اشعاع ثنائي قطب متغير في وسط مادي شفاف وحيد المحور

د . سليمان الخضر
استاذ مساعد في كلية العلوم
جامعة تشرين

تعالج المقالة الراهنة اشعاع ثنائي قطب كهربائي خطي متغير زمانياً ، ومتحرك في وسط مادي ، وحيد المحور الضوئي . وانطلاقاً من معادلات مكسويل ـ وبدون اللجوء إلى استخدام مفهوم الكمون ـ استخرجت عبارة التوزع الطيفي ـ الزاوي . ولحظ مفعول دوبلر في مختلف الأشكال التي يمكن أن يظهر فيها . وباجراء المكاملة بالنسبة للزاوية θ تم الحصول على صيغة اشعاع فافيلوف ـ تشرينكوف . وباستبعاد شرط ظهور التبدد تمت المكاملة بالنسبة للمتحول ∞ . هذا وقد تمت مناقشة النتائج في ضوء نتائج شهيرة مستخلصة في ابحاث مشار إليها اصولاً في نهاية المقالة .

ـ تحظى مسألة اشعاع ثنائيات الأقطاب المتغيرة في الأوساط المادية باهتمام ملحوظ لكون الهوائيات المستخدمة لأغراض شتى في التقنية الكونية تمثل في أبسط اشكالها ثنائيات اقطاب . لقد عالجت جملة الأعمال *[1,12]* مسألة اشعاع ثنائيات الاقطاب المتغيرة المتحركة في الأوساط المادية المختلفة ، وتهدف المقالة الراهنة إلى تبيان امكانية حساب الطاقة الضائعة بفعل اشعاع ثنائي قطب في وسط شفاف وحيد المحور في الحالة العامة بالاعتماد على الطريقة المقترحة في *[14]* وإذا أسقطنا من الحسبان ظاهرة التبدد ، كان بالامكان اجراء المكاملة حتى النهاية كما هو متبع في *[9]* .

عرض البحث وشرحه :

تعتبر سماحية العازلية ε والنفوذية المغنطيسية μ في الحالة العامة تابعين للتواتر ω وللمتجهة الموجية $\vec{k}$. فإذا فرضنا أن الوسط المادي شفاف ولا محدود ، وحيد المحور الضوئي ، وليكن محوره الضوئي وفق المحور z . فإن بالامكان تمثيل العاملين ε و μ بالشكل التالي :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1; & 0 ; & 0 \\ 0; & \varepsilon_1; & 0 \\ 0; & 0; & \varepsilon_3 \end{pmatrix}; \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1; & 0 ; & 0 \\ 0; & \mu_1; & 0 \\ 0; & 0; & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

لنفترض أن هدفاً كهربائياً خطياً يتحرك في هذا الوسط وفق محوره الضوئي حركة انسحابية منتظمة وعزمه الكهربائي :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_0 e^{-i\omega_0 t} \delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \quad (2)$$

حيث

$$\vec{P}_0 = \vec{P}'_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \omega'_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

علماً أن ω'_0 و $\vec{P}'_0$ هما على الترتيب التواتر الزاوي الخاص والعزم الكهربائي في جملة الاحداثيات الخاصة .

عندئذ يمكن تعيين الحقل الكهرطيسي لهذا الهدف في الوسط المادي الراهن بوساطة جملة معادلات مكسويل والمعادلات المادية ، علماً أن :

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \tag{3}$$

لنضع متجهات الحقل الكهرطيسي وتابع دلتا في تكامل فورية [13]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \iint \vec{E}(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}\, d\vec{k}\, d\omega \quad , \tag{4}$$

وهكذا ....

فنجد أن جملة معادلتي مكسويل الاساسيتين تؤولان بعد اجراء سلسلة من العمليات البسيطة إلى المعادلة الشعاعية :

$$\left[\, \vec{\varkappa} \left(\mu^{-1} [\, \vec{\varkappa} \cdot \vec{E}\,] \right) \right] + \varepsilon \vec{E} = - \frac{4\pi i}{\omega} \vec{j} \,, \tag{5}$$

علما أن :

$$\vec{k} = \frac{n\omega}{c} \vec{\varkappa} \,, \quad \vec{\varkappa}(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3) = \tag{6}$$

$$\{\sin\theta \cos\varphi;\ \sin\theta \sin\varphi;\ \cos\theta\} \,.$$

حيث ترمز $\vec{\varkappa}$ لمتجهة الواحدة وفق المتجهة الموجبة $\vec{k}$ و c لسرعة الضوء في الخلاء و n لقرينة انكسار الوسط المادي وترمز الأقواس المتوسطة في المعادلة (5) إلى الجداء الخارجي .

