الفضاءات الجزئية المخففة من أجل مؤثر خطي على فضاء باناخ

الدكتور عهد كفى
أستاذ مساعد في كلية العلوم
جامعة تشرين

ليكن E فضاء لباناخ عقديا ،ولا متناهي الأبعاد ،وليكن (L (E جبر المؤثرات الخطية المعرفة على E والتي تأخذ قيمها في E .

ندرس في مقالتنا الفضاءات الجزئية المخففة من أجل مؤثر خطي A في L (E) ، فنبين أن كل فضاء جزئي مخفف من أجل A هو فضاء جزئي نقي بالنسبة لـ A ،ثم نعرض شرطا لازما وكافيا لكي يكون فضاء جزئي F ($F \subseteq E$) نقيا بالنسبة للمؤثر A . ونختم مقالتنا بالبرهان على أنه اذا كان A (في L (E)) مؤثرا معدوم القوة ،بحيث تكون الفضاءات الجزئية A(E) ، A^2(E) ، .... مغلقة ،فان أي متجه x من الفضاء E ينتمي عندئذ الى فضاء جزئي مخفف من أجل المؤثر A منتهي الأبعاد .

مقدمة :

ليكن E فضاء لباناخ ،عقديا ولا متناهي الأبعاد ،ولنرمز بـ (L (E لجبر المؤثرات الخطية المعرفة على E والتي تأخذ قيمها في E . نعرّف في L(E) مجموعة جزئية NF(E) من المؤثرات A ،تحقق الشرطين الآتيين :

1 ـ يوجد عدد طبيعي r $\geqslant 1$ ،بحيث يكون $A^r = 0$ و $A^{r-1} \neq 0$.نسمي المؤثر A في هذه الحالة مؤثرا معدوم القوة (nilpotent) . نرمز لمجموعة المؤثرات المعدومة القوة في L (E) بـ N (E) .

2 ـ الفضاءات الجزئية A (E), A^2(E) ، .... مغلقة .

يرتكز عملنا على أساس الاستفادة من مبدأ تطبيق نتائج دراسة الزمر التبديلية ونظيرية المودولات (modules) في الجبر ،في دراسة المؤثرات الخطية . وهو مبدأ معروف منذ زمن طويل ومستخدم في العديد من الأعمال الجبرية التي تهدف الى دراسة المؤثرات الخطية على فضاءات منتهية الأبعاد . أما في مجال التحليل التابعي ،فلم تتم الاستفادة من المبدأ المذكور الا على نطاق محدود من قبل I. KAPLANSKY في (KAPLANSKY1969) كما يشير الى ذلك B. CHARLES في (CHARLES1979 (a)) . نود الاشارة في هذا المجال الى أننا لن نتطرق الى عرض ومناقشة المبدأ المنوه عنه ،وكيفية الافادة منه في التوصل الى النتائج التي يتضمنها عملنا الحالي ، اذ يمكن الرجوع من أجل ذلك الى أي من المصدرين (KAPLANSKY 1969) و (CHARLES 1979 (a) ،

ندرس في مقالنا مجموعة الفضاءات الجزئية المخفضة من أجل مؤثر خطي $A \in L(E)$، فنبين أنّ كل فضاء جزئي مخفض من أجل A هو فضاء جزئي نقي بالنسبة لـ A ، ثم نعرض شرطا لازماً وكافيا ، لكي يكون فضاء جزئي مفروض من E نقيا بالنسبة للمؤثر A . ونختم مقالنا بالبرهان على أنه اذا كان $A \in NF(E)$ فان أي متجه من الفضاء E ينتمي الى فضاء جزئي مخفض من أجل المؤثر A منتهي الأبعاد .

نشير الى أن عملنا الحالي جزء أولي وأساسي من دراسة متكاملة نهدف من خلالها الى اعطاء وصف كامل لشبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة (hyperinvariant) من أجل مؤثر خطي مستمر على E ويحقق الشرطين 1 و 2 .

