رمضان ١٤٠٣هـ
حزيران ١٩٨٣م
مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية
مجلد ٦ العدد ٢ من ٢٠ الى ٣٤

د . محمد الهوشي
كلية العلوم

أفتومرفيزمات سطح تآلفي مكعب

ليكن V و V' كثيري صور فوق الحقل K و $f : V \longrightarrow V'$ تطبيقا birational . قد لايكون f معينا في جميع نقاط V . نسمي كل مخطط تبديلي من الشكل

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ V \arrow[rr, "f"] & & V' \end{tikzcd}$$

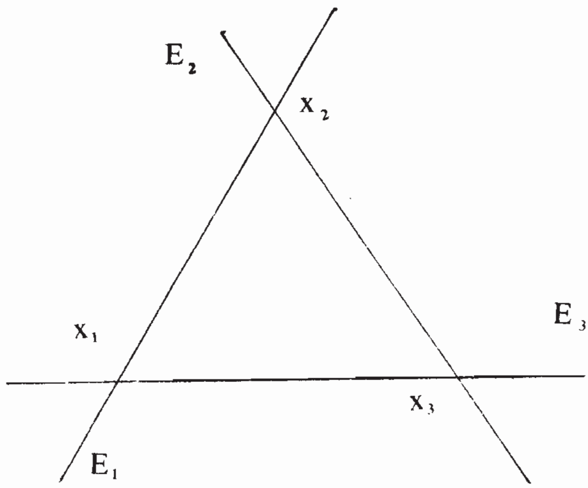
حلا لعدم تعيين f ، حيث g و h مرفيزمان و g (birational) . ليكن P^3 فراغا اسقاطيا ثلاثي البعد فوق الحقل المغلق جبريا K, $V \subseteq P^3$ سطحا مكعبا . من أجل كل نقطة بسيطة x من V نعرف التطبيق

$$t_x : V \longrightarrow V$$

كما يلي : صورة النقطة $Y \in V$ بالنسبة الى t_x هي نقطة التقاطع الثالثة للمستقيم المار من x و y مع السطح V .

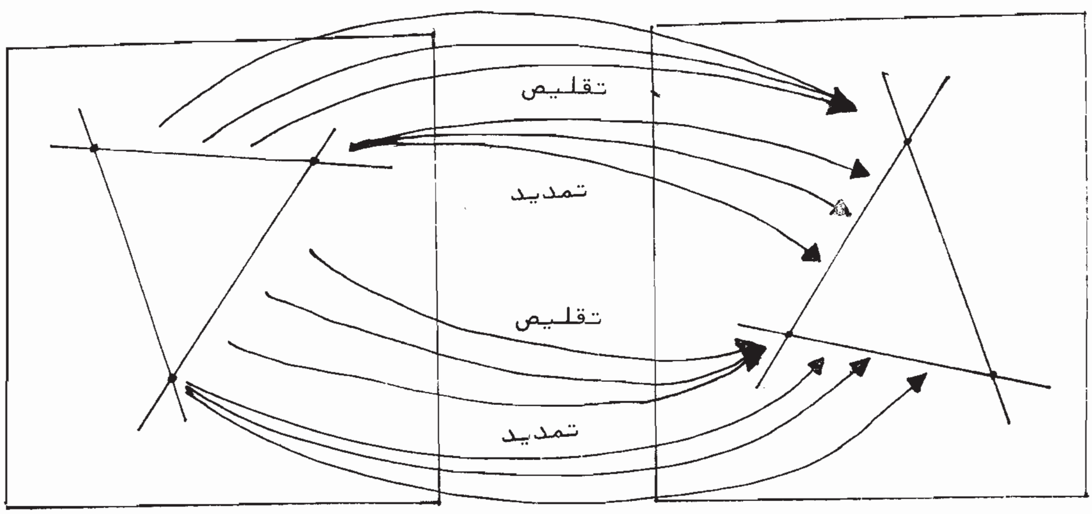
لنفرض الآن أن V سطح مكعب تقع عليه ثلاثة مستقيمات E_1, E_2 و E_3 لاتحوي نقاطا خاصة من السطح V , متقاطعة كما في الشكل الجانبي

