اذن $A^{h(A^j x)}(E) \ni A^j y$ من أجل $j = o,1,2 \ldots$

ينتج أن $h(A^j y) \geqslant h(A^j x)$ من أجل أي عدد طبيعي j ، أي أن $U(y) \geqslant U(x)$ عندئذ $y \in F_x$ وهذا ينهي برهان التمهيد .

مبرهنـة (6) :

اذا كان $A \in NF(E)$ وكان x المتجـه الوارد في المبرهنة (1) ، فان

$$\sum_{i=1}^{k} A^{n_i} (\operatorname{Ker} A^{m_i}) = F_x$$

البرهـان :

ليكـن $y \in \sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\operatorname{Ker} A^{m_i})$ عندئذ $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ حيث $y_i \in A^{n_i}(\operatorname{Ker} A^{m_i})$ من أجل $i = 1,2,\ldots,k$. ينتج أنه من أجل أي عدد طبيعي j ,

لدينا $j + n_i \leqslant h(A^j y_i)$ من أجـل $m_i - n_i - 1 \geqslant j$ اذن $j + \min_{i \in I} n_i \leqslant h(A^j y)$ ، حيث $1 \leqslant i \leqslant k$. ولكن $\min h(A^j y_i) \leqslant h(A^j y)$ ، $I = \{ i : n_i \leqslant m_i - j - 1 \}$

من جهة أخرى ، $h(A^j x) = j + \min_{i \in I} n_i$ وبالتالي فان $h(A^j x) \leqslant h(A^j y)$ من أجل أي عدد طبيعي j ، أي ان $y \in F_x$ ينتج أن

$$F_x \supseteq \sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\operatorname{Ker} A^{m_i}) \qquad (1)$$

لنبرهن الآن على صحة العلاقة :

$$F_x \subseteq \sum_{i=1}^{k} A^{n_i} (\operatorname{Ker} A^{m_i}) \qquad (2)$$

ليكن $y \in F_x$ بما أن الفضاء الجزئي $M = \bigoplus_{i=1}^{k} [x_i]_A$ مخفض من أجل المؤثر A ، اذن يوجد $M' \in \operatorname{lat}(A)$ بحيث يكون $E = M \oplus M'$ وبالتالي فان المتجه y يكتـــب على الشكل $y = y' + y''$ حيث $y' \in M$ و $y'' \in M'$.

لنلاحظ أنه من أجل أي عدد طبيعي j لدينا $h(A^j x) \leqslant h(A^j y) \leqslant h(A^j y')$ و $h(A^j x) \leqslant h(A^j y) \leqslant h(A^j y'')$ وبالتالي فان $y', y'' \in F_x$.

سنبين فيما يلي أن كلاً من المتجهين y' و y'' ينتمي الى الفضاء الجزئي $\sum_{i=1}^{k} A^{n_i} (\operatorname{Ker} A^{m_i})$. من أجل المتجه y' لدينا : $y' = y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_k$

حيث $y'_i \ni [x_i]_A$ من أجل $i = 1,2, \ldots\ldots k$

اذا كان $y' \not\ni \sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\mathrm{Ker} A^{m_i})$ عندئذ يوجد عدد طبيعي i_o تتحقق من أجلـــه

العلاقة $y' \not\ni [A^{n_{i_o}} x_{i_o}]_A$ وهذا بدوره يؤدي الى تحقق العلاقة :

$h(A^{m_{i_o} - n_{i_o} - 1} y'_{i_o}) > m_{i_o} - 1 = (h(A^{m_{i_o} - n_{i_o} - 1} x)$ التي تتناقض بدورها مع العلاقة $F_x \ni y'$

ينتج أن $\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\mathrm{Ker}\ A^{m_i}) \ni y'$

أما من أجل المتجه Y'' فيمكننا ، استنادا الى المبرهنة (1) كتابته على الشكل :

$$y'' = A^{q_1} y''_1 + A^{q_2} y''_2 + \ldots\ldots + A^{q_s} Y''_s$$

حيث

$$y''_1, y''_2, \ldots\ldots, y''_s \in M' \ , \ p_1 = O(y''_1) < p_2 = O(y''_2) < \ldots < p_s = O(y''_s)$$

$q_1 < q_2 < \ldots < q_s$ ، و $0 < p_i - q_i < p_{i+1} - q_{i+1}$ من أجل $1 \leqslant i \leqslant s$ ،

وحيث الفضاء الجزئي $\bigoplus_{i=1}^{s} [y''_i]_A$ مخفض من أجل المؤثر A ومنتهي الأبعاد .