I – تعاريف :

ليكن F فضاء جزئيا من الفضاء E . نقول عن F انه لامتغير (Invariant) من أجل المؤثر A اذا كان $Ax \in F$ من أجل أي متجه $x \in F$ نرمز بـ $[x]_A$ للفضاء اللامتغير من أجل المؤثر A والمولد بالمتجه x كما نرمز بـ $lat(A)$ لشبكة treillis الفضاءات الجزئية اللامتغيرة من أجل A . ندل بالرمز $\oplus$ على المجاميع المباشرة (sommes directes) لفضاءات جزئية لامتغيرة من أجل المؤثر A .

نقول عن فضاء جزئي $F \in lat(A)$ انه مخفض (reduisant) من أجل المؤثر A ، اذا وجد فضاء جزئي $G \in lat(A)$ بحيث يكون $E = F \oplus G$ ونقول عن F انه نقي بالنسبة لـ A (A- pur) اذا كان $A^m(E) \cap F = A^m(F)$ من أجل أي عدد طبيعي m .

ليكن $x \in E$. نسمي أكبر عدد طبيعي s تتحقق من أجله العلاقة $x \in A^s(E)$ ارتفاع (hauteur) المتجه x في الفضاء E بالنسبة للمؤثر A ، ونرمز له بـ $h_E(x)$ أو بـ $h(x)$ اذا لم يكن هناك مجال للالتباس . نصطلح بهذا الصدد على أن $h(0) = \infty$ ، ومن المفيد أن نلاحظ انه اذا كان A مؤثرا معدوم القوة ، وكان x متجها مغايرا للمتجه الصفري في E فان $h(x) < \infty$.

يمكننا التحقق بسهولة من أنه اذا كان $A \in L(E)$ ، فان :

1 – $\min(h(x), h(y)) \leq h(x+y)$ ، وذلك من أجل أي متجهين x و y من E .

2 – اذا كان $h(x) \neq h(y)$ فان $h(x+y) = \min(h(x), h(y))$ وذلك من أجل أي متجهين x و y من E .

– اذا كان $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k$ حيث $E_i \in lat(A)$ ، وكان $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ حيث $x_i \in E_i$ ، فان $h_E(x) = \min\limits_{1 \leq i \leq k} h_{E_i}(x_i)$

لنعرف من أجل أي متجه $x \in E$ متتالية (δ_j) بالعلاقة $\delta_j = h(A^j x)$ نسمي المتتالية (δ_j) متتالية اولم (Ulm) المتعلقة بالمتجه x بالنسبة للمؤثر A . ندل على هذه المتتالية بالرمز $U(x)$.

نسمي أخيرا ، أصغر عدد طبيعي m تتحقق من أجله العلاقة $A^m x = 0$ مرتبة

(Ordre) المتجه x بالنسبة للمؤثر A وندل عليها بالزمر $O(x)$ ، كما نـدل بالرمز $\mathrm{Ker}\,A$ لمجموعة المتجهات التي مرتبة كل منها أصغر أو تساوي الواحد .

II – يحدد التمهيد التالي البحث عن الفضاءات الجزئية المخفضة من أجل مؤثر $L(E) \ni A$ في مجموعة الفضاءات الجزئية النقية بالنسبة لهذا المؤثر .

تمهيد 1 : ليكن $L(E) \ni A$ كل فضاء جزئي مخفض من أجل المؤثر A هو فضاء جزئي نقي بالنسبة لـ A .

البرهان : ليكن F فضاء جزئيا مخفضا من أجل المؤثر A . يوجد فضاء جزئي لامتغير G من أجل المؤثر A ، بحيث يكون $E = F \oplus G$ بما أن F لامتغير من أجل المؤثر A ، اذن $F \supseteq A^m(F)$ ، وبالتالي $A^m(E) \cap F \supseteq A^m(F)$ من أجل أي عدد طبيعي m .

من جهة أخرى ، اذا كان $A^m(E)\cap F\ \ x$ عندئذ يوجد $F \ni y$ و $G \ni z$ بحيث يكون $F \ni (x =)\ A^m y + A^m z$ ، وهذا يؤدي الى أن يكون $A^m z = 0$ وبالتالي $A^m(F) \ni x\ (=A^m y)$. ينتج أن $A^m(F) \supseteq A^m(E) \cap F$ من أجل أي عـدد طبيعي m ، وهذا ينهي برهان التمهيد .

