مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية
المجلد ٥ ـ العدد ٣ من ٤٩ إلى ٥٦

ذي القعدة ١٤٠٣هـ
ايلول ١٩٨٣م

طريقة جديدة لحل مسألة تصفير الوقود للمراكب الفضائية للإلتقاء بمحطة الأقمار الصناعية :

الدكتور
محمود شاهين عثمان
كلية العلوم

١ ـ مقدمة : اهتم المؤلفون [١] ـ [٣] . بهذه المسألة والتي تتطلب ايجاد الحل الأمثل للتوجيه عند وجود الشروط الخطية على شعاع التوجيه وإعطاء نقطتي البدء والنهاية .

إن الصعوبة الأساسية في هذه المسألة تكمن في ضخامتها . حيث الطرق الكلاسيكية في البرمجة الخطية تصبح غير مجدية .

في [١] استعمل المؤلف طريقة سيمبلكس . في [٢] ـ [٣] استنتج المؤلفان حل المسألة الأساسية من حل البرنامج المرافق لها .

في الحقيقة إن مسألة تصفير الوقود يمكن صياغتها كمسألة من مسائل البرمجة الخطية تحتوي على $(n + 2mT)$ شرطاً . حيث n و m أبعاد أشعة المكان والتوجيه على الترتيب . أما T فهو عدد الخطوات للوصول إلى نقطة النهاية . في هذه المقالة وضعت طريقة جديدة لحل هذه المسألة . حيث خفضت الشروط من $(n + 2mT)$ شرطاً إلى n شرطاً ، وبذلك أصبحت المسألة أقل حجما ، وأسهل حلا .

٢ ـ نص المسألة :

المطلوب ايجاد الشعاع U(t) والذي يحقق .

$$J(U) = \sum_{t=0}^{T-1} C_t \, / \, U(t) \, / = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{m} C_{ti} \, / \, U_i(t) \, / \longrightarrow \min \qquad / 1 /$$

مع وجود الشروط التالية :

$$X(t+1) = AX(t) + Bu(t) \qquad / 2 /$$

$$X(0) = X_0 , X(T) = X_T \qquad / 3 /$$

$$/ U(t) / \leq a_t \longrightarrow / U_i(t) / \leq a_{ti} \qquad /4/$$

حيث $n(t) \in R^n$ هو شعاع المكان و $U(t) \in R^m$ هو شعاع التوجيه $A \in R^{n.n}$. $B \in R^{n.m}$ مصفوفات ثابتة $n_T , n_0 \in R^n$ (نقطتي البدء والنهاية) والمسألة تتطلب ايجاد التوجيه

$\{ U_{(0)}, U_{(1)}, \ldots U_{(T-1)} \}$

والمسار الموافق لهذا التوجيه $\{ X_{(0)}, X_{(1)}, \ldots X_{(T)} \}$

حتى يصبح التابع (١) أصغريا

٣ ـ حل المسألة

لنرمز بـ

$$R = [\ A^{T-1}B \mid \dots \mid AB \mid B\ ] \in R^{n.mT},$$

$$\eta = x_T - A^T x_0$$

$$U = [\ u'(0) \mid u'(1) \mid \dots \mid u'(T-1)\ ]' =$$

$$= [\ u_1(0), \dots u_m(0), \dots, u_1(T-1) \dots u_m(T-1)\ ]' \in R^{mT},$$

$$C = [\ C_0' \mid C_1' \mid \dots \mid C_{T-1}'\ ]' =$$

$$= [\ C_{01}, \dots C_{0m}, \dots C_{T-1,1}, \dots C_{T-1,m}\ ]' =$$

$$= [\ c_1, \dots c_m, \dots c_{m(T-1)+1}, \dots c_{mT}\ ]' \in R^{mT},$$

$$a = [\ a_0' \mid a_1' \mid \dots \mid a_{T-1}'\ ]' =$$

$$= [\ a_{01}, \dots a_{0m}, \dots a_{T-1,1}, \dots a_{T-1,m}\ ]' =$$

$$= [\ \alpha_1, \dots \alpha_m, \dots \alpha_{m(T-1)+1}, \dots \alpha_{mT}\ ]' \in R^{mT}$$

الشعاع U ممكن أن يجزأ إلى شعاعين موجبين $V, W \in R^{mT}$ بالشكل التالي

$$U = V - W \qquad / 5 /$$

$$|U| = V + W$$

وباستعمال / 5 / يمكن أن تصاغ المسألة / 4 /ـ/ 1 / بالصيغة المكافئة التالية

$$\hat{J}(V,W) = C'(V+W) = \sum_{K=1}^{mT} c_k(V_k + W_k), \qquad / 6 /$$

$$RV - RW = \eta \qquad / 7 /$$

$$0 \leq V \leq a \qquad / 8 /$$

$$0 \leq W \leq a. \qquad / 9 /$$

نرمز بـ

نرمز بـ

$$z = \frac{V}{W} \in R^{2mT}, \quad D = [\ R \mid -R\ ] \in R^{n.mT},$$

$$b = \begin{bmatrix} 1_{mT} \\ 1_{mT} \end{bmatrix}' \in R^{2mT}, \quad \beta = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \in R^{2mT}.$$

إذن يمكن صياغة المسألة / 9 /-/ 6 / بالشكل التالي

$$\tilde{J}(z) = b'z \longrightarrow \min. \qquad / 10 /$$

$$Dz = \eta \qquad / 11 /$$

$$0 \leq z \leq \beta \qquad / 12 /$$

المسألة / 12 /-/ 10 / هي من مسائل البرمجة الخطية وكلها يمكن استعمال طريقة سيمبلكس

٤ ـ المسألة بشكلها العام مع وجود الشروط المحدودة من طرفين على شعاع التوجيه والمكان .

