مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية
المجلد ٤ - العدد ٣ من ٩٥ إلى ١٠٢

ذي القعدة ١٤٠١هـ
ايلول ١٩٨١م

المسائل القصوى في بعض الفراغات العقدية

الدكتور
حسن بدور
كلية العلوم

١ ـ مقدمة

تعود دراسة المسائل القصوى في مختلف الفراغات العقدية الى أوائل القرن العشرين ومعظم هذه المسائل كانت تتعلق بالتوابع التحليلية وخصوصاً المتباينة منها . ويوجد الكثير من الطرائق والنتائج المتعلقة بهذه البحوث في المراجع [6]، [4]، [3]، [1] .

إن المسألة القصوى الاكثر وروداً على الساحة العقدية يمكن عرضها كما يلي :
لدينا أسرة التوابع P والمؤثر (Functional) .

$$(1)\ F(f) = \phi\left[f(20), \bar{f}(20), \ldots, \bar{f}^{(n)}(20)\right]$$

المعرف على الاسرة P و 20 نقطة ثابتة من الساحة العقدية التي عرفت عليها توابع الاسرة P . والمطلوب هو تحديد القيم القصوى للتابع F اذا كان حقيقياً أو ايجاد ساحة تحولاته إذا كان عقدياً .

وقد كانت أهم الطرق المتبعة لدراسة مثل هذه المسائل هي صيغ المتغيرات Variational Formolas التي بدأها Lavrentiev عام ١٩٣١ ثم عممت فيما بعد أكثر من مرة من قبل Shieffer و Golurin وغيرهما .

أما دراسة المسائل القصوى في فراغات التوابع الحقيقية فقد بدأت تطورها منذ القرن الثامن عشر . ويسمى هذا الفرع من الرياضيات الذي بدأه Euler بحساب المتغيرات Calculus of variations . وتتلخص المسألة الأساسية في حساب المتغيرات بما يلي :

لدينا التابع التكاملي الآتي

$$(2)\ F(f) = \int_a^b \phi\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] dx$$

المعرف على مجموعة التوابع الحقيقية $f(x)$ القابلة للاشتقاق n مرة . والمطلوب تحديد القيم القصوى لهذا التابع .

وقد عممت هذه المسألة في عدة اتجاهات . فقد أدت مثلاً دراسة المؤثر (2) تحت بعض الشروط الاضافية الى ظهور نظرية القيم المثلى The theory of optimoliration ويرجع الفضل هنا الى Bellman و Pontriagin و Joffe - Tichomirov وغيرهم .

لقد تطورت دراسات المسائل القصوى على الساحة العقدية وعلى الساحة الحقيقية كل على حدة حتى ظهور نظريات القيم المثلى التي سمحت باستخدام طرق التحليل الحقيقي لبعض مسائل التحليل العقدي وبالعكس .

وهذه النشرة تسير في هذا الاتجاه فهي تهتم بدراسة التوابع من النوع (2) المعرفة على أسر التوابع العقدية مع بعض الشروط الاضافية .

ط ـ دراسة المسألة القصوى في الفراغ E_q :

لنرمز بـ U و E_q و Γ على الترتيب كما يلي :

$$U = \{ \mu(t) \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \, , \mu(\beta) - \mu(\alpha) = 1 \}$$

$$E_q = \{ f \quad f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} q(2, t)\, d\mu(t) \, , |2| < 1 \, , \mu \in U \}$$

مع العلم ان q هو تابع تحليلي بالنسبة لـ Z و t .

$$\Gamma = : \quad z = z(\tau) \quad a \leqslant t \leqslant 6 \, .$$

والمطلوب حل المسألة الخطية التالية :

أوجد القيمة القصوى الصغرى للتابع

$$(A) \quad \begin{array}{l} F_0(f, \bar{f}) \longrightarrow \min \, , f \in E_q \\ F_j(f, \bar{f}) \leqslant o \, , j = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

بشرط

مع العلم ان للتوابع F_j الشكل الخطي التالي

$$F_j(f, \bar{f}) = \mathrm{Re} \int_{\Gamma} \sum_{k=o}^{nj} \left[a_k^j (z) f^{(k)}(z) + b_k^j (z) \bar{f}^{(k)}(z) \right] dz$$

حيث ان $a_k^j(z)$ و $b_k^j(z)$ هي توابع هولومورفية من أجل $k = 0, 1, \ldots, n_j$ و $j = 0, 1, \ldots, m$.