يدعونا البحث عن الفضاءات الجزئية المخفضة من أجل مؤثر $L(E) \ni A$ في ضوء التمهيد (1) الى الاهتمام بدراسة الفضاءات الجزئية النقية بالنسبة لهذا المؤثر . لدينا بهـذا الصدد التمهيدان التاليان :

تمهيد 2 – ليكن $L(E) \ni A$ و $\mathrm{lat}(A) \ni F$. يلزم ويكفي لكي يكون F نقيا بالنسبة للمؤثر A أن يكون $h_E(x) = h_F(x)$ من أجل أي متجه $F \ni x$.

البرهان :

لزوم الشرط . لنفرض أن F فضاء جزئي نقي بالنسبة للمؤثر A ، وأن $F \ni x$ اذا كان $h_F(x) = \infty$ فان $A^m(F) \ni x\ (A^m(E) \supseteq)$ من أجل أي عدد طبيعي m . أي ان $h_E(x) = \infty$. أما اذا كان $\infty > h_F(x) = s$ فان $(A^s(F) - A^{s+1}(F)) \ni x$ وبالتالي $(A^s(E) - A^{s+1}(E)) \ni x$. أي أن $h_E(x) = s$.

كفاية الشرط . لنفرض أن $h_E(x) = h_F(x)$ من أجل أي متجه $F \ni x$ بمـا أن $\mathrm{lat}(A) \ni F$ ، اذن $F \supseteq A^m(F)$ وبالتالي $A^m(E) \cap F \supseteq A^m(F)$ مـن أجل أي عدد طبيعي m .

من جهة أخرى ، اذا كان $A^m(E) \cap F \ni x$ ، فان $m \leqslant h_E(x) = h_F(x)$ وبالتالي فان $A^m(F) \ni x$ ينتج أن $A^m(F) \supseteq A^m(E) \cap F$ وبالتالي $A^m(E) \cap F = A^m(F)$ من أجل أي عدد طبيعي m . اذن F نقي بالنسبة للمؤثر A .

يبين التمهيد التالي أنه يمكننا في الواقع أن نقتصر في نص التمهيد (2) علـى المتجهات x التي تنتمي الى $F \cap \mathrm{Ker}\,A$.

تمهيد 3 – ليكن $L(E) \ni A$ ، و $\mathrm{lat}(A) \ni F$. يلزم ويكفي لكي يكون F نقيـا بالنسبة للمؤثر A أن يكون $h_E(x) = h_F(x)$ من أجل أي متجه x $F \cap \mathrm{Ker}\,A$

البرهـــان : لـزوم الشرط واضـح ولا يحتـاج الى برهان .

كفـايـة الشرط . لـنفـرض أن $h_E(x) = h_F(x)$ من أجل أي متجه $x \in F \cap \operatorname{Ker} A$.

يكفي أن نتحقق من أن $h_E(x) = h_F(x)$ من أجل أي متجه $x \in F$. لـنفـرض أن ذلك محقق من أجل كل متجهات الفضاء الجزئي F التي مرتبة كل منهـا أصغر أو تساوي n ، ولـنتحقق من أن $h_E(x) = h_F(x)$ من أجل أي متجه $x \in F$ مرتبته $n+1$.

بمـا أن $x \in F$ و $O(x)= n+1$ ، اذن $Ax \in F$ و $O(Ax) = n$
وبالتـالي فـان $h_E(Ax) = h_F(Ax) = \ell$. لـيكن $y \in F$ حيث $Ax = A^{\ell} y$
عندئذ :
$$\ell - 1 = h_E(A^{\ell -1}y) = h_F(A^{\ell -1}y) \ , \ h_F(x) < \ell - 1 \ \text{و} \ h_E(x) < \ell - 1 .$$

لـنضع $x = (x - A^{\ell -1}y) + A^{\ell -1}y$ بمـا أن $x - A^{\ell -1}y \in F \cap \operatorname{Ker} A$
اذن :
$$h_E(x - A^{\ell -1}y) = h_F(x - A^{\ell -1}y) = k$$

اذا كـان $k \neq \ell -1$ فـان $h_E(x) = h_F(x) = \min(k , \ell -1)$ واذا كـان $k = \ell -1$
فَـان $h_F(x) \leqslant \ell -1$ و $h_F(x) > \ell -1$. وحيث ان $h_F(x) \geqslant \ell -1$
و $h_E(x) \geqslant \ell -1$ اذن $h_E(x) = h_F(x) = \ell -1$

نعرض الآن ،من غير برهـان نتيجة تعود الى B. CHARLES (CHARLES 1979(b)) لأهميتـها في الحصول على فضاءات جزئية مخفضة فيمـا سيلي من هذا البحث .