بما أن $h(A^j x) \leqslant h(A^j y'')$ من أجل أي عدد طبيعي j ، اذن

$O(x) \geqslant O(y'')$ وبالتالي فان $m_k - n_k \geqslant p_s - q_s$

سنتحقق فيما يلي ،من أن $\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\mathrm{Ker}\ A^{m_i}) \ni A^{q_{i'}} y''_{i'}$ من أجل $1 \leqslant i' \leqslant s$

لدينا :

$h(A^{p_{i'} - q_{i'} - 1} y_{i'}) = p_{i'} - q_{i'} - 1 + \min q_i$ من أجـــل $p_i - (p_{i'} - q_{i'}) \geqslant q_i$

و $h(A^{p_{i'} - q_{i'} - 1}) = p_{i'} - q_{i'} - 1 + \min n_i$ من أجـــل $m_i - (p_{i'} - q_{i'}) \geqslant n_i$

من جهة أخرى ،يوجد عدد طبيعي i_o تتحقق من أجله المتراجحة $m_{i_o} - n_{i_o} \geqslant p_{i'} - q_{i'}$

ينتج مما سبق أن $p_{i'} - 1 \leqslant p_i - q_{i'} - 1 + n_{i_o}$ أو $n_{i_o} \geqslant q_{i'}$ وبالتالي فان :

$$A^{q_{i'}} y''_{i'} \in A^{n_i}(E) \cap \mathrm{Ker}\ A^{m_{i_o} - n_{i_o}} = A^{n_{i_o}}(\mathrm{Ker}\ A^{m_{i_o}})$$

وهذا ينهي البرهان .

نتيجة (7) :

اذا كان $A \ni NF(E)$ ،وكان x المتجه الوارد في المبرهنة (١) فان

$$[x]_{C(A)} = \sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\operatorname{Ker} A^{m_i}) = \{ y \in E : U(y) \geqslant U(x) \}$$

البرهان :

ينتج من التمهيد (5) والمبرهنة (6) أن المجموعة $\sum_{i=1}^{k} A^{n_i}(\operatorname{Ker} A^{m_i})$ مغلقة وتساوي الفضاء الجزئي F_x ،عندئذ بالاستناد الى النتيجة (4) نحصل على المطلوب .

نختم مقالنا بعرض شكل آخر للفضاء الجزئي $[x]_{C(A)}$ ،

نتيجة (8) :

اذا كان $A \ni NF(E)$ وكان x المتجه الوارد في المبرهنة(1) ،فان

$$[x]_{C(A)} = \bigcap_{j \geqslant 0} A^{-j} [A^{h(A^j x)}(E)]$$

البرهان :

يكفي أن نلاحظ أنّ

$$y \in [x]_{C(A)} \longleftrightarrow h(A^j y) \geqslant h(A^j x), (\forall j \geqslant 0) \longleftrightarrow$$

$$A^j y \in A^{h(A^j x)}(E), (\forall j \geqslant 0) \longleftrightarrow y \in A^{-j} [A^{h(A^j x)}(E)] (\forall j \geqslant 0)$$

$$\longleftrightarrow y \in \bigcap_{j \geqslant 0} A^{-j} [A^{h(A^j x)}(E)] .$$

Soient un espace de banach compplexe de dimension infinie , B(E) l'algèbre des opérateurs linéaires continus de E dans E , et NF(E)l'ensemble des opérateurs nilpotents A($\in$ B (E))tels que les sous - espaces A(E),A^2(E),... soient fermés .

Nous étudions dans le présent article les sous - espaces hyperinvariants pour un operateur A NF(E) , et determinons le sous - espace hyperinvariant pour A qu'engendre un vecteur donné , et exposons de différentes formes de ce sous - espace .

REFERENCES

1- CHARLES B , 1960 - Étude sur les sous - groupes d'un groupe abélien. Bull. Soc . Math . France . Vol 88 , 217 - 227 .

2- CHARLES B , 1979 - Opèrateurs linéaires sur un espace de modules sur un anneau principal. Symposia Mathematica , Vol 23 . 121 - 143 .

3- KAPLANSKY I , 1969 - Infinite abelian groups , Univ . Michigan press, Ann, Arbor (U.S.A)

4 -كفى ، ١٩٨٩ ــ الفضاءات الجزئية المخفضة من أجل مؤثر خطي على فضاء باناخ ٠
مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية ٠ المجلد(١١) العدد (٢)