مجلــة جامعــة تشرين للدراســات والبحــوث العلمية
المجلــد ٥ - العــدد ٤ مــن ٨١ إلــى ٨٨
ربيع الأول ١٤٠٣هـ
كانون الأول ١٩٨٢م

حول الانسحابات المثقلة

(Weighted Shifts)

الدكتور عهد كفى
كلية العلوم

* * * *
* *
*

حول الانسحابات المثقلة

(Weighted Shifts)

مقدمة :

لم تعد أهمية الدور الذي تتمتع به الانسحابات المثقلة خافية على أحد من أولئك الذين يعنون بدراسة وتطوير نظرية المؤثرات الخطية ، إذ أنها غالباً ما تكون الأمثلة ، والأمثلة المعاكسة الهادفة لتوضيح مختلف خواص المؤثرات الخطية .

نعرض في مقالنا هذا بعضاً من خواص هذه المؤثرات . فنبرهن على سبيل المثال ، ان الانسحاب المثقل لا يمكن أن يكتب على شكل مجموع مؤثرين ، أحدهما متراص Compact ، والآخر عادي Normal كما نبرهن على انه إذا كانت(S_n) متتالية متقاربة من الانسحابات المثقلة ، فإن نهايتها هي انسحاب مثقل . نعرض في هذا المجال مسألة مفتوحة لم تعرف حتى الآن حلاً .

تعاريف :

ليكن S مؤثراً خطياً على فراغ هيلبرت Hilbert العقدي اللامتناهي الأبعاد H . نقول عن S أنه انسحاب مثقل « Weighted Shift » . اذا وجدت قاعدة أورتونورمال « Orthonormal »(e_n) في H ، ومتتالية(α_n) من الأعداد العقدية ، بحيث يكون :

$$Se_n = \alpha_{n+1} e_{n+1} , n = 0 - 1 , - 2 , \dots$$

ونقول عن S أنه انسحاب مثقل أحادي الجانب Unilatéral ، إذا كانت مجموعة أدلة عناصر(e_n) مساوية لـ Z^+ (مجموعة الأعداد الطبيعية بما فيها الصفر) . وعندئذ تكون مجموعة أدلة حدود(α_n) مسامية لـ $Z^+ - \{o\}$.

كما نقول عن S أنه انسحاب مثقل ثنائي الجانب Bilatéral . إذا كانت مجموعة أدلة عناصر كل من (e_n) و (α_n) مساوية لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة بما فيها الصفر Z .

فيما يلي سنرمز بـ S . . .ـ حصراًـ للانسحاب المثقل الأحادي الجانب .

إن المؤثر المرافق Opérateur Adjoint لـ S, S^* يُعرّف بالعلاقتين :

$$S^* e_n = \bar{\alpha}_n e_{n-1} \quad n \geq 1$$

$$S^* e_0 = 0$$

سنفرض منذ الآن ان $\alpha_n \geq 0$ ، أي ان جميع حدود المتتالية (α_n) حقيقية غير سالبة ، حيث ان هذه الفرضية لن تفقد نتائجنا شيئاً من عموميتها [2] .

I . الانسحابات المثقلة والمؤثرات المتراصة .

نظرية (١ - ١)

إذا كان S انسحاباً مثقلاً ، بحيث تكون $\lim_n \alpha_n = \alpha \neq 0$ ، عندئذ لا يمكن ان يكتب S على الشكل :

$$S = N + K$$

حيث N مؤثر عادي ، و K مؤثر متراص .

البرهان :

لنفرض ان $S = N + K$ ، حيث N عادي ، و K متراص .

لدينا :

$$S^* S = N^* N + K'$$

حيث :

$$K' = N^* K + K^* N + K^* K$$

ولكن :

$$(S^* S) e_n = \alpha^2_{n+1} e_n$$

ينتج أن طيف Spectre المؤثر S^*S ، $\sigma(S^*S)$ يكون مساوياً للمجموعة :

$$\{\alpha^2_1, \alpha^2_2, \ldots,\} \cup \{\alpha^2\}$$

من نظرية WEYL [3] ينتج انه مهما تكن λ من $\sigma(N^*N)$ ، حيث λ ليست قيمة مميزة Valeur Propre للمؤثر S^*S ، فإن λ قيمة مميزة للمؤثر N^*N .

من جهة أخرى ، لدينا :

$$\sigma(S) = \{z : |z| \leq \alpha\}$$

كما أن مجموعة القيم المميزة للمؤثر S ، هي إما خالية وذلك عندما تكون حدود المتتالية (α_n) موجبة تماماً ، وإما مساوية للمجموعة $\{o\}$. عندما يكون أحد حدود المتتالية مساوياً للصفر .

ينتج ان $\sigma(N)$ «موديلو» Modulo المجموعات القابلة للتعداد يساوي المجموعة :

$$\{z : || \alpha\} \qquad \{z : |z| \leq \alpha\}$$

وبالتالي يكون $\sigma(N^*N)$ «موديلو» المجموعات القابلة للتعداد يساوي :

$$[o, \alpha^2]$$

مما يناقض حقيقة كون مجموعة القيم المميزة للمؤثر (N^*N) قابلة للتعداد . ينتج أن الكتابة :

$S = N + K$ ، مستحيلة ، وهو المطلوب .

نتيجة (١ ـ ١)

ضمن فرضيات النظرية السابقة ، يمثل S مثالاً معاكساً على أن كل مؤثر من النوع Essentiellement Normal لا يمكن ان يكتب على شكل مجموع مؤثرين : عادي ومتراص .