مبرهنـــة 4 :

لـيكـن $A \in L(E)$ و $F \in \operatorname{lat}(A)$ اذا كـان F منتـهـــي الأبعـاد (*) ونقيـا بالنسبة للمؤثر A ،بحيث يكون $A^n(F) = \{0\}$ من أجل عـــدد طبيعي $n \geqslant 1$ وكـانت الفضاءات الجزئية $A(E), A^2(E), \ldots, A^n(E)$ مغلقة ،فـان F يكون مخفضا من أجل المؤثر A .

ننتقل في ضوء النتـائج السابقة الى الاهتمام بالمؤثرات معدومة القوة في $L(E)$ — تعمم المبرهنة التـالية نتيجة حول الزمر التبديليـة (CHARLES 1960) ،فتبين أنه اذا كـــان $A \in N(E)$ ،فـان أي متجه من الفضاء E ينتمي ،عندئذ ، الى فضاء جزئي نقـــي بالنسبة لـ A منتـهي الأبعـاد .

لـيكن $A \in L(E)$ و x متجهـا من الفضاء E : مرتبتـه n ،ومتتـاليـة أولم المتعلقة به (ε_j) .
لـنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية تـابعـا φ على النحو الآتي :

(*) اذا كـان E فضاء لـهيلـبرت ،فـانه يمكن الاستغنـاء عن فرضية " F منتـهي الأبعـاد " دون أن يؤثر ذلك على صحة المبرهنة .

$$\varphi(t) = 0\,(A^{n-t}x) + h\,(A^{n-t}x) = t + \delta_{n-t}\ ,\forall t < n$$

$$\varphi(t) = 0 \qquad ,\forall\ t > n$$

نسمي φ دالة (indicatrice) المتجه x بالنسبة للمؤثر A . بما أن $\delta_j + 1 \leqslant \delta_{j+1}$ من أجل أي عدد طبيعي j ، اذن φ تابع متناقص . نسمي أي عدد طبيعي t نتحقق من أجله المتباينة $\varphi(t+1) < \varphi(t)$ نقطة انقطاع للتابع φ

ينتج من التعريف أن النقطة $t = n$ نقطة انقطاع للتابع φ .

مبرهنة 5 :

ليكن $A \in N(E)$ و x متجها من الفضاء E ،مرتبته n ،دالته φ متتالية اولم (Ulm) المتعلقة به (δ_j) و $t_1, t_2, \ldots, t_k$ نقاط انقطاع دالته φ . يوجد ،عندئذ فضاء جزئي $M \in lat(A)$ من الشكل $M = \bigoplus_{i=1}^{k} [x'_i]_A$ منتهي الأبعاد،نقي بالنسبة للمؤثر A ،ويحوي المتجه x الذي يكتب عندئذ على الشكل :

$$x = A^{n'_1}x'_1 + A^{n'_2}x'_2 + \ldots\ldots + A^{n'_k}x'_k$$

حيث

$$0\,(x'_1) = \varphi(t_1)\ ,\ 0(x'_2) = \varphi(t_2) - t_1,\ \ldots\ ,\ 0(x'_k) = \varphi(t_k) - t_{k-1}$$

و

$$n'_i = \varphi(t_i) - n\ ,\ (i = 1, 2, \ldots, k)$$

البرهان :

لنضع $m = \varphi(1) = 1 + \delta_{n-1}$ عندئذ يكون $n \leqslant m$.