بما ان $f \in E_q$ اذن يمكننا كتابة F_j على الشكل

$$F_j(f, \bar{f}) = \mathrm{Re} \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=o}^{nj} \left[a_k^j q_z^{(k)} + b_k^j \bar{q}_z^{(k)} \right] d\mu(t) \right\} dz$$

وبالاستفادة من نظرية Fubini [5] نستطيع تبديل موضعي التكاملية . وبعد أن نرمز لما داخل التكامل المحدود من α الى β بـ $F_j(t)$ يكون

$$F_j(f, \bar{f}) = F(\mu) = \int_{\alpha}^{\beta} F_j(t)\, d\mu(t) \; .$$

وبذلك يصبح للمسألة (A) الشكل

$$\text{(B)} \quad \begin{aligned} F_0(\mu) &= \int_{\alpha}^{\beta} F_0(t)\, d\mu(t) \longrightarrow \min \qquad \mu \in U \\ F_j(\mu) &= \int_{\alpha}^{\beta} F_j(t)\, d\mu(t) \leqslant o, \; j = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

نعرف في هذه الحالة تابع L Lagrange كما يلي

$$L(\mu, \lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{j=o}^{m} \lambda_j F_j(t) \right] d\mu(t) = \int F(t)\, d\mu(t)$$

حيث $\lambda = {}^{\alpha}(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ هو شعاع Lagrange .

سنرمز الآن بـ G لمجموعة قيم تابع dagrange $L(\lambda, \lambda)$ عندما تتحول μ

$$G = \left\{ L \in R \;:\; L = \int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d\mu(t) \;, \mu \in U \right\}$$

نظرية مساعدة ١ : اذا كانت L تنتمي الى G فان التابع

$$(3) \quad L_{\epsilon} = L - (-1)^k \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} F'(t) \left| \mu(t) - c_k \right| dt + o(\varepsilon)$$

ينتمي أيضاً الى G مع العلم ان

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1 \, , t_{1\rho} t_2 \in [\alpha, b] \, , \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} 0, k = 1,2$$

واضافة الى ذلك فان

$$C_1 = \lim_{t \to t_1^-} \mu(t) \qquad \text{و} \qquad C_2 = \lim_{t \to t_2^+} \mu(t)$$

نظرية مساعدة ٢ : لتكن t_2, t_1 نقطتا انقطاع للتابع $\mu(t)$ على المجال $[\alpha, \beta]$. إذا كان التابع L ينتمي الى G فان التابع

$$(4) \; L_\rho = L + \rho \left[F(t_1) — F(t_2) \right] + o(\rho)$$

ان العلاقتين (3) و(4) مشابهتان لصيغ Golurin ولـذلك فبرهـان النظريتـين أعلاه يجري بشكل مشابه لنظريتي Golurin [1] .

اعتماداً على دستـــور القيم القصـــوى لـ Joffe- Tichomirov والنظريتـــين المساعدتين ١ و ٢ سوف نبرهن النظرية التالية التي تعطي الشرط اللازم لوجود القيم القصوى .

نظرية 3 ؛ ليكن $F'(t) = o$. اذا كان التابع

$$f^*(z) = \int_\alpha^\beta q \;\; (z, t) \, d\mu^*(t) \in E_q$$

حلاً للمسألة (B) وبالتالي للمسألة (A) فانه

أ) التابع الاقصى $\mu^*(t)$ ثابت على المجال $[\alpha, \beta]$ مع IV من القفزات .

$$\mu \;\; (t) = \alpha_k \, , k = 1, 2, ..., IV, \, t \in [\alpha, \beta]$$

ب) عدد قفزات التابع $\mu^*(t)$ لا يتجاوز العدد $\frac{M+1}{2}$ حيث M هو عدد جذور المشتق $F'(t)$ على المجال $[\alpha, \beta]$.

