مجلـة جامعـة تشرين للدراســات والبحــوث العلمية
المجلـد ٤ - العــدد ٣ مــن ٨٩ إلـى ٩٤

ذي القعدة ١٤٠١هـ
المواف ١٩٨١م

حساب عدد البيانات التامة الأولية ذات زمرة الافتومـور فيزمـات الاولية غـير المتشاكلة (غير ايزمورفية) .

الدكتور اسكندر علي
كلية العلوم

تعريف (١) البيان التام : هو بيان موجه يحقق ما يلي :

من اجل أي رأسين مختلفين u و v في البيان التام يكون uv ضلعاً في البيان المذكور عندما وفقط عندما vu لا يمثل ضلعاً فيه .

تعريف (٢) نقول عن بيانين T و T' انهما متشاكلان اذا وجد تقابل يحافظ على الاضلاع من مجموعة رؤوس T على مجموعة رؤوس T' . اما الافتومورفيزم لـ T فهو ايزمورفيزم لـ T على نفسه . نصطلح على بعض الرموز :

m/n (m يقسم n) و $m \not| n$ (m لا تقسم n)

$G_{q(p^q-1)}$ ـ زمرة جزئية من الزمرة $GL(a,p)$ وتتألف من مجموع جميع العناصر من الشكل :

$$g: x \to \lambda x_{p^4}, X, \lambda \in GF(p^q), \lambda = o, u = u, 1, \ldots, q-1$$

المسألة المطروحة : هي حساب عدد البيانات التامة ذوات زمرة افتومورفيزمات اولية غير المتشاكلة عندما تكون مجموعة رؤوس البيان هي $GF(p_q)$ حيث q و p عددان بسيطان فرديان .

نحتاج هنا للتذكير بالنظرية والليما الآتية :

نظرية (١) ليكن p,q عددان بسيطان فرديان و $q/p-1$ ولتكن G أعظم زمرة جزئية بسيطة قابلة للحل من الزمرة $GL(q,p)$. عندئذٍ إما ان تكون G ـ زمرة غير أولية او ان تكون G زمرة اولية القاسم الناظم التبديلي فيها هو $F = GF(p^q)^*$

وفي الحالة الثانية تكون G مرافقة لـ $G_{q(p^q-1)}$ في $GL(q,p)$ وينتج من ذلك ان :

$$|G| = |G_{q(p^q-1)}| = q(p^q-1)$$

ليما بيرنسايد (١) نرمز لـ $N(G)$ لعدد المدارات للزمرة G على المجموعة X فيكون :

$$N(G) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} j_1(g)$$

حيث $j_1(g)$ عدد السلاسل الاحادية في نشر التبديل g الى سلاسل غير متقاطعة

ومن اجل حل المسألة المطروحة برهنت على ما يلي :

ليما (٢) في الزمرة $G_{q(p^q-1)}$ توجد زمرة جزئية بسيطة من المرتبة r عندما وفقط عندما r تحقق احد الشرطين الآتين :

$$\text{(B)}\quad \begin{array}{ll} r'/p-1\,,\ r/p^q-1\,,\ q/r & (١ \\ l/p-1\,,\ l/p^q-1\,,\ r=ql & (٢ \end{array}$$

ومن اجل كل r من الشكل السابق توجد في $G_{q(p^q-1)}$ زمرة جزئية G_r واحدة وواحدة فقط ، وتكون G_r أولية دائماً .

نظرية (٢) ليكن T بياناً تاماً من المرتبة p_q ذات زمرة افتومورفيزمات أولية حيث p,q عددان بسيطان فرديان فيكون (i) البيان التام T يشاكل (ايزمورني) لبيان تام من الشكل T (S) حيث ان S مجموعة جزئية من فراغ شعاعي خطي V عدد ابعاده q على GF (p) وتحقق S ما يلي :

$$-S \cap S = \phi\,,\ -S \cup S = V | \{o\} \qquad (A)$$

ويكون uv ضلعاً في T (s) عندما وفقط عندما $v-u \in S$.

(ii) زمرة الافتومورفيزمات لـ T (S) تكون من الشكل :

$$\text{Aut}\,T(S) = GF \qquad (1)$$

حيث ان $F = \{x \to x + a,\ x, a \in GF(p_q)\}$

$$\Gamma = \{g \in GL(q, F(p)) \,/\, g(S) = S\}$$

$$T(S) \approx T(S_1) \Leftrightarrow E\, g \in GL(q, F(p)) \,/ \qquad \text{(iii)}$$
$$g(S) = S_1$$

نرمز الآن لـ K_G لجميع المجموعات الجزئية S من $GF(p^q)$ والتي تحقق الشرط (A) فنرى بسهولة ان الزمرة (GL (q,F (p) تؤثر على المجموعة K_G .