وتعين عندئذ مركبة فورية $E_\nu(\vec{k}, \omega)$ لمتجهة الحقل الكهربائي بالشكل :

$$T_{\alpha\nu} E_\nu(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3 i\omega} \int j_\alpha(\vec{r}\,', t')\, e^{-i\vec{k}\vec{r}\,' + i\omega t'} d\vec{r}\,' dt', \tag{7}$$

$$(\alpha, \nu = 1, 2, 3;\ x, y, z)$$

علما أن $T_{\alpha\nu}$ مصفوفة لها الشكل:

$$T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -n^2\left(\varkappa_2^2 \mu_3^{-1} + \varkappa_3^2 \mu_1^{-1}\right) + \varepsilon_1 \ ; & n^2 \varkappa_1 \varkappa_2 \mu_3^{-1} \ ; & n^2 \varkappa_1 \varkappa_3 \mu_1^{-1} \\ n^2 \varkappa_1 \varkappa_2 \mu_3^{-1} \ ; & -n^2\left(\varkappa_1^2 \mu_3^{-1} + \varkappa_3^2 \mu_1^{-1}\right) + \varepsilon_1 \ ; & n^2 \varkappa_2 \varkappa_3 \mu_1^{-1} \\ n^2 \varkappa_1 \varkappa_3 \mu_1^{-1} \ ; & n^2 \varkappa_2 \varkappa_3 \mu_1^{-1} \ ; & -n^2\left(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2\right)\mu_1^{-1} + \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

لنستخدم الصيغة :

$$W = -\int_{-\infty}^{\infty} (\vec{E}\vec{j})\, d\vec{r}, \tag{9}$$

التي تعين استطاعة الاشعاع أو قوة الاعاقة المؤثرة على الهدف المشحون من جهة الحقل الكهرطيسي المثار في الوسط المادي من جراء فعل هذا الهدف ، فنجد :

$$W = \frac{P_0^2}{8\pi^3} Rei \int (\omega_0 + k \cdot v)^2 \omega^{-1} T^{-1}_{\nu\alpha} \times \tag{10}$$

$$\times\, e^{-i(\omega - \omega_0 - k \cdot v)(t-t')}\, dt' d\vec{k} d\omega.$$

علماً أنه أخذ بالحسبان القيمة المتوسطة للجداء $(\vec{E}\vec{j})$ ، وترمز Re: للقسم الحقيقي من المقدار الذي تسبقه ، و i للعدد التخيلي ،

و $T^{-1}_{\nu\alpha}$ معكوس المصفوفة $T_{\alpha\nu}$ ، حيث يعين هذا المعكوس بالشكل :

$$T^{-1}_{\nu\alpha} = \left[\frac{1}{(n^2_{-1} - n^2_{+1})(n^2 - n^2_{-1})} + \frac{1}{(n^2_{+1} - n^2_{-1})(n^2 - n^2_{+1})} \right] \frac{M_{\alpha\nu}}{A} . \tag{11}$$

علماً أن :

$M_{\alpha\nu} = M_{\alpha\nu}(n^2)$ المتمم الجبري للعنصر $t_{\alpha\nu}$ في المعين $|T| = det\, T_{\alpha\nu}$ [14] .

وأما $n_{+1} = n_{\mu}$ و $n_{-1} = n_{\varepsilon}$ فترمزان لقرينتي انكسار الامواج في الوسط المادي الراهن :

$$n^2_{+1} = \frac{\mu_1 \mu_3 \varepsilon_1}{[\mu_1(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \mu_3 \varkappa_3^2]} \;;\quad n^2_{-1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_1}{[\varepsilon_1(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \varepsilon_3 \varkappa_3^2]}$$

و

$$A = \frac{\varepsilon_1^2\, \varepsilon_3}{n^2_{+1}\, n^2_{-1}} \tag{12}$$

ونظراً لكون الهدف المتحرك يقوم بحركته وفق المحور الضوئي z للوسط المادي ، فإن عنصر المتمم الجبري الذي يجب أخذه بالحسبان هو M_{33} ، وبحساب بسيط نجد :

$$M_{33}(n^2) = \varepsilon_1^2 \left(1 - \frac{n^2}{n^2_{+1}}\right) + \varepsilon_1 \mu_1^{-1} n^2 \varkappa_3^2 \left(\frac{n^2}{n^2_{+1}} - 1\right). \tag{13}$$