نميز حالتين :

الحالة الأولى : النقطة $t = n$ هي نقطة الانقطاع الوحيدة لدالة المتجه x.لدينا $\delta_o = \delta_{n-1} - (n-1) = m-n$ وبالتالي يوجد $x'_1 \in E$ بحيث يكون $x = A^{m-n}x'_1$

من الواضح أن $0\,(x'_1) = m = \varphi(n)$ ،وان

$$h_E\,(A^{m-1}x'_1) = h_E(A^{n-1}x) = \delta_{n-1} = m-1 = h_{[x'_1]_A}(A^{m-1}x'_1)$$

ينتج ، استنادا الى التمهيد (3) أن $[x'_1]_A$ نقي بالنسبة للمؤثر A . بالاضافة الى ذلك ،لدينا :

$\dim [x'_1]_A = m\ ,\ x \in [x'_1]_A$ أي أن $[x'_1]_A$ هو الفضاء الجزئي M الذي يحقق شروط المبرهنة .

الحالة الثانية :

لنفرض أن $t_k, \ldots, t_2, t_1$ نقطتا انقطاع على الأقل لدالة المتجه x

$t_k > \ldots > t_2 > t_1$ اذا اعتبرنا المتجه $A^{n-t_1}x$ فاننا نعود الى الحالة الاولى ،بتعبير آخر ،النقطة $t = t_1$ هي نقطة الانقطاع الوحيدة لدالة المتجه $A^{n-t_1}x$

بما أن $h(A^{n-t_1}x) = \varphi(t_1) - t_1 = m - t_1$ اذن يوجد $E \ni x'_1$ بحيث يكون $A^{n-t_1}x = A^{m-t_1}x'_1$ نتحقق دونما أية صعوبة من أن :

$[x, x'_1]_A = [x'_1]_A \oplus [y]_A$ حيث $y = x - A^{m-n}x'_1$. لنلاحظ أن $O(x'_1) = m = \varphi(1) = \varphi(t_1)$. لنعين الآن دالة المتجه y التي سنرمز لها بـ ψ ، سنتحقق فيما يلي من أن :

$$\psi(t) = \varphi(t + t_1) - t_1$$

لدينا $A^{n-t_1}y = A^{n-t_1}x - A^{m-t_1}x'_1 = 0$ لو كان $A^{n-t_1-1}y = 0$ لنتج أن $\delta_{n-t_1-1} = m-t_1-1$ وعندئذ تتناقض المساواة التالية مع تعريف النقطة t_1 كنقطة انقطاع للتابع φ :

$$\varphi(t_1 + 1) = t_1 + 1 + \delta_{n-t_1-1} = (t_1 + 1) + (m - t_1 - 1) = m = \varphi(t_1)$$

ينتج أن $O(y) = n - t_1$. بقي أن نتحقق من أن $h(A^{n-t_1-t}y) = \delta_{n-t_1-t}$ وذلك من أجل $n - t_1 \geqslant t$

بما أن $A^{n-t_1-t}y = A^{n-t_1-t}x - A^{m-t_1-t}x'_1$ ، اذن يكفي أن نتحقق من صحة المتباينة :

$$\delta_{n-t_1-t} < h(A^{m-t_1-t}x)$$

في الواقع لدينا :

$$\delta_{n-t_1-1} = \varphi(t_1+t) - (t_1+t) < \varphi(1) - (t_1+t) = m-t_1-t$$

أما نقاط انقطاع التابع ψ فتتعين عبر تكافؤ المتباينتين الآتيتين :

$$\psi(t) > \psi(t+1) \quad \& \quad \varphi(t+t_1) > \varphi(t+t_1+1)$$

ينتج أن نقاط انقطاع التابع ψ هي : $t_k - t_1, \ldots, t_3 - t_1, t_2 - t_1$ وبالتالي فهي ترتبط فيما بينها بالعلاقات

$$t_k - t_1 > \ldots > t_3 - t_1 > t_2 - t_1$$

اذا اعتبرنا الآن المتجه $(A^{n-t_2}y =) A^{n-t_1-(t_2-t_1)}y$ فاننا نعود من جديد الى الحالة الأولى . بتعبير آخر النقطة $t = t_2$ هي نقطة الانقطاع الوحيدة لدالة المتجه $A^{n-t_2}y$ وهكذا باجراء برهان تراجعي (تكراري) ،يمكننا الحصول على الفضاء

