

المحاكاة الرقمية لحوض اختبار النماذج عن طريق حل معادلات نافييه ستوكس باستخدام طريقة تنعيم شبكي تلاؤمي انتقائي

د. هيثم عيسى*

هاني ايوب**

(تاريخ الإيداع 10 / 12 / 2017. قُبِلَ للنشر في 14 / 10 / 2018)

□ ملخص □

يقدم هذا البحث طريقة رقمية تعتمد على محاكاة حوض ثنائي البعد، لجريان ثنائي البعد صفائحي و غير مستقر لزج و غير قابل للانضغاط. يتم حل معادلات نافيهيه - ستوكس ومعادلة الاستمرار في مجال المائع بتقريبها جبرياً باستخدام طريقة الفروق المتناهية. أما حقل الضغط فيتم الحصول عليه من خلال حل معادلة بواسون والتي تتضمن حقل سرعة تخيلية، حيث تحل معادلة بواسون بطريقة الحجوم المتناهية. يتم استخدام طريقة جديدة هي التنعيم الانتقائي التلاؤمي للشبكة "ASMR" للحصول على سرعة في الحل ودقة في النتائج.

الكلمات المفتاحية: حوض أمواج رقمي، جريان لزج، معادلات نافيهيه ستوكس، شبكة، تقريب جبري، التنعيم الانتقائي التلاؤمي للشبكة.

*أستاذ مساعد - قسم الهندسة البحرية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية
** طالب ماجستير - قسم الهندسة البحرية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Numerical Simulation of 2D Numerical Wave Tank by the Resolution of Navier-Stokes Equations using Adaptive Selective Mesh Refinement Method

Dr. Heitham Issa *
Hani Ayoub **

(Received 10 / 12 / 2017. Accepted 14 / 10 / 2018)

□ ABSTRACT □

This paper deals with a numerical method based on the simulation of a 2D tank, for unsteady and laminar two - dimensional incompressible viscous flow. Navier-Stokes and Continuity equations are solved in a fluid domain. These equations are discretized by Finite Differences Method. The pressure is obtained by solving a Poisson equation dealing with a fictitious velocity field. The Poisson equation is solved by a Finite Volume Method. The grid is refined by a new method “Adaptive Selective Mesh Refinement” called “ASMR”.

Key words: Numerical wave tank, viscous flow, Navier-Stokes equations, Mesh, Discretization, Adaptive Selective Mesh Refinement.

* Assistant professor, Department of Marine Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Master Student, Department of Marine Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

إن ديناميك الموائع الحاسوبي (Computational Fluid Dynamics) CFD علمٌ واسعٌ جداً يُستخدم لحل المعادلات التي تصيغ وتُمذج حركة الموائع، حيث أن أغلبية هذه المعادلات لا نستطيع حلها بالطرق التحليلية المعروفة، ولهذا السبب نلجأ إلى حلها بالطرق الرقمية Numerical Method باستخدام ال CFD .

إن الهدف الأساسي من ديناميك الموائع الحاسوبي هو الحل الرقمي لمعادلات الجريان الأساسية لأن هذا الحل هو الذي يزودنا بالمعلومات عن معطيات وخصائص الجريان المدروس، هذه التقنية تصف وتوضح لنا حقل الجريان زمنياً ومكانياً من خلال التوصل إلى حل معادلاته.

حالياً غزت هذه التقنيات كل مجالات الحياة العلمية تقريباً انطلاقاً من الأبحاث الطبية وصولاً إلى الأبحاث الهندسية، ومن استخدامات ال CFD نذكر على سبيل المثال لا الحصر استخدامها في حساب المقاومات والدفع والجريان حول بدن السفينة والمناورة والاتزان بالإضافة إلى تطبيقات أخرى منها الجريانات داخل الأنابيب.

بالإضافة إلى فوائد ال CFD العديدة فهو يختصر الوقت ويقلل التكاليف بشكل كبير عند القيام بالأعمال التصميمية، كما أنه يعتبر تقنية قادرة على إعطاء معلومات بمستوى غير محدود من التفاصيل دون أي تكلفة بالمقارنة مع الطرق التجريبية الباهظة الثمن والشديدة التعقيد، إضافة إلى أنه يقدم إمكانية إظهار رسوم بيانية للنتائج، مما يتيح للمستخدم الفرصة لفهم هذه النتائج بشكل أفضل، بالتالي يمكننا القول أن ال CFD يوفر الوقت والجهد والعديد من التخمينات الواسعة النطاق ويظهر الآثار الفيزيائية بدقة متناهية، والتي كانت في الماضي مجرد دراسات تقريبية.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث من خلال اختصار وتوفير الوقت اللازم للانطلاق بمشروع محاكاة الجريان الحقيقي حول بدن السفينة عن طريق تهيئة معادلات الجريان (نافيه - ستوكس) وطرق حلها، وذلك من خلال توفير حلول رقمية داخل المجال المدروس نستطيع من خلالها معرفة حقل الضغط والسرعة حول الأجسام العائمة والغاطسة كالسفن والغواصات، وبالتالي نستطيع معرفة القوى والعزوم المؤثرة على الأجسام المذكورة.

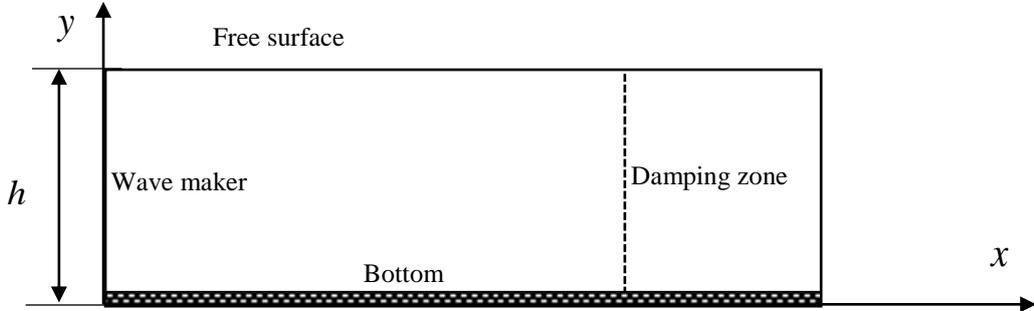
يهدف البحث إلى دراسة الخطوات المتبعة لإجراء عملية المحاكاة ودراسة المجال الفيزيائي ومعادلات الجريان والشروط الحدية، بالإضافة إلى استخراج معادلات رقمية جديدة لحالتنا المدروسة وعرض تفاصيل خوارزمية الحل.