لنكامل الصيغة (10) بالنسبة للزمن آخذين بالحسبان
خواص تابع دلتا وضرورة اعتبار لحظة المراقبة t أكبر من t' ($t > t'$)
، فنجد :

$$W = \frac{P_0^2}{8\pi^2} Rei \int \omega^{-1} (k\, v + \omega_0)^2 \left[\frac{1}{(n_{-1}^2 - n_{+1}^2)\,(n^2 - n_{-1}^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n_{+1}^2 - n_{-1}^2)\,(n^2 - n_{+1}^2)} \right] \frac{M_{33}}{A}\, \delta(\omega - \omega_0 - k \cdot v)\, d\vec{k} d\omega. \qquad (14)$$

لنأخذ بالحسبان أن :

$$dk = \frac{\omega}{c}\, dn \qquad \text{و} \qquad d\vec{k} = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi .$$

فنجد بعد مكاملة (14) بالنسبة للمتحولين φ و n
أن :

$$W = W_{j=+1} + W_{j=-1} \quad ; \qquad j = +1, -1. \qquad (15)$$

وبالعودة الى (13) ، نلاحظ ان ابدال n في $M_{33}(n^2)$
بالقرينة n_{+1} يوّدي الى النتيجة : $M_{33}(n_{+1}^2) = 0,$ وبالتالي
يكون :

$$W_{j=+1} = 0. \qquad (16)$$

وأما $W_{j=-1}$ فتساوي :

$$W_{j=-1} = -\frac{p_0^2}{4\,v\,c^2} \int \frac{M_{33}(n_{-1}^2)}{A\,(n_{-1}^2 - n_{+1}^2)}\, n_{-1}\, \delta\left(\varkappa_3 - \frac{\omega - \omega_0}{\omega \beta\, n_{-1}}\right) \omega^3 \,\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\, \varkappa_3 , \qquad (17)$$

حيث

$$-\frac{M_{33}(n_{-1}^2)}{A\,(n_{+1}^2 - n_{-1}^2)} = \frac{n_{-1}^2\,(n_{-1}^2 \varkappa_3^2 - \varepsilon_1 \mu_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_1} . \qquad (18)$$

لنستخدم (18) في (17) ولننتقل الى المتحـــــول
الجديد :

$$n_{-1}\, \varkappa_3 = t_{-1} , \qquad (19)$$

حيث :

$$-\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \leqslant t_{-1} \leqslant \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$$

عندئذ لو أخذنا بالحسبان أن :

$$n^3_{-1}\, d\varkappa_3 = \mu_1 \varepsilon_3\, d\,t_{-1}\,,$$

لوجدنا بعد اجراء المكاملة بالنسبة الى هذا المتحـــول الجديد أن :

$$W_{j=-1} = \frac{p_0^2}{4 v c^2} \int\limits_{n_{-1}\beta\cos\theta < 1} \mu_1 \left[1 - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega^2 \beta^2 n_{-1}^2} \right] \omega^3\, d\omega. \qquad (20)$$

هذا وتوجد حالة أخرى يكون من أجلها $n_{-1}\beta\cos\theta > 1$ ، ولو تتبعنا هذه الحالة بشكل مشابه لما سبق لوجدنا التالي :

$$W_{j=-1} = \frac{p_0^2}{4 v c^2} \int\limits_{n_{-1}\beta\cos\theta > 1} \mu_1 \left[1 - \frac{(\omega + \omega_0)^2}{\omega^2 \beta^2 n_{-1}^2} \right] \omega^3\, d\omega. \qquad (21)$$

وبالتالي يكون :

$$W_{j=-1} = \frac{p_0^2}{4 v\, c^2} \left\{ \int\limits_{n_{-1}\beta\cos\theta < 1} \mu_1 \left[1 - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega^2 \beta^2 n_{-1}^2} \right] \omega^3\, d\omega \; + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{n_{-1}\beta\cos\theta > 1} \mu_1 \left[1 - \frac{(\omega + \omega_0)^2}{\omega^2 \beta^2 n_{-1}^2} \right] \omega^3\, d\omega \right\}. \qquad (22)$$