الجزئي M ، لنجد أنه من الشكل $M = \oplus_{i=1}^{k} [x'_i]_A$ وانه بالتالي فضاء جزئي لامتغير من أجل المؤثر A ، منتهي الأبعاد ، ويحوي المتجه x . بالاضافة الى ذلك اذا لاحظنا أن الفضاءات الجزئية $[x'_i]_A$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ نقية بالنسبة للمؤثر A وان $0(x'_1) < 0(x'_2) < \ldots < 0(x'_k)$ ، عندئذ ، استنادا الى التمهيد (3) يكون M فضاء جزئيا نقيا بالنسبة لـ A .

أخيرا ، يكفي أن نلاحظ أن

$$x = A^{m-n}x'_1 + y = A^{\varphi(t_1)-n}x'_1 + A^{\psi(t_2-t_1)-(n-t_1)} + \ldots\ldots$$

$$= A^{\varphi(t_1)-n}x'_1 + A^{\varphi(t_2)-n}x'_2 + \ldots\ldots$$

لنصل الى نهاية البرهان :

ننهي دراستنا بالنتيجة الهامة التالية :

نتيجة 6 :

ليكن $A \in NF(E)$ و $x \in E$ ، يوجد فضاء جزئي M مخفض من أجل المؤثر A ومنتهي الأبعاد ، بحيث يكون $x \in M$.

البرهان :

بما أن $A \in NF(E)$ ، اذن $A \in N(E)$ وبالتالي يوجد استنادا الى المبرهنة (5) ، فضاء جزئي $M \in lat(A)$ نقي بالنسبة للمؤثر A ، ومنتهي الأبعاد بحيث أن $x \in M$.

بالاضافة الى ذلك ، يوجد عدد طبيعي $1 \leqslant r$ بحيث يكون $A^r = 0$ ، عندئذ يكون $A^r(F) = \{0\}$.

أخيرا استنادا الى الفرض ، تكون الفضاءات الجزئية $A(E), A^2(E), \ldots\ldots, A^r(E)$ مغلقة . عندئذ ينتج من المبرهنة (4) أن الفضاء الجزئي M مخفض من أجل المؤثر A ، وهذا ينهي البرهان النتيجة .

RÉSUMÉ

Soient E un éspace de Banach complexe et L (E) L'algèbre des opérateurs linéaires de E dans E.

Nous étudions les sous - éspaces réduisants pour un operateur linéaire $A \in L(E)$ et montrons que tout sous - espace réduisant pour A est A - pur. Ensuite nous donnons une condition necessaire et sufisante pour qu'un sous - espace F ($\subseteq$ E) soit A - pur . Enfin , nous demontrons que si A ($\in$ L (E)) est nilpotent et les sous - espaces A (E) , A^2 (E) , ... sont fermes alors il existe pour tout vecteur $x \in E$ un sous - espace réduuisant pour A de dimension finie .

RÉFÉRENCES

1 - CHARLES , B 1960 - Étude sur les sous - groupes d'un groupe abélien .Bull Soc . Math . France , Vol 88 , 217 - 227 .

2 - CHARLES , B 1979 (a) Opérateurs linéaires sur un espace de Banach et modules sur un anneau principal . Symposia Mathematica , vol 23, 121 - 143.

3 - CHARLES , B 1979 (b) - sous - espaces réduisants pour un opérateur linéaire sur un espace de Banach . Séminaire d'analyse fonctionnelle., U.S.T.L . Montpellier (France)

4 - KAPLANSKY , I 1969 - Infinite abelian groups , University of Michigan press , Ann . Arbor (U.S.A)

______, *Economics and the Fiction of Daniel Defoe*, Berkeley, 1976.

J.Richetti, *Defoe's Narratives: Situations and Structures*, Oxford, 1975.

P. Rogers (ed.) *Defoe : The Critical Heritage*, London, 1972.

G.A.Starr, *Defoe and Casuistry*, New Haven, 1971.

______, *Defoe and Spiritual Autobiography*, Princeton, 1965.

J.R.Sutherland, *Daniel Defoe : A Critical Study*, Boston, 1971.

E.Zimmermann, *Defoe and the Novel*, Berkeley, 1975.