البرهان : من دستور القيم القصوى نستنتج ان

$$L(\mu^*, \lambda) = \min_{\mu \in U} L(\mu, \lambda)$$

وهذا يعني

$$\int_\alpha^\beta F(t)\, d\mu(t) \leqslant \int_\alpha^\beta F(t)\, d\mu(t)$$

وبتطبيق الصيغة(3) على التابع $L(\mu, \lambda)$ نحصل بعد ان نجعل ε يسعى نحو الضفر على المتر اجمعتين .

$$\int_{t_1}^{t_2} F'(t) \left[\mu^*(t) - c_1 \right] dt \geqslant o$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F'(t) \left[c_2 - \mu^*(t) \right] dt \leqslant o$$

ولا تكون هاتان المتراجحتان صحيحتين معاً الا اذا كان $\mu^*(t) = c_1$ عندما $F'(t) < o$ أو $\mu^*(t) = c_2$ عندما $F'(t) > o$. وهذا يعني ان التابع الاقصى $\mu^*(t)$ ثابت ولايمكنه ان يحتوي على قفزات الا في النقاط التي ينعدم فيها المشتق $F'(t)$.

لتكن الآن $t_1, \ldots, t_n$ نقط انقطاع التابع على المجال $[\alpha, \beta]$. عندئذ يكون $\mu^*(t)$ مستمراً على كل مجال جزئي (t_k, t_{k+1}) $k = 0, 1, \ldots, n$. وبالتالي فان $\mu^*(t)$ يحقق اعتماداً على الصيغة(4) . المتراجحة التالية .

$$L(\mu^*, \lambda) \leqslant L(\mu^*, \lambda) + \rho \left[F(t_k) - F(t_{k+1}) \right] + o(\rho) .$$

فاذا سعى ρ نحو الصفر كان

$$F(t_k) = F\, t_{k+1})$$

وفي هذه الحالة بحسب نظرية Roll يوجد نقطة $_k$ يكون فيها $F'(t^o_k) = o$. أي أن عدد جذور التابع $F'(t)$ على المجال $[\alpha, \beta]$ لا يقل عن $2n - 1$ جذراً . فاذا لاحظنا ان $2n - 1 \leqslant M$ حصلنا على المطلوب .

٣ ـ حل المسألة القصوى في الفراغ C :

سوف نستخدم النظرية العامة ٣ لدراسة المؤثرات التكاملية المعرفـة في أسرة Caratheadory التي نرمز لها بالحرف C . وهذه الاسرة هي تعريفاً مجموعة التوابـع التحليلية في القرص الواحدي K ذات القسم الحقيقـي الموجـب والقابلـة للنشر في السلسلة الآتية :

$$f\ (2\ ) = 1 + q_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \quad |2| < 1.$$

من المعروف ان كل تابع f (2) من الفراغ C يقبل التمثيل التكاملي التالي :

$$f(2) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(t)\ , \mu \epsilon^{-} U$$

أي أن E_q يتطابق مع C اذا وضعنا .

$$q = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\ , [\alpha, \beta] = [-\pi, +\pi]\ .$$

كنتيجة مباشرة للنظرية ٣ نحصل على النظرية الآتية :

نظرية ٤ : ليكن $f(z) \epsilon C$ وليكن

$$a^{o}_{j} = o = b^{j}_{k}\ , a^{j}_{k} = cost\ .$$

اذا كان التابع $f^*\ (z) \epsilon C$ يقبل ان يكون حلاً للمسألة (A) ، فان

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{it}{}_{k} + z}{e^{it}{}_{k} - z} \alpha_k\ , \alpha_k \geqslant o\ , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\ .$$

وفي هذه الحالة يمكن حصر N بالعدد الطبيعي N_0 حسب العلاقة

$$N \leqslant N_0 = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} (nj + 2\ ).$$

- المراجع -

[1] G. M. Golurin — Geometricz eskaia teoria funkcyi, kompleksonego. Moskwa 1966.

[2] G. S. Goodman — Alnivalent functions and optimal control ph. D. Thesis, Stanford University, 1968.

[3] S. Walczak — Method of examining conditional extrema in some families of complex functions. Bull. Acad. Polom. Sei., Ser. Sei. Math. Phys. XXIV, 11,1976.

[4] A. Joffe, W. Tichomirov — Teoria ekstre malnych zadacy. Moskwa 1974.

[5] R. Sikorski — Rachunek vozmicrkowy i calkowy. Warszawa 1969.

[6] W. Rogosinsky, A Macintyre— Extremum problems in the theary of analytic lunctions. Acta. Math. 82 1950, 275—325.