ليكن

$$I(u)=\sum_{t=0}^{T-1}(d_t'x(t)+C_t'u(t))= \qquad /13/$$

$$=\sum_{t=0}^{T-1}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ti}u_i(t)+\sum_{i=1}^{n}d_{ti}x_i(t)\right)\longrightarrow\min,$$

مع وجود الشروط / 2 / و / 3 /

$$0\leq \underline{u}_t\leq u(t)\leq \bar{u}_t, \qquad /14/$$

$$0\leq \underline{x}_t\leq x(t)\leq \bar{x}_t,$$

$$\underline{u}_t,\bar{u}_t\in\mathbb{R}^m;\ \underline{x}_t,\bar{x}_t\in\mathbb{R}^n,\ \underline{u}_t\leq\bar{u}_t,\ \underline{x}_t\leq\bar{x}_t$$

لنرمز بـ

$$e=[d_1'|\dots|d_{T-1}'|c_0'|\dots|c_{T-1}']'=$$

$$[e_1,\dots,e_{n(T-1)+mT}]'\in\mathbb{R}^{n(T-1)+mT}$$

$$Y=[x'(1)|\dots|x'(T-1)|u'(0)|\dots|u'(T-1)]\in R^{n(T-1)+mT}$$

إذن المسألة / 14 / ، / 3 / ، / 2 / ، / 13 / تصاغ بالشكل التالي

$$\hat{I}(y)=c'y\longrightarrow\min. \qquad /15/$$

$$\Omega y=w, \qquad /16/$$

$$0\leq\underline{y}\leq y\leq\bar{y}, \qquad /17/$$

حيث

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_n & & -B & & \\ -A & I_n & & -B & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & -A & I_n & \\ & & & A & \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ -B & & \\ & B & \end{matrix}$$

$\Omega \in \mathbb{R}^{N,N}$. $N = n(T-1) + mT$.

$W = [\, x_0' \mid A' \mid 0 \mid \dots \mid 0 \mid x_1' \,]' \in \mathbb{R}^N$.

$\underline{y} = [\, \underline{x}_1' \mid \dots \mid \underline{x}_{T-1}' \mid \underline{u}_0' \mid \dots \mid \underline{u}_{T-1}' \,]' \in \mathbb{R}^N$.

$\bar{y} = [\, \bar{x}_1' \mid \dots \mid \bar{x}_{T-1}' \mid \bar{u}_0' \mid \dots \mid \bar{u}_{T-1}' \,]' \in \mathbb{R}^N$.

من أجل المسألة / 17 /ـ/ 15 / من جديد يمكن أن نستعمل طريقة سيمبلكس والمحدودة من طرفين

مثال : ليكن

$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3) \in \mathbb{R}^{6,6}$.

$B = \text{diag}(b, b, b) \in \mathbb{R}^{6,3}$.

$x_0 = (1, 0, 0, 1, 2, 1)'$,

$x_T = (2.2, 2.4, 1.8, 1.2)'$, $T = 13$.

$c = (1, 1, 1)'$, $a = (2, 2.4, 4)$

حيث

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -1 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبعد أن وضع برنامج بلغة FORTRAN 4 (فورتران ٤) لحل هذا المثال حصلنا على النتائج التالية :

جدول التوجيه

u \ t	№ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
u_2	1	0.2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
u_3	3.2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

u \ t	12	13
u_1	2	2
u_2	0.4	2.4
u_3	4	3.4

جدول المسار

x \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_3	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_6	1.	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8

x_i \ t	12	13
x_1	2	2
x_2	2	2
x_3	2	2
x_4	2	4
x_5	2	1.8
x_6	1.8	1.2

٦ ـ الخاتمة : في هذه المقالة عرضت

١ ـ طريقة جديدة من أجل حل مسألة تصفير الوقود عندما يكون شعاع التوجيه محدودا من الطرفين .

٢ ـ عرضت المسألة بصيغتها العامة . عندما تكون أشعة التوجيه والمكان محدودة من الطرفين .

٣ ـ وضعت برنامجاً بلغة FORTRAN 4 (فورتران ٤) من أجل حل هذه المسألة

المراجع

1. H. Torng. J. Franklin Inst., 28(1964), p. 278

2. G. Bashein. IEEE Trans. Autom. Contr., AC-16(1971),p.470.

3. Abdel Malek. Int. J. Syst. Sci. 8(1978), p. 849.