واذا كانت G في (١) زمرة خطية أولية نسمي T بياناً تاماً أولياً .

نلاحظ بسهولة من النظرية (٢) ان عدد البيانات التامة غير المتشاكلة يساوي عدد

مدارات الزمرة $GL(q, F(p))$ على المجموعة $GF(p^q)$ ولكن حساب عدد المدارات المذكور مسألة صعبة للغاية لذلك نستخدم مدخلاً آخر لحل المسألة المطروحة .

ليما (٣) لتكن G زمرة جزئية بسيطة من الزمرة N $G_{q(p^q-1)}$ ناظم الزمرة G في $GL_{(q,F(p))}$, $r = |G|$. عندئذٍ (i) اذا كان q/r فتكون $N = G_{q(p^q-1)}$

(ii) اذا كان $r = ql$ فيكون N مجموعة جميع التحويلات الخطية على $GF(p^q)$ من الشكل

$$x \to \lambda \frac{p^q - 1}{l(p-1)} x_{p4}$$

$$\lambda \in GF(p^q),\ u = 0, 1, \ldots, q-1 .$$

ونحتاج الآن الى ليما (Qmi Aste) . . (٤)

عدد المدارات للزمرة $GL(q, F(p))$ على K_G يساوي عدد مدارات الناظم N للزمرة G في $GL(q, F(p))$ على K_G .

وبالتالي فان حساب عدد البيانات التامة الأولية غير المتشاكلة يؤ ول الى حساب عدد المدارات للزمرة N على المجموعة K_G .

نقول ان $r \in R$ اذا كانت r تحقق احد الشرطين (B) .

نظرية (٣) (i) عدد البيانات التامة الأولية من المرتبة p^q غير المتشاكلة ذو وات زمر افتومورفيزمات أولية من المرتبة $p^q r$ حيث $r \in R$ يعطى بالعلاقة الآتية :

$$N_{p^q}(r) = \frac{r}{q(p^q-1)} \sum_{\{\lambda/\lambda r \in R\}} M(\lambda)\, p^{\frac{p^q-1}{2\lambda r}}$$

(ii) عدد البيانات التامة الأولية من المرتبة p^q غير المتشاكلة ذات زمر افتومورفيزمات أولية من المرتبة $p^q qr$ حيث $r \in R$ يعطى بالعلاقة الآتية :

$$N_{p^q}(qr) = \frac{1}{p-1} \sum_{\{\lambda/\lambda r \in R\}} M(\lambda)\, p^{\frac{p^q-1}{2\lambda r}}$$

هنا M ـ تابع ميبوسا :

$$M(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{عندما } \lambda = 1 \\ (-1)^t & \text{عندما } \lambda \text{ تساوي جداء } t \text{ من الاعداد المختلفة} \\ 0 & \text{في الحالات الاخرى} \end{cases}$$

البرهان : نلاحظ بسهولة ان جميع مدارات N على K_G ذات قدرة واحدة وكل منهم تحوي $\frac{q(p^q - 1)}{r}$ عنصر . بالحقيقة

$|N| = |N_s|\ |N(s)|$ حسب ليما (١) ومنه $|N| = q(p^q - 1)$.

وذلك من أجل أي عنصر $S \ni K_G$ حيث ان N_s ـ مثبت العنصر S .

اي

$$N_s = \{ n \in N / n(s) = S \}$$

ونرى ان : $N_s = G$

وباستخدام ليما (٣) نجد ان :

$$|N(S)| = \frac{|N|}{|G|} = \frac{q(p^q - 1)}{r} \quad \dots \qquad (2)$$

نفرض الآن : $\bar{K}_G = \{S / \mathrm{Aut}\, T(S) \supseteq GF\}$

ونفرض ان $|K_G| = g(r) \qquad (r)$

فيكون : $|\bar{K}_G| = f(r) \quad |$

وبما ان $\bar{K}_G$ هي اجتماع صفوف تامة ملاصقة لـ G فيكون :

$$f(r) = q \frac{p^q - 1}{1 \lambda r}$$

ومن جهة أخرى $f(r) = \sum_{\{\lambda / \lambda r \in R\}} g(\lambda r)$

وبتطبيق القانون العكسي لعلاقة ميبوسا نجد ان :

$$g(\lambda r) = \sum_{\{\lambda / \lambda r \in R\}} M(\lambda) f(\lambda r)$$

وباستخدام العلاقة (٢) يكون :

$$N_{pq}(r) = \frac{|K_G| r}{q(p^q - 1)} =$$

$$= \frac{r}{q(p_q - 1)} \sum_{\{\lambda / \lambda r \in R\}} \mu(\lambda)\, q \frac{p^q - 1}{q \lambda r}$$

وبالنسبة للعلاقة (ii) تبرهن بنفس الطريقة .