يعين طيف التواترات المثارة من جراء حركة ثنائي القطب بوضع مضمون تابع دلتا مساويا للصفر في الصيغة (14) والصيغة المناظرة لها ، وباجراء ذلك نجد :

$$\omega_j = \frac{\omega_0}{\left| 1 - \beta\, n_j(\theta) \cos\theta \right|} \; ; \quad j = +1, -1 \; ; \mu, \varepsilon. \qquad (23)$$

ونلاحظ عندما $\beta\, n_j(\theta)\cos\theta < 1$ أن التواتر ω_j يزداد بتناقص الزاوية θ ، ويوافق الحد الاول من الصيغة (22)

هذه الحالة ، ويظهر عندئذ مفعول دوبلر النظامي .

أما عندما $\beta\, n_j(\theta)\cos\theta > 1$ ، فان التواتر ω_j يتناقص بتناقص الزاوية θ ، ويوافق هذه الحالة الحد الثاني من (22) ،

ويظهر عندئذ مفعول دوبلر غير النظامي ، الموافق قيم الزاوية θ ، التي تحقق الشرط :

$$\theta < \arccos(\beta n_j)^{-1} .$$

وفي المنطقة الموافقة $\beta n_j(\theta)\cos\theta < 1$ يتحقق الشرط:

$$\frac{v\cos\theta}{K_j} < 1 \tag{24}$$

حيث ترمز $K = K(\omega_\theta)$ لسرعة المجموعة : $\frac{1}{K} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}$

علما أن ω_θ تواتر دوبلر . ويعني هذا الشرط ان المنبع المشع لا يمكن ان يسبق الحقل الذي يشعه .

واذا كانت سرعة المجموعة $\vec{K}$ تصنع زاوية حادة مع سرعة المنبع $\vec{v}$ ، في حين تضع هذه الاخيرة مع المتجهة الموجية $\vec{k}$ زاوية منفرجة ،

فان الاشعاع الصادر الى الامام (أي في اتجاه حركة المنبع) يكون مقتصرا على الامواج التي تواتراتها أقل من التواتر الخاص ω_0 ، وأما الامواجالتي لها تواترات اخرى اكبر من التواتر ω_0 فيتم اصدارها الى الخلف . تسمى هذه الظاهرة بمفعول دوبلر العكسي ويتحقق هذا المفعول عندما :

$$\frac{\vec{k}_j\cdot\vec{v}}{\vec{K}_j\,\vec{v}} < 0. \tag{25}$$

اما في المنطقة التي يكون فيها $\beta n_j(\theta)\cos\theta > 1$ ، فيتحقق الشرط :

$$\frac{v\cos\theta}{K_j} > 1 , \tag{26}$$

الذي يعتبر الشرط اللازم والكافي لظهور مفعول دوبلر المركب وتبقى امكانية ظهور هذا المفعول في الاوساط المادية غير المتناظرة اكبر من امكانية ظهوره في الاوساط المتناظرة .

وبتعميم هذا الشرط نجد :

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{k}_j}{\vec{K}_j\cdot\vec{k}_j} > 1 \tag{27}$$

وعندما تكون $\vec{v}$ و $\vec{K}_j$ متطابقتين في الاتجاه يؤول هذا

الشرط الى الشكل :

$$\vec{v} > \vec{K}_j \qquad (28)$$

اي يجب عندئذ أن يسبق المنبع الحقل الذي يشعه ·

واخيرا تمثل الحالة :

$$\frac{v\cos\theta}{K_j} = 1, \qquad (29)$$

العتبة الفاصلة بين المنطقتين السابقتين ، وتكون سرعة المنبع مساوية سرعة الاشعاع عندما $\theta = 0$ ·

باهمال التبدد ، اي بافتراض ان التواترات التي يبثها ثنائي القطب مرتبطة ارتباطا وحيد الشكل بالزاوية التي يراقب ضمنها الاشعاع الصادر يمكن اجراء مكاملة الصيغة (22) بالنسبة للمتحول ω :

لننتقل من المكاملة بالنسبة للمتحول ω الى المتحول θ بوساطة العبارة (23) ، ولنستخدم المتحول t_{-1} المعين في (19) ، فنجد أخيرا :

$$W_{j=-1} = \frac{\varepsilon_1^{1/2}\,\mu_1^{3/2}}{3\,c^3}\;\frac{p_0'^{\,2}\,\omega_0'^{\,4}\,(1-\beta^2)^3}{(1-\beta^2\varepsilon_1\mu_1)^3}. \qquad (30)$$