نأخذ $t_i = t_{x_i}$ ، $i = 1\ ,\ 2\ ,\ 3$.
نلاحظ أن t_i غير معين
في النقطة x_i .
لتكن G الزمرة
المولدة بالتطبيقات
$t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3$.
لقد برهنا في [1] ان
G هي الجداء الحر
للزمر الجزئية
$[t_1]\ ,[t_2]\ ,[t_3]$
حيث أن $t_i^2 = 1$
آي أن $[t_i] \simeq \mathbb{Z}_2$.



الشكل (١)

لنتأمل الشكل التالي والذي يساعدنا على فهم تعبيرين سوف نستخدمهما في هذا العمل :



الشكل (2)

لتكن H زمرة كل التطبيقات (birational) $V \longrightarrow V$

والثنامنتظمة (biregular) خارج $\bigcup_{i=1}^{3} E_i$ ان ماتريده في

هذا العمل هو برهان النظرية التالية :

نظرية . الزمرة H مولدة بالزمرة G وبالزمرة W ، حيث

ان W هي زمرة الأفتومرفيزمات الاسقاطية لـ V

تلزمنا النظرية المساعدة التالية :

نظرية مساعدة 1 . ليكن $f \in H$ عنصرا كيفيا لحل عدم

تعيين f يكفي تمديد نقاط تقاطع المستقيمات (أي المركبات غير القابلة

للتحليل للصورة العكسية لـ $\bigcup_{i=1}^{3} E_i$)

البرهان : بما أن التطبيق f ثنامنتظم جارج $\bigcup_{i=1}^{3} E_i$

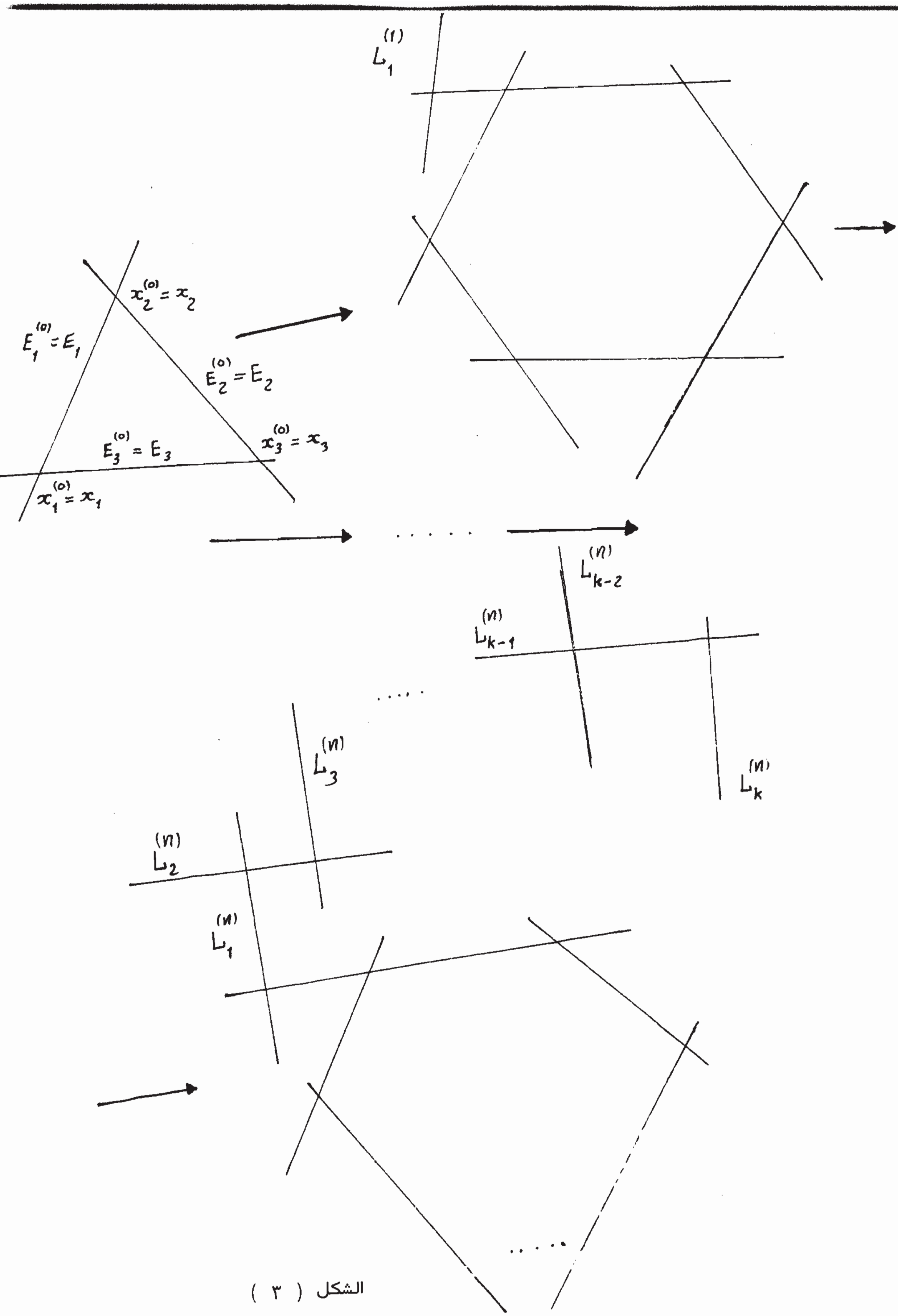
فان نقاط عدم تعيين f تقع على $\bigcup E_i$. ومعنى ذلك اننا