طرائق البحث ومواده:

يبين الشكل (1) المجال الحسابي المستخدم في الدراسة وهو عبارة عن حوض ثنائي الأبعاد مع مولد أمواج على النهاية اليسرى. يقسم المجال إلى منطقتين: المنطقة الرئيسية المجاورة لمولد الأمواج حيث يمكن أن يتوضع الجسم المغمور Submerged body ، ومنطقة التخميد لمنع أية أمواج منعكسة.

ننتقل من معادلات انحفاظ كمية الحركة ثنائية الأبعاد ومعادلة انحفاظ الكتلة لمائع لزج في جريان غير قابل للانضغاط، لذلك قمنا بإعداد برنامج حاسوبي بلغة ++C لتنفيذ الحسابات اللازمة.

يتم تحويل المعادلات إلى الشكل اللابعدي على اعتبار أن الطول المرجعي هو ارتفاع حوض الأمواج h من أجل الأبعاد x, y ، والسرعة المرجعية هي السرعة الأعظمية لمولد الأمواج من أجل السرعات: u المركبة الأفقية للسرعة و v المركبة الشاقولية للسرعة.



الشكل (1) المجال المدروس

المسألة الرقمية المدروسة ومعادلات الجريان:

المعادلات التفاضلية الأساسية اللابعدي المستخدمة لحل هذه المسألة ثنائية البعد هي معادلات نافيه - ستوكس Navier-Stokes [1] equations ومعادلة الاستمرار continuity equation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

الشروط الحدية: Boundary conditions

1. شروط ديركلي Dirichlet Boundary Conditions.
2. شروط نيومان Neumann Boundary Conditions.

بما أن دراستنا على مائع حقيقي (لزج) نفرض في هذه الحالة أن السرعة على الجدار تساوي سرعة المائع (شروط الالتصاق).

خوارزمية الحل الرقمي لمعادلات الجريان: Numerical Solution Technique

يمكننا الترميز للمعادلة (1) بالعلاقة الشعاعية التالية:

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \vec{x}} + \vec{D} - \vec{C} \quad (4)$$

\vec{D} : يمثل حد الانتشار Diffusion:

$$\vec{D}_x = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \vec{D}_y = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

\vec{C} : يمثل حد الحمل Convection:

$$\vec{C}_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \vec{C}_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

نقوم بتقريب حدود عدم الاستقرار جبرياً في معادلات كمية الحركة وفق مخطط فروق متناهية من المرتبة الأولى باستخدام طريقة الخطوة الكسرية Fractional-step Method [2]:

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\Delta t} = -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + [\bar{D} - \bar{C}]^{n+1}$$

$$\bar{u}^{n+1} + \Delta t \frac{\partial p}{\partial \bar{x}_i} = \bar{u}^n + \Delta t [\bar{D} - \bar{C}]^{n+1}$$

يمكننا الترميز للطرف الأول بالرمز \bar{u} وهي سرعة تخيلية fictitious velocity فيصبح لدينا:

$$\bar{u} = \bar{u}^{n+1} + \Delta t \frac{\partial p}{\partial \bar{x}_i} \quad (5)$$

$$\bar{u} = \bar{u}^n + \Delta t [\bar{D} - \bar{C}]^{n+1} \quad (6)$$

الشبكة الرقمية واعتباراتها:

من أجل تكوين الشبكة على المجال الحسابي نحن بحاجة إلى طول المجال الفيزيائي L وارتفاعه H وعدد الأعمدة N وعدد الأسطر M ، لذلك نقوم بتقسيمه إلى مجموعة من الخلايا المتشابهة مستطيلة الشكل عن طريق شبكة من الأعمدة z والأسطر i ، فيتشكل لدينا ما يسمى بالشبكة Grid التي تتألف من عقد Nodes وهي نقط تقاطع الأعمدة والأسطر، وخلايا Cells تكونها أربع عقد.

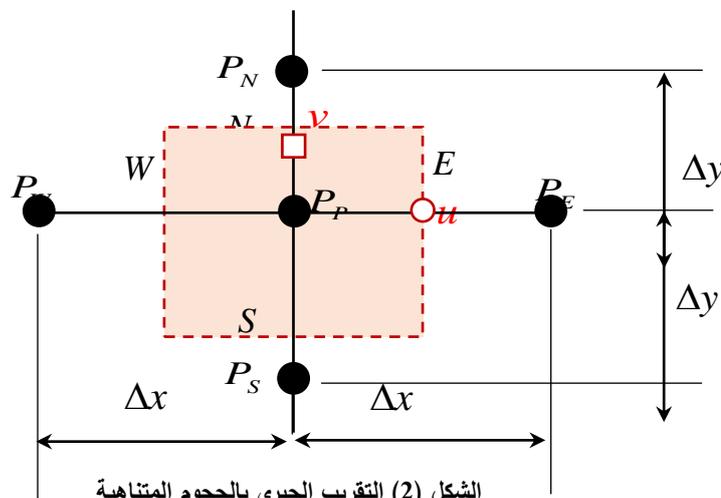
التقريب الجبري بالحجوم المنتهية:

يتم حساب الضغط P على العقد، أما المركبة الأفقية للسرعة u فتحسب في منتصف المسافة الأفقية بين عقدتي ضغط متجاورتين، بينما المركبة الشاقولية للسرعة v فتحسب في منتصف المسافة الشاقولية بين عقدتي ضغط متجاورتين، كما هو موضح في الشكل (2).

باشتقاق المعادلة (5) ومن معادلة الاستمرار نحصل على معادلة بواسون Poisson Equation ثنائية البعد لحقل الضغط والتي تعطى بالعلاقة:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \bar{u} \quad (7)$$

فمن أجل حجم التحكم (CV) Control Volume المتمركز بالعقدة P كما في الشكل (2):



بإجراء تقريب الجبري للمعادلة (7) باستخدام طريقة الحجم المتناهية Finite Volume Method [3] في

مجال ثنائي البعد نحصل على:

$$\int_{Cell} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) dx dy =$$

$$\int_W \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_W \right) dy + \int_N \left(\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_N \right) dx + \int_E \left(\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_E \right) dy + \int_S \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_S \right) dx = \iint_{CV} (\nabla \vec{u} / \Delta t) dx dy$$

نقرب التكاملات جبرياً فنحصل على:

$$-\frac{P_P - P_W}{\Delta x} \Delta y + \frac{P_N - P_P}{\Delta y} \Delta x + \frac{P_E - P_P}{\Delta x} \Delta y - \frac{P_P - P_S}{\Delta y} \Delta x = a \cdot \Delta x \Delta y$$

بالضرب ب $\Delta x \Delta y$ والترتيب نجد معادلة الضغط (بواسون):

$$[\Delta y^2] \cdot P_W - 2[\Delta x^2 + \Delta y^2] \cdot P_P + [\Delta y^2] \cdot P_E + [\Delta x^2] \cdot P_S + [\Delta x^2] \cdot P_N = a \cdot \Delta x^2 \Delta y^2$$

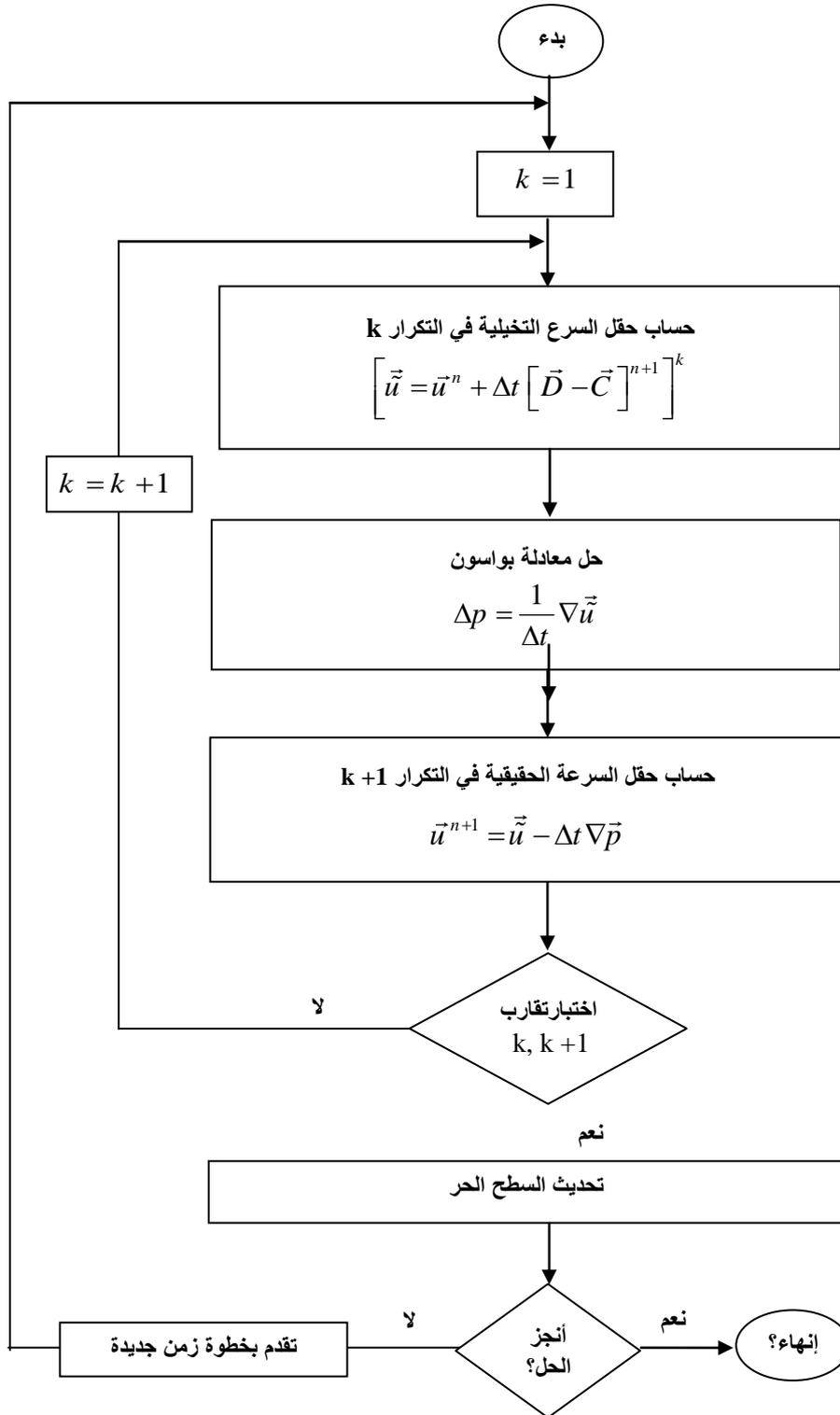
تطبق معادلة بواسون في كل عقدة من عقد الشبكة، حيث أن المعادلة تعبر عن العقدة والعقد الأربعة المجاورة لها.

$$C_W \cdot P_W + C_P \cdot P_P + C_E \cdot P_E + C_S \cdot P_S + C_N \cdot P_N = b \quad (8)$$

يتم إدخال هذه المعادلة برمجياً ودراسة الشروط الحدية الموافقة للحالة المدروسة ثم تحل تكرارياً حتى تتم عملية

التقارب.

مخطط منطقي لخوارزمية الحل في المقطع ثنائي البعد [2]:



الشكل (3) مخطط انسيابي يوضح خوارزمية الحل في المقطع ثنائي البعد

الخطوة الأولى حساب حقل السرعة التخيلية fictitious velocity في التكرار k:

نفرض حقل سرعة أولي \vec{u}^n و نحسب السرعة الافتراضية (التخيلية) \vec{u} بناء عليه:

$$\vec{u} = \vec{u}^n + \Delta t [\vec{D} - \vec{C}]^{n+1} \quad (9)$$

هذه المعادلة تملك مركبتين كما يلي:

المركبة الأولى (السرعة الأفقية):

$$\tilde{u} = u^n + \Delta t \cdot (D_x - C_x) \quad (10)$$

$$\tilde{u} = u^n + \Delta t \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} \right] \quad (11)$$

بإجراء تقريب جبري باستخدام طريقة الفروق المتناهية Finite Differences Method ينتج لدينا:

$$\tilde{u} = u^n + \Delta t \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{u_E - 2u_P + u_W}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{u_N - 2u_P + u_S}{\Delta y^2} \right) - \left(\frac{u_E^2 - u_W^2}{2 \cdot \Delta x} \right) - \left(\frac{(u_P + u_N) \cdot (v_P + v_E) - (u_S + u_P) \cdot (v_S + v_{SE})}{4 \cdot \Delta y} \right) \right] \quad (12)$$

المركبة الثانية (السرعة الشاقولية):

$$\tilde{v} = v^n + \Delta t (D_y - C_y) \quad (13)$$

$$\tilde{v} = v^n + \Delta t \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial vu}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} \right] \quad (14)$$

بإجراء تقريب جبري باستخدام طريقة الفروق المتناهية FDM لكل حد من حدود المعادلة السابقة ينتج لدينا:

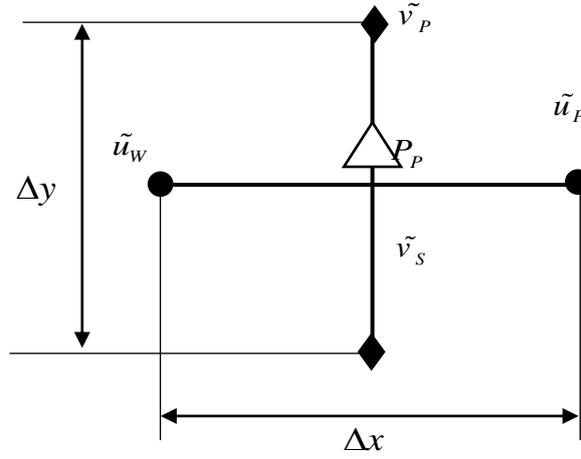
$$\tilde{v} = v^n + \Delta t \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{v_E - 2v_P + v_W}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{v_N - 2v_P + v_S}{\Delta y^2} \right) - \left(\frac{(u_P + u_N) \cdot (v_P + v_E) - (u_W + u_{NW}) \cdot (v_W + v_P)}{4 \cdot \Delta x} \right) - \left(\frac{v_N^2 - v_S^2}{2 \cdot \Delta y} \right) \right] \quad (15)$$

الخطوة الثانية حل معادلة بواسون Poisson Equation Resolution:

بناءً على حقل السرعة الافتراضية \vec{u} يتم حل معادلة بواسون لحساب حقل الضغط على كامل المقطع ثنائي البعد:

$$\Delta p = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)_p = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\tilde{u}_P - \tilde{u}_W}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}_P - \tilde{v}_S}{\Delta y} \right) \quad (16)$$

يوضح الشكل (4) التقريب الجبري للسرعة الافتراضية المستخدمة في معادلة بواسون:



الشكل (4) التقريب الجبري للسرعة الافتراضية

لحل معادلة بواسون نحتاج الى البارامترات التالية:

- معامل المكان لكل عقدة من عقد الشبكة وللعقد المجاورة لها K_P, K_E, K_W, K_N, K_S (مُخزَّن في كل عقدة)، بحيث أن العقد الحدودية تأخذ قيمة $K_P = 0$ أما العقد الواقعة ضمن المجال فتأخذ قيمة $K_P = 1$.
- أرقام العقد المجاورة لكل عقدة (مُخزَّن في كل عقدة) N_E, N_W, N_N, N_S .
- الثوابت الخاصة لكل عقدة وللعقد المجاورة لها (الشروط الحدية) C_P, C_E, C_W, C_N, C_S .

تُحل معادلة بواسون بحلقة تكرارية من خلال إجراء مسح أفقي لكامل عقد الشبكة حيث يتم حساب الضغوط في العقد في كل تكرار عن طريق خوارزمية المصفوفة ثلاثية الأقطار TDMA [3]، ومن ثم يتم إجراء اختبار تقارب للحل بين تكرارين $(k, k+1)$ من خلال البحث عن الفرق الأعظمي بين الضغوط في كل عقدة ونقارنه مع الدقة المطلوبة، وهو عبارة عن متحول يأخذ قيمة حقيقية موجبة صغيرة تعبر عن دقة الحل يتم إدخاله عبر البرنامج، فإذا كان الفرق الأعظمي أكبر من الدقة المطلوبة تستمر عملية التكرار حتى يتم التقارب، في هذه الدراسة تم اعتماد دقة 10^{-5} من أجل التقارب.

الخطوة الثالثة حساب حقل السرعة الحقيقية في التكرار $k+1$:

اعتماداً على حقل الضغط الذي تم حسابه في الخطوة الثانية، وعلى حقل السرعة الافتراضية في الخطوة الأولى، وعلى القيم المعروفة من شروط البدء (السرعة في خطوة الزمن السابقة) يتم حساب حقل السرعة الحقيقية في التكرار الجديد.

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u} - \Delta t \cdot \nabla \vec{p} \quad (17)$$

لدينا مركبتين للسرعة الحقيقية:

$$\left(u^{n+1} = \tilde{u} - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{k+1} \Rightarrow u_p^{n+1,k+1} = \tilde{u}_p^{n+1,k+1} - \Delta t \frac{P_W - P_P}{\Delta x} \quad (18)$$

$$\left(v^{n+1} = \tilde{v} - \Delta t \frac{\partial p}{\partial y} \right)^{k+1} \Rightarrow v_p^{n+1,k+1} = \tilde{v}_p^{n+1,k+1} - \Delta t \frac{P_S - P_P}{\Delta y} \quad (19)$$

الخطوة الرابعة اختبار التقارب:

نختبر اقتراب الحل لحقل السرعة بين تكرارين (k, k+1) عند حصول التقارب نعتبر أن الحل قد تم في المقطع ثنائي الأبعاد المدروس.

النتائج والمناقشة:

■ تنعيم الشبكة الرقمية:

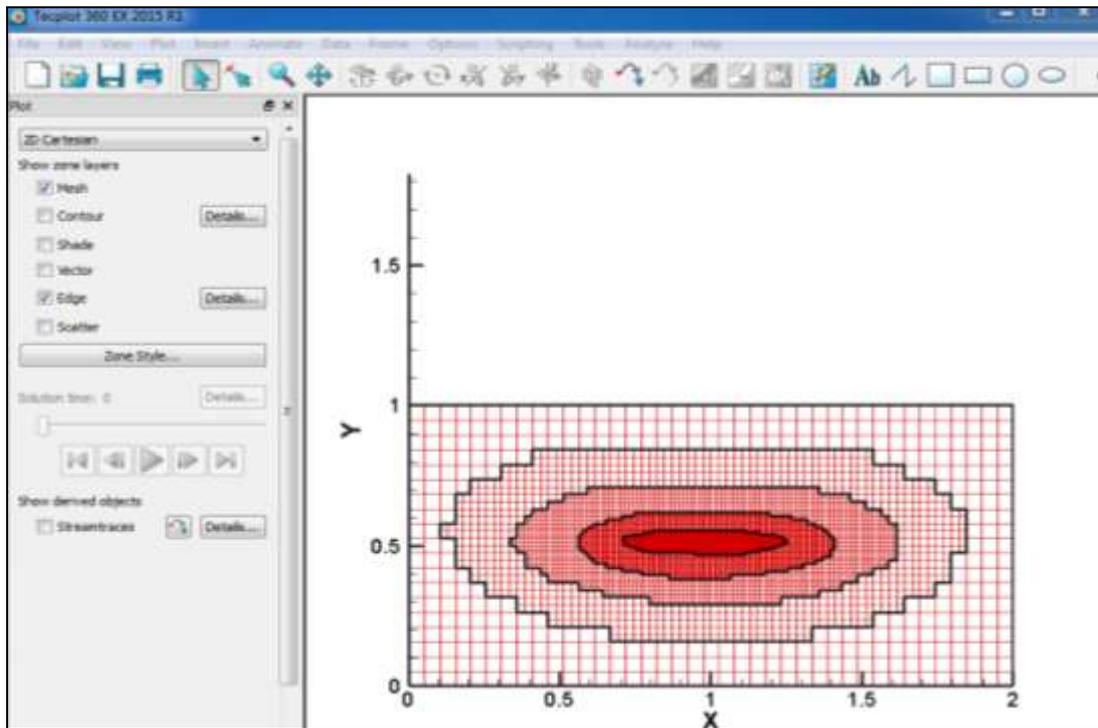
من أجل دراسة الجريان حول جسم مثبت مغمور بالمياه نستخدم طريقة جديدة هي التنعيم الانتقائي التلاؤمي للشبكة (ASMR) Adaptive Selective Mesh Refinement حيث يتم التنعيم من خلال تشكيل طبقات تغلف الجسم المراد دراسته أي إضافة عقد جديدة وفق ترتيب معين، ميزة هذه الطريقة أن التنعيم يأخذ شكل الجسم الذي يتم التنعيم حوله، أي أن التنعيم يكون في المناطق الضرورية والقريبة من الجسم فقط وبالتالي يتم الاستغناء عن عدد كبير من العقد مما يجعل زمن الحساب أقل، حيث أن الشبكة Grid تتألف من عدة طبقات داخلية محتواة في طبقة خارجية كما في الشكل (5)، وبما أن خطوة الشبكة تتضاعف بين الطبقات وهكذا فإن الخلايا في أية طبقة تملك مساحة تعادل 4 أضعاف مساحة الخلايا للطبقة الداخلية المجاورة لها.

انطلاقاً من منحنى الجسم المغمور بافتراض أنه مُعطى لدينا على شكل ملف نصي، يتم إدخال عدد الطبقات المراد تنعيمها ثم يقوم البرنامج بدراسة كافة الحالات الممكنة واللازمة لإتمام عملية التنعيم.

يوضح الشكل (5) تنعيم لأربع طبقات بحيث يمكن اعتباره المسقط الجانبي أو المسقط الأفقي لأي جسم مغمور.

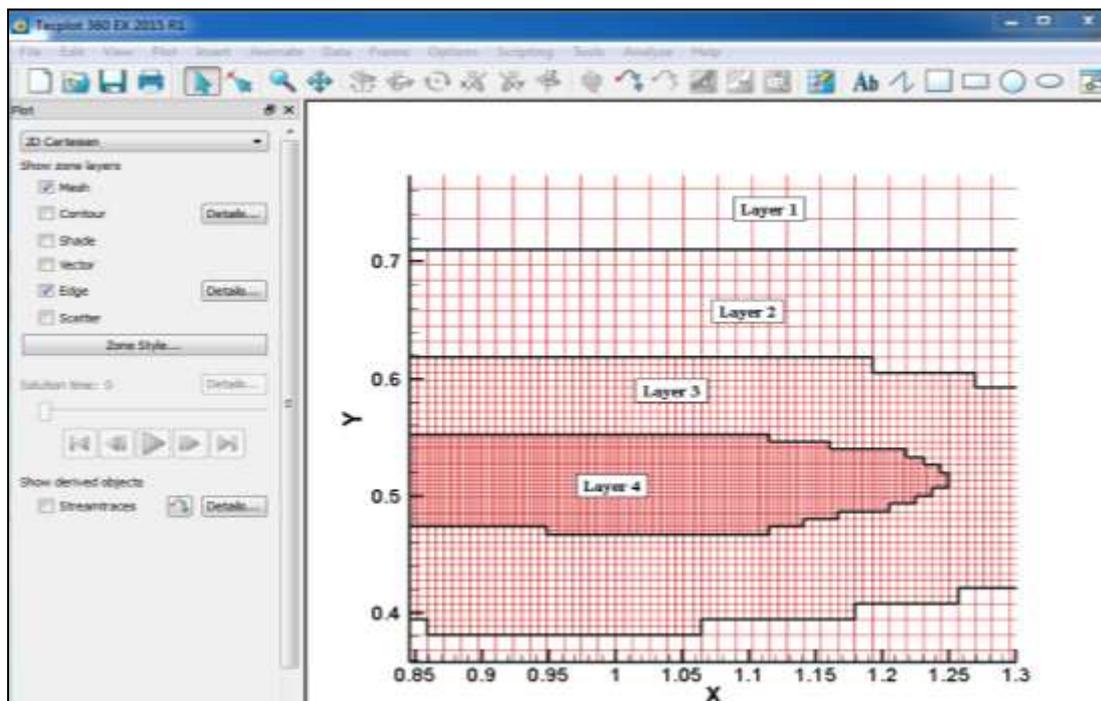
يوضح الشكل (7) تنعيم لخمس طبقات في المقطع العرضي.

يوضح الشكل (9) تنعيم لست طبقات في المقطع الطولي.

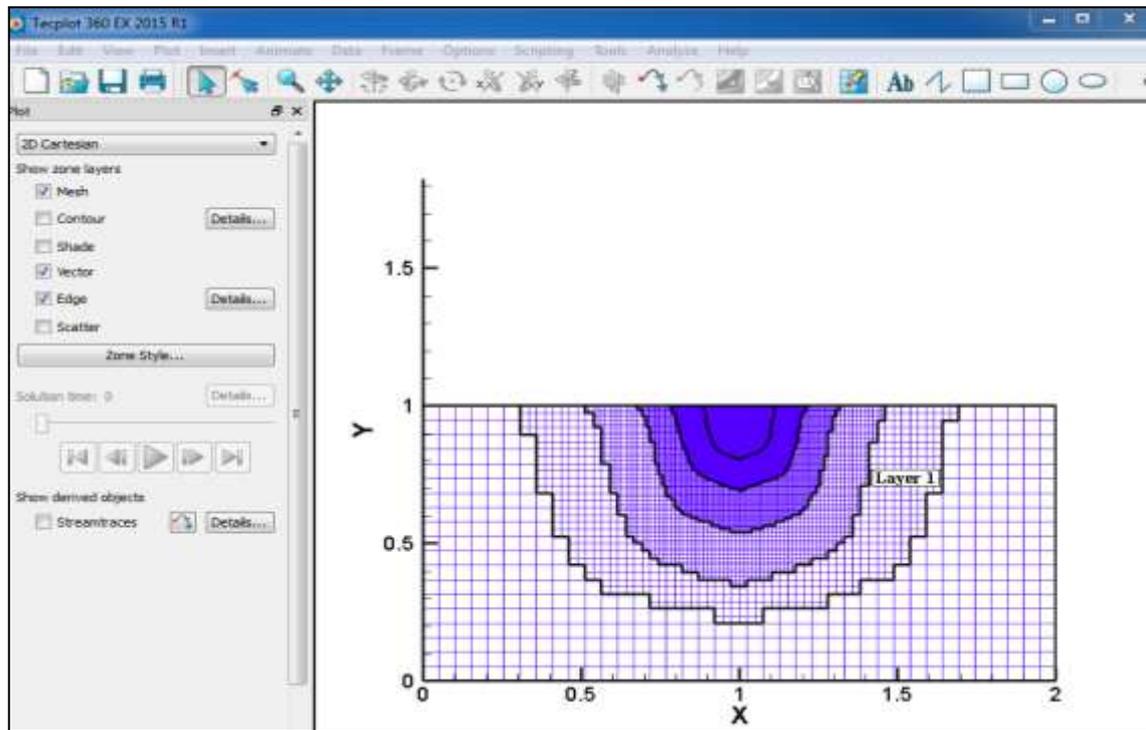


الشكل (5) تنعيم لأربع طبقات

يوضح الشكل (6) جزءاً مكبراً من المجال السابق:

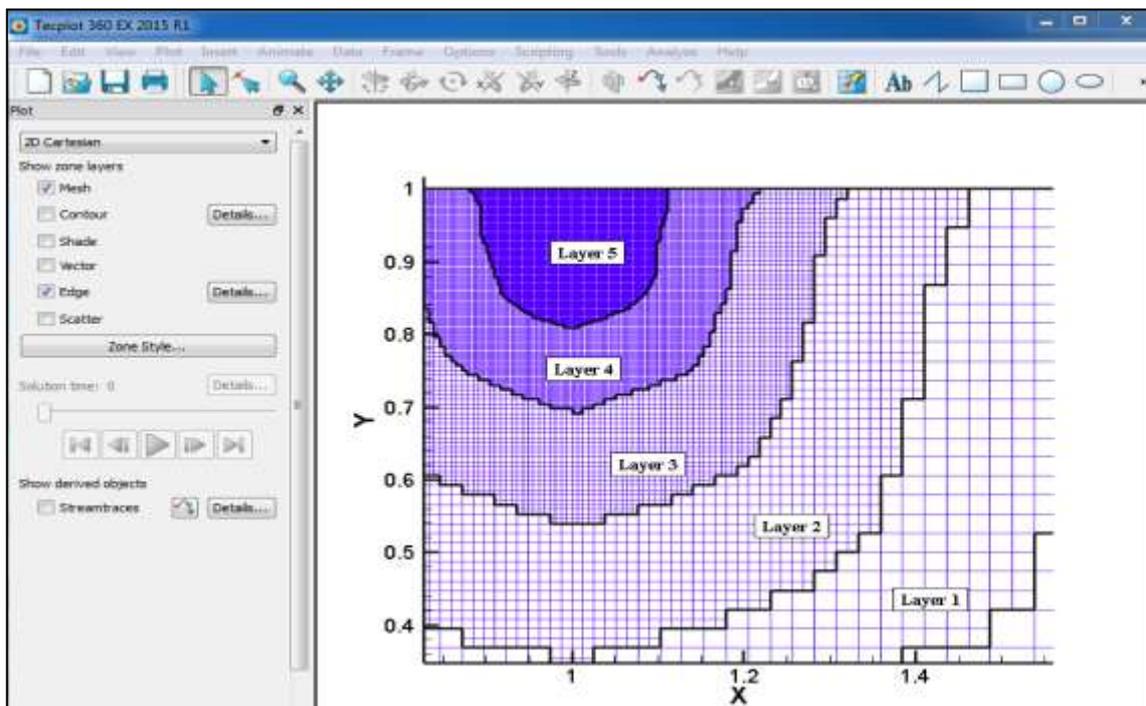


الشكل (6) جزء مكبر داخل المجال

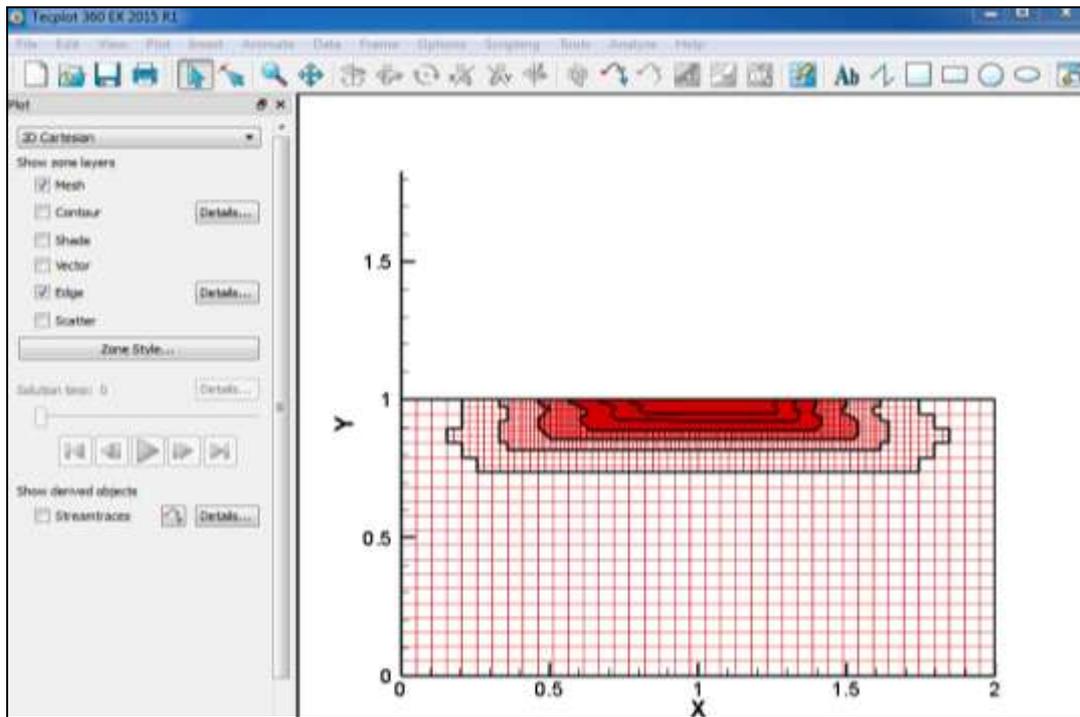


الشكل (7) تنعيم لخمس طبقات في المقطع العرضي

يوضح الشكل (8) جزءاً مكبراً من المجال السابق:

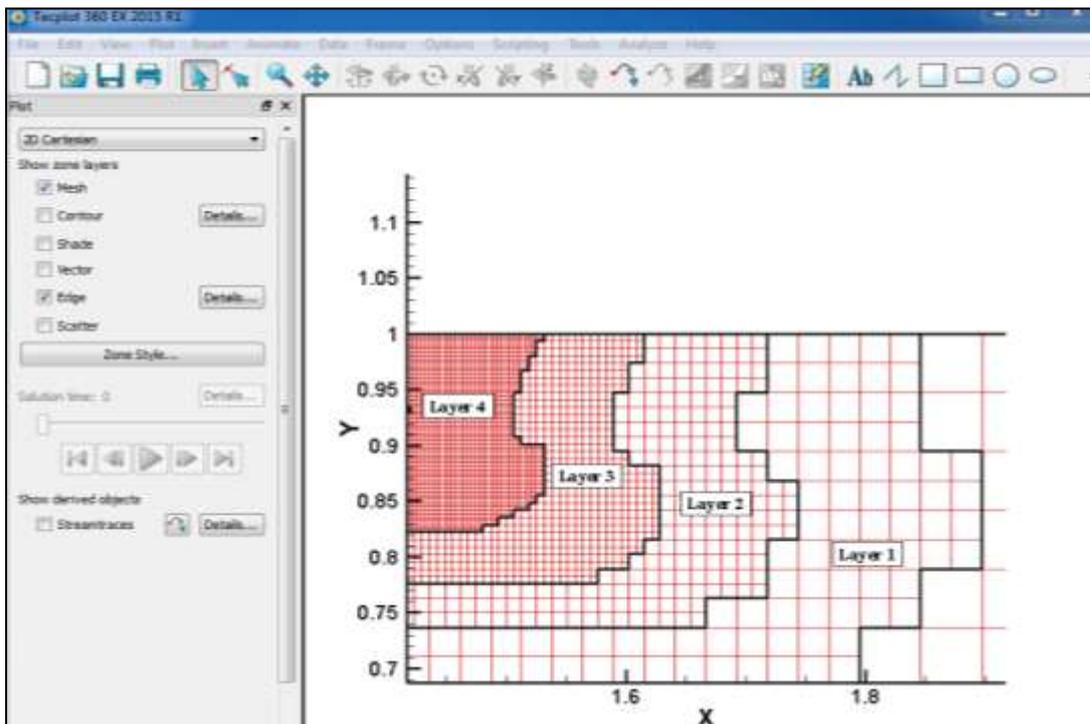


الشكل (8) جزء مكبر داخل المجال

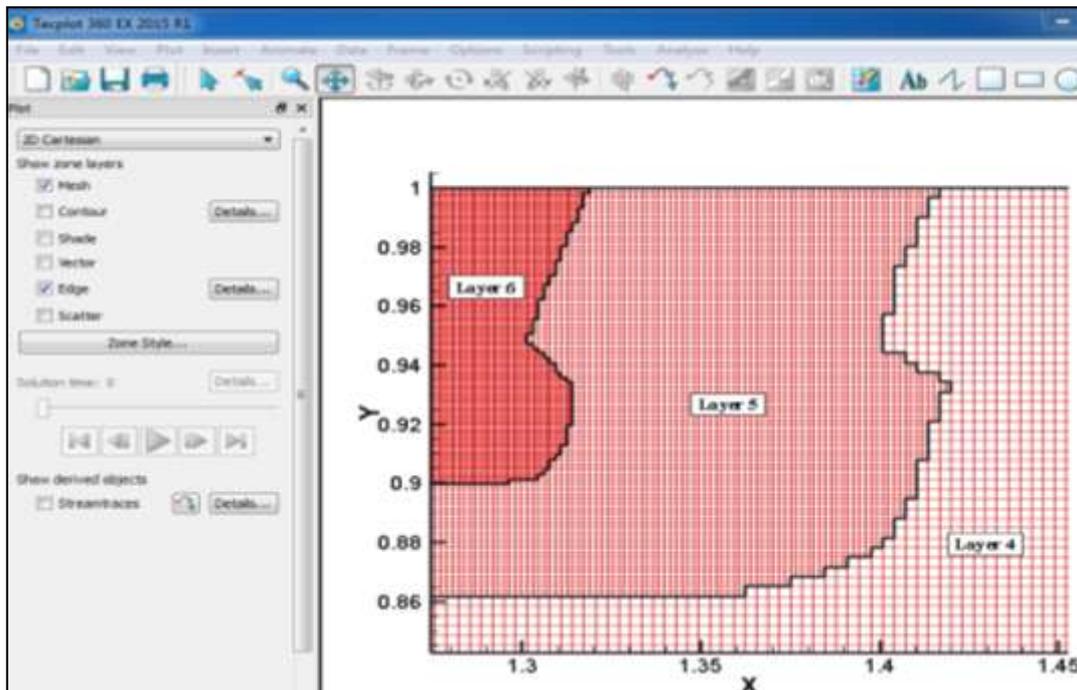


الشكل (9) تنعيم لست طبقات في المقطع الطولي

يوضح الشكلان (10,11) جزءاً مكبراً من الجهة الأمامية:

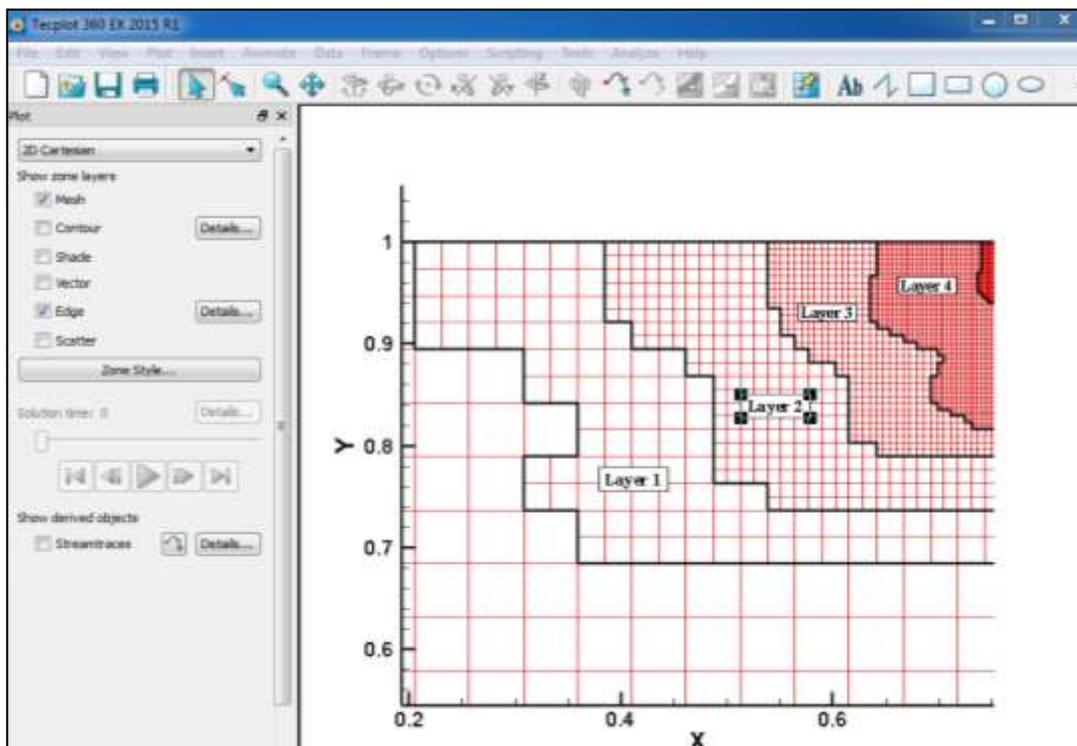


الشكل (10) جزء مكبر للطبقات (1-2-3-4) من الجهة الأمامية