هذا ومن الضروري استبعاد شرط ظهور التبدد $\beta\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} > 1$ أثناء اجراء المكاملة بالنسبة للمتحول ω ، لأن التكامل يتباعد بدون هذا الاستبعاد .ويكون التباعد نتاج عدم امكانية اهمال التبدد عندئذ [9] ·

مناقشة النتائج :

١ ـ لو وضعنا في (22) و (30) $\mu_1 = 1$ ، لحصلنا على النتائج المنشورة في [9] ·

٢ ـ تعين الصيغة (22) اشعاع فافيلوف تشرينكوف ، ولو وضعنا فيها $\omega_0 = 0$ واجرينا التبديل : $p_0^2/2 = \pi_0^2$ ، المتعلق بالقيمة المتوسطة للزمن لمربع العزم،لحصلنا على النتائج المستخلصة في [2] ·

٣ – تبين النتائج المستخلصة في هذا البحث أن شنائي القطب الراهن يشع الامواج غير الاعتيادية فقط ، الموافقة قرينة الانكسار $n = n_{-1}$.

٤ – يختفي اشعاع الأمواج الكهرطيسية عندما $\omega_0 = 0$ و $\beta^2 n_{-1}^2 = 1$.

٥ – لنضع $\mu_1 = \mu_3 = 1$ في (12) ، فنجد أن قرينتي انكسار الأمواج غير الاعتيادية n_{-1} والاعتيادية n_o تأخذان على الترتيب الشكل :

$$n_{-1} = \left[\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{(\varepsilon_1 \sin^2\theta + \varepsilon_3 \cos^2\theta)}\right]^{1/2} \quad ; \qquad n_o = \varepsilon_1{}^{1/2} . \tag{31}$$

وباستخدام هذه المعطيات في علاقة دوبلر (23) نجد :

$$\left.\begin{aligned} \omega_{j=-1} &= \frac{\omega_0' \, (1-\beta^2)^{1/2}}{\left|1 - \beta\, \varepsilon_3{}^{1/2} \cos\theta \, (\sin^2\theta + s\cos^2\theta)^{-1/2}\right|} ; \\ \omega_o &= \frac{\omega_0' (1-\beta^2)^{1/2}}{\left|1 - \beta\, \varepsilon_1{}^{1/2} \cos\theta\right|} . \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

علما أن s عامل انكسار الأمواج غير الاعتيادية :

$$s = \varepsilon_3 / \varepsilon_1 \ .$$

وتعتبر جملة الصيغتين (32) من الصيغ الشهيرة لانتشار الأمواج الكهرطيسية في الاوساط المادية التي لها سماحية عازلية صرفة .

المـــــــراجـــــع :

[1] – И.М.Франк. Изв. АН СССР. Сер.физич. т.6, № I 1942.

[2] – И.М.Франк. Сбор.памяти С.И.Вавилова. Москва, 1952.

[3] – В.Л.Гинзбург –"– –"– –"– –"–

[4] – В.Я.Эйдман. Труды Горьковского исслед.физ.-тех.ин-т, сер.физич. 1956.

[5] – Balazs, N. L. *Phys. Rev.*, 104, 1220–2 , 1956 .

[6] – И.М.Франк. ЖЭТФ. 36 , 823 , 1959 .

[7] – И.М.Франк. ЖЭТФ, 38 , 1751 , 1960 .

[8] – Дж.Джелли. Черенковское излучение, И.Л., 1960.

[9] – К.А.Барсуков. Докторская диссертация. Пед. институт им.Ленина, 1967.

[10] – К.А.Барсуков. Канд.диссертация. Пед.ин. им.Ленина, 1960

[11] – *Khan . T. P.* J. PHYS. A: GEN. PHYS., VOL. 3. PRINTED IN GREAT BRITAIN , 1970.

[12] – А.Б.Куканов,Б.Д.Ориса, В.И.Бурлаков. Вест.МГУ, физ.-астр № I, 1973 .

[13] – А. Г. Ситенко и А. А. Коломенский. ЖЭТФ, 30, 511, 1956.

[14] – А.Б.Куканов. Изв. вузов, физика. № I, 47, 1970.