يجب أن نمدد النقاط الواقعة على المستقيمات E_i فقط او النقاط

الواقعة فوقها . لنفرض أننا مددنا نقطة ليست نقطة تقاطع مستقيمين

عند اجراء عمليات التمديد التالية . عند ذلك نحصل على المخطط

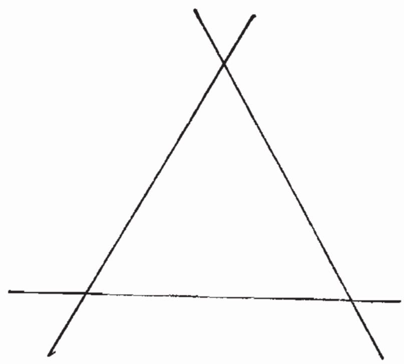
التالي :



$L_1^{(1)}$
$x_2^{(0)} = x_2$
$E_1^{(0)} = E_1$
$E_2^{(0)} = E_2$
$E_3^{(0)} = E_3$
$x_3^{(0)} = x_3$
$x_1^{(0)} = x_1$
$L_{k-2}^{(n)}$
$L_{k-1}^{(n)}$
$L_3^{(n)}$
$L_k^{(n)}$
$L_2^{(n)}$
$L_1^{(n)}$

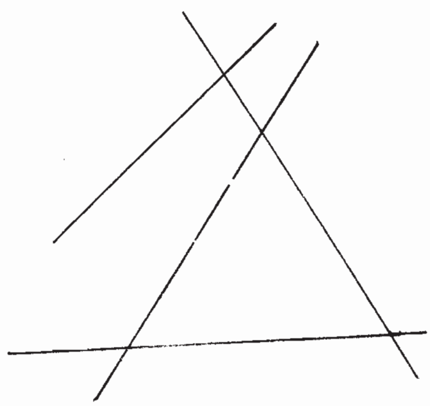
الشكل (٣)

هذا المخطط يجب ان يتحول في نهاية التقليص الى المخطط التالي :



الشكل (4)

لنفرض أن $L_k^{(n)}$ لايتقلص • عندئذ نحصل ، في نهاية التقليص على المخطط التالي :



الشكل (5)

والذي يختلف عن المخطط (4) • وهذا يعني ان $L_k^{(n)}$ يجب أن يتقلص ، ولكن كان من غير الضروري تمديده • اذن ، عند التمديد

الأصغري يكفي تمديد نقاط تقاطع المستقيمات .

وهـــو المطلـــوب

على الرغم من أن التطبيق $f : V^{(0)} \longrightarrow V^{(0)}$ يمكن أن يكون معينا في بعض نقاط تقاطع مستقيمات ، الا اننا سنبني حـــلا خاصا ، في كل مستوى من مستوياته سنمدد جميع نقاط التقاطع .

لنفرض أن المخطط

$$\begin{tikzcd}
 & & & & V^{(n)} \arrow[dl, "g_n"'] \arrow[dr, "h_{m+1}"] & & & & \\
 & & & V^{(n-1)} \arrow[dl, "g_{n-1}"'] & & \bar{V}^{(m)} \arrow[dr, "h_m"] & & & \\
 & & \cdots \arrow[dl, "g_2"'] & & & & \cdots \arrow[dr, "h_2"] & & \\
 & V^{(1)} \arrow[dl, "g_1"'] & & & & & & \bar{V}^{(1)} \arrow[dr, "h_1"] & \\
 V^{(0)} \arrow[rrrrrrrr, "f"] & & & & & & & & \bar{V}^{(0)}
\end{tikzcd}$$

الشكل (٦)

هو مخطط حل عدم تعيين عنصر ما $f \ni H$ حيث أن $V^{(1)}$

ينتج من $V^{(o)}$ بتمديد النقاط $x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, x_3^{(o)}, V^{(2)}$

ينتج من $V^{(1)}$ بتمديد النقاط الست الواقعة على تقاطع المستقيمات الست الواقعة على $V^{(1)}, \ldots$ وبشكل عام ، $V^{(i)}$ ينتج من $V^{(i-1)}$ بتمديد نقاط تقاطع المستقيمات على $V^{(i-1)}$ وعددها يساوي 3.2^{i-1} .

أما $\bar{V}^{(1)}$ فينتج من $V^{(o)}$ بتمديد نقطة واحدة فقط من نقاط تقاطع المستقيمات على $V^{(o)}$, $x_j^{(o)}$ مثلا ، $\bar{V}^{(2)}$ ينتج من $V^{(1)}$ بتمديد نقطتين تقعان على تقاطع مستقيمين يقعان فوق $x_j^{(o)}, \ldots$ وبشكل عام ، $\bar{V}^{(i)}$ ينتج من $V^{(i-1)}$ بتمديد 2^{i-1} نقطة من نقاط تقاطع مستقيمات تقع فوق $x_j^{(o)}$. واخيرا ، $\bar{V}^{(i)}$ ينتج من $V^{(i-1)}$ بتمديد 2^{i-1} نقطة من نقاط تقاطع مستقيمات تقع فوق $x_j^{(o)}$. يجب أن نلاحظ أن h_j يقلص مستقيما واحدا .

اذن ، على $V^{(i)}\ldots, i=0, 1,2,$ يوجد 3.2^{i} مستقيما $E_a^{(i)}$, $a=1,2, \ldots, 3.2^{i}$ ، متقاطعة بشكل دوري . نرمز لنقطة تقاطع المستقيمين $E_{a-1}^{(i)}$ و $E_a^{(i)}$ بالرمز $x_a^{(i)}$.

اذا تقلصت جميع المستقيمات $g_n^{-1}(x_a^{(n-1)})$ عند التقليص

$$V^{(n)} \longrightarrow \bar{V}^{(m)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bar{V}^{(1)}$$

فاننا نسمي هذه التقليصات وكذلك التمديد $V^{(n)} \longrightarrow V^{(n-1)}$ زائدة . في كل ما سيأتي ، عندما نتكم عن مخطط حل عدم تعيين f ، نعني بذلك المخطط (6) والذي لايحوي تقليصات او تمديدات اضافية .

اذا كان الأمر كذلك ، فان العدد n يسمى ارتفاع f

ويرمز له بالرمز $h(f)$.

نلاحظ أن بعضا من المستقيمات $g_n^{-1}(x_a^{(n-1)})$ سيتقلص بالتأكيد

لأن التقليص يبدأ بالمستقيمات التي دليل تقاطعها الذاتي يساوي -1 ،

وعلى $V^{(n)}$ لاتوجد مستقيمات بهذه الشروط غير $g^{-1}(x_a^{(n-1)})$

ان برهان النظرية المطلوبة يعتمد كليا على النظرية المساعدة التالية والتي سندعوها نظرية مساعدة أساسية . برهان هذه النظرية سنورده فيما بعد .

نظرية مساعدة 2 . ليكن $f \in H$ عنصرا كيفيا و $o < h(f)$. عندئذ يوجد العنصر t_{i_j} من G بحيث يكون

$h(t_{i_j} f) < h(f)$, $i_j = 1,2,3$.

نتيجة 1 $h(f)=0 \Leftrightarrow f \in W$

نتيجة 2 $h(f)=1 \Rightarrow f = t_{i_j}$, $i_j = 1,2,3$.

برهان النظرية . لنفرض أن النظرية غير صحيحة ، أي لنفرض أن H لاتساوي الرمزة المولدة بـ G و W ليكن $f \in H$ حيث أن $h(f)$ أصغري و f لاينتمي الى الزمرة المولدة بـ G و W من الواضح أن $0 < h(f)$ بحسب النتيجة 1 وبالتالي ، بحسب النظرية المساعدة 2 ، يوجد t_{i_j} من G بحيث يكون $t_{i_j} f \in H$ و

$$h(t_{i_j} f) < h(f)$$

وهذا يناقض اختيار f لان f و $t_{i_j} f$ لاينتميان الىالرمزة الجزئية المولدة بـ G و W .

بقي أن نبرهن النظرية المساعدة 2 .

لتكن $E_a^{(n)}$, $E_b^{(n)}$, $E_c^{(n)}$ مستقيمات على $V^{(n)}$ لاتتقلص عند التقليص $\bar{h}: V^{(n)} \longrightarrow \bar{V}^{(o)}$. لنفرض أن أدلة التقاطع الذاتي لهذه المستقيمات هي :

$$(E_c^{(n)} \cdot E_c^{(n)}) = \gamma \quad , \quad (E_b^{(n)} \cdot E_b^{(n)}) = \beta \,،\, (E_a^{(n)} \cdot E_a^{(n)}) = \alpha$$

بما أنه لايوجد ، في المخطط 6)، تمديدات اضافية ، فان باستطاعتنا أن نفرض α , β , γ على الاقل ، يساوي -1 .
وينتج من ذلك أنه $E_a^{(n)}$, $E_b^{(n)}$, $E_c^{(n)}$ قد ظهرت على $\bar{V}^{(n-1)}$ زائد .

لنفرض أنه عند التقليص $\bar{h}: V^{(n)} \longrightarrow \bar{V}^{(o)}$ يكون

$$\bar{h}(E_c^{(n)}) = \bar{E}_3^{(o)} \quad , \quad \bar{h}(E_b^{(n)}) = \bar{E}_2^{(o)} \quad \bar{h}(E_a^{(n)}) = \bar{E}_1^{(o)}$$

نرتب الاعداد α , β , γ بالشكل $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant -1$.

لنتأمل الحالات الثلاث التالية :

I جميع الاعداد α , β , γ متساوية ،

II اثنان فقط من الاعداد α , β , γ متساويان ،

III جميع الاعداد α , β , γ مختلفة .

فرضية 1 . اذا كان $\gamma = \beta = \alpha$ فان

(1) $\gamma = \beta = \alpha = -1$ ؛

(2) $n = 0$ ؛

(3) f من W .

البرهان . (1) واضح جدا . من أجل برهان (2) نلاحظ أنه اذا كان $n > 0$ ، فان كل مستقيم من المستقيمات $E_a^{(n)}$, $E_b^{(n)}$, $E_c^{(n)}$

يتقاطع مع مستقيم دليل تقاطعه الذاتي -3 هذا المستقيم يجب أن يتقلص ، ولكن عندئذ ، في نهاية التقليص نحصل على $0 < (\bar{E}_i^{(o)} . \bar{E}_i^{(o)})$ على $\bar{V}^{(o)}$ ، مما يناقض المساواة $(\bar{E}^{(o)} . \dot{\bar{E}}^{(o)}) = -1$ ، $i = 1 , 2 , 3$. هذا التناقض يبرهن (2) . لنفرض الآن أن $n = 0$ عندئذ لاحاجة الى تمديد أي شيء وهذا يعني أن f شنامنتظم على $V^{(o)}$ كله أي أن f من W

وهو المطلوب

فرضية 2 . لنفرض أن $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. اذا كان اثنان من الأعداد α , β , γ متساويين ، فان

(1) $\alpha = -1$ و $\beta = \gamma = -3$ ،

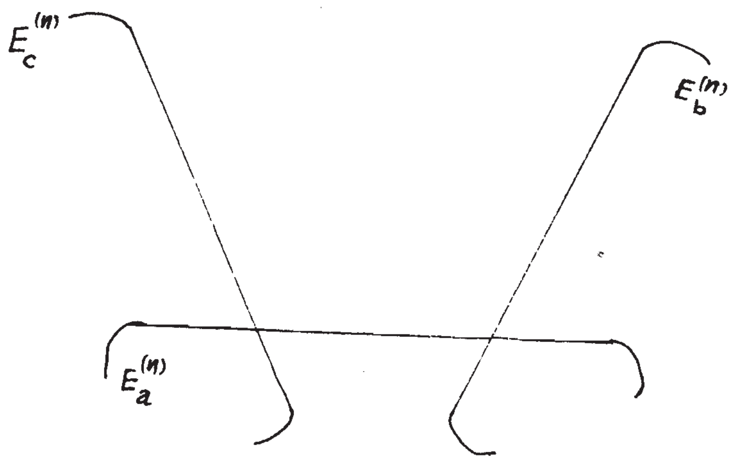
(2) $n = 1$ ،

(3) $f = t_i$, $i = 1,2,3$.

البرهان . (1) : بما أن

$$(E_a^{(n)} . E_a^{(n)}) = (\bar{h} \ (\bar{E}_a^{(n)}) \ . \ \bar{h}(\bar{E}_a^{(n)})) = (\bar{E}_1^{(o)} . \bar{E}_1^{(o)}) =$$

فان المستقيمين المجاورين للمستقيم $E_a^{(n)}$ لايتقلصان . اذن ، أحدهما هو $E_b^{(n)}$ والآخر هو $E_c^{(n)}$ ، أي أن المستقيمات $E_a^{(n)}$, $E_b^{(n)}$, $E_c^{(n)}$ متوضعة على السطح $V^{(n)}$ كما هو موضح في الشكل :



شكل (7)

من أجل كل مستقيم $V^{(n)} \supseteq E_m^{(n)}$ ، دليل تقاطعه الذاتي

1- ، تكون احدى المساواتين $(E_{m-1}^{(n)} \cdot E_{m-1}^{(n)}) = (E_{m+1}^{(n)} \cdot E_{m+1}^{(n)}) = -3$
صحيحة . وهذا يعني أن احدى المساواتين $(E_b^{(n)} \cdot E_b^{(n)}) = -3$ او
$(E_c^{(n)} \cdot E_c^{(n)}) = -3$ صحيحة . بما أن $\beta = \gamma$ فان $\beta = \gamma = -3$

(2) بما أن $\beta = \gamma = -3$ بحسب القسم الأول ، فان المستقيمين $E_b^{(n)}$ و $E_c^{(n)}$ قد ظهرا على $V^{(n-1)}$ وينتج من ذلك أن

$$-1 = (g_n(E_b^{(n)}) \cdot g_n(E_b^{(n)})) = (g_n(E_c^{(n)}) \cdot g_n(E_c^{(n)}))$$

وان $g_n(E_b^{(n)})$ و $g_n(E_c^{(n)})$ يتقاطعان . وهذا محقق فقط
على $V^{(0)}$. اذن $n-1 = 0$ او $n = 1$.

(3) من النتيجة 2 من النظرية المساعدة 2 ، نجد أن f
يتطابق مع أحد التطبيقات t_i ، $i = 1,2,3$. وهو المطلوب

لنفرض الآن أن α , β , γ كلها مختلفة . نعلم أنه توجد ثلاثة مستقيمات على $V^{(n)}$ هي $E^{(n)}_{3.2^n}, E^{(n)}_{2^{n}+1}, E^{(n)}_{2^n}$ ، دليل التقاطع الذاتي لكل منها أصغري ويساوي $-(2n+1)$ وبذلك تنقسم المستقيمات $E^{(n)}_i, i=1,2,\ldots,3.2^n$ الى ثلاثة أقسام . بما أن المستقيمات $E^{(n)}_a, E^{(n)}_b, E^{(n)}_c$ متجاورة فبأمكاننا الفرض بأنها تقع بين $E^{(n)}_{3.2^n}$ و $E^{(n)}_{2^n}$. وهذا يعني أن $E^{(n)}_a, E^{(n)}_b, E^{(n)}_c$ تنتج من تمديد ثلاث نقاط تقع فوق $x^{(o)}_1$ في هذه الحالة نريد أن نبرهن أن $h(t_1 f) < h(f)$. من أجل ذلك نبرهن أن البرج الأيسر في المخطط (6) هو جزء من حل $t_1 . f$ ولكن التمديد الأخير $V^{(n-1)} \longleftarrow V^{(n)}$ زائد في حل $t_1 f$.

لنتأمل المخطط التالي :

$$\begin{tikzcd}
 & & V^{(n)} \arrow[dl, "g_n"'] \arrow[dd, "h"] \arrow[ddddrr, "\bar{h}"] & & \\
 & V^{(n-1)} \arrow[d, "g_{n-1}"'] & & & \\
 & \vdots \arrow[dl, "g_2"'] & \tilde{V}^{(1)} \arrow[dd, "h_1"] \arrow[ddrr, "\tilde{t}_1"] & & \\
V^{(1)} \arrow[d, "g_1"'] & & & & \\
V^{(o)} \arrow[rr, "f"'] \arrow[uurr, "\tilde{f}"] & & \tilde{V}^{(o)} \arrow[rr, "t_1"'] & & \tilde{V}^{(o)} = V^{(o)}
\end{tikzcd}$$

شكل (8)

ينتج المخطط (8) من المخطط (6) كما يلي :

$\bar{f}$ و $\bar{h}$ يتعينان من كون المخطط تبديليا . $\bar{t}_1$ هو تقليص الصورة العكسية لـ $\bar{E}_1^{(o)}$. ان صورة $\bar{t}_1$ هي $\bar{V}^{(o)}$ بحسب البنية المعروفة لحل عدم تعيين t_1 ، اذا فرضنا أن h_1 هو تمديد النقطة المقابلة للمستقيم $\bar{E}_1^{(o)}$. لهذا السبب يكون $\bar{t}_1\bar{f} = t_1 f$. ويتضح من ذلك أن ($\bar{h}$, $g_1 o \dots o g_n$) هو حل لعدم تعيين $t_1 f$. وفي الوقت ذاته يكون g_n تمديدا زائدا في هذا الحل ، لأن المنحني الوحيد الذي لم يتقلص مسبقا على $V^{(n)}$ ، والذي دليل تقاطعه الذاتي

1- يتقلص الآن (بالتطبيق $\bar{t}_1$ في النهاية) .

اذا كان $E_a^{(n)}$ وقعا بين $E_{2n}^{(n)}$ و $E_{2n+1}^{(n)}$ او بين $E_{2n+1}^{(n)}$ ، $E_{3.2n}^{(n)}$ فاننا نحصل بالطريقة نفسها على أن $h(t_2 f) < h(f)$ أو $h(t_3 f) < h(f)$ على الترتيب .

الزمرة المولدة بالتطبيقات t_i .