في الواقع ، لدينا :

$$(S^*S - SS^*)\, e_n = (\alpha^2_{n+1} - \alpha^2_n)\, e_n$$

وبالتالي فإن المؤثر $SS^* - SS^*$ متراص ، لأن $\alpha^2_{n+1} - \alpha^2_n \xrightarrow[n \to \infty]{} o$ ، أي ان S هو من النوع Essentiellement Normal .

النظرية التالية تحدد العلاقة بين $\sigma_p(S^*)$, $\sigma_p(S^*+K)$ ، حيث نرمز هنـا بـ$\sigma_p(A)$ لمجموعة القيم المميزة للمؤثر A ، وحيث K مؤثر متراص .

نظرية : (١ - ٢)

إذا كان S انسحاباً مثقلاً ، بحيث تكون $\lim \alpha_n = \alpha \neq 0$ و $\alpha_n \leq \alpha$ ، من أجـل $n = 1,2,\ldots$ ، عندئذ

$$\sigma_p(S^*) \subseteq \sigma_p(S^*+K)$$

البرهان :

لدينا :

$$\sigma_p(S^*) = \{\lambda : |\lambda| < \alpha\}$$

لنفرض ان :

$$\beta \in \sigma_p(S^*)$$

بما أن :

$$Se_n = \alpha_{n+1} e_{n+1} = \alpha e_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha) e_{n+1}$$

إذن :

$$S = \alpha U_+ + K_1$$

حيث K_1 انســحاب مثقل متراص (لأن $\alpha_n - \alpha \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$) ، و U_+ الانسحاب الأحادي الجانب محلي H .

بما ان $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ ، إذن :

$$\frac{\beta}{\alpha} \in \sigma_p\left(U_+^* + \frac{K_1^*}{\alpha} + \frac{K}{\alpha}\right)$$

ينتج أن :

$$\beta \in \sigma_p(\alpha U_+^* + K_1^* + K) = \sigma_p(S^* + K)$$

وهو المطلوب .

II - متتاليات الانسحابات المثقلة

لتكن (S_n) متتالية من الانسحابات المثقلة ، معرفة بالعلاقة :

$$S_n e_i = \alpha^{(n)}_{i+1} e_{i+1}$$

نظرية (٢ - ١)

إذا كانت $\alpha^{(n)}_i \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda_i$ ، من أجل $i = 1,2,\ldots$ ، فإن (S_n) تتقارب من الانسحاب المثقل S المعرف بالعلاقة :

$$Se_i = \lambda_{i+1} e_{i+1}$$

البرهان :

ليكن $f = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i e_i \in H$. مهما يكن $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد صحيح موجب ν بحيث يكون :

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{\nu} \beta_i e_i \right\| < \varepsilon$$

لنضع $g = \sum_{i=0}^{\nu} \beta_i e_i$ ، عندئذ لدينا :

$$\|(S_n - S)g\|^2 = \sum_{i=0}^{\nu} |\beta_i|^2 \left|\alpha^{(n)}_{i+1} - \lambda_{i+1}\right|^2 < \delta^2 \|g\|^2$$

وذالك من أجل n كبير بالقدر المناسب ينتج أن :

$$S_n g \xrightarrow[n \to \infty]{} Sg$$

وبالتالي يكون :

$$\|(S_n - S)f\| \leq \|(S_n - S)g\| + \|S(f-g)\| + \|S(f-g)\| + \|S_n(f-g)\|$$

مما يبرهن على ان $S_n f \xrightarrow[n \to \infty]{} Sf$. وهو المطلوب .

نتيجة (٢ - ١)

إذا كانت (S_n) متقاربة من A ، فإن A يكون الانسحاب مثقلاً .

إن A ، في الواقع ، هو المؤثر المعرف بالعلاقة :

$$Ae_i = (\lim_n \alpha^{(n)}_{i+1})\, e_{i+1}$$

نتيجة (٢ ـ ٢)

إن مجموعة الانسحابات المثقلة مغلقة بالنسبة لتوبولوجيا النظيم $\|\ \|$.

مسألة مفتوحة :

لتكن (α_n) متتالية من الأعداد العقدية ، حيث $\lambda \geqslant |\alpha_n|$ ، من اجل $n = 1,2,\ldots$ ، ولنعتبر مجموعة الانسحابات المثقلة S على H حيث :

$$Se_n = \alpha_{n+1} e_{n+1}$$

وذلك من أجل كل القواعد «الأورتونورمال» في H .

إن لصاقة مجموعة الانسحابات المثقلة السابقة بالنسبة لتوبولوجيا النظيم $\|\ \|$ ، لا تزال غير معروفة [2] .

المراجع :

[1] H . BEHNCKE , Structure Of Certain Nonnormal Operators .

J . Math . Mich . Vol 18 (1968) , P 103__ 107

[2] P . R . HALMOS . Limits Of Shifts .

Acta . Sci . Math . Vol 32 , (1973) , P 131__ 139

[3] P . R . HALMOS . Hilbert Space Problem Book

Springer - Verlag , New - York

[4] A . L . SHEILDS . Weighted Shifts Operators And Analytic Function Theory .

Math . Survey A . M . S , N° 13 (1974) , P 51__ 128

[5] J . P . WILLIAMS & RADJAVI . Product Of Self - Adjoint Operators

Mich . Math . J , Vol 16 (1969) P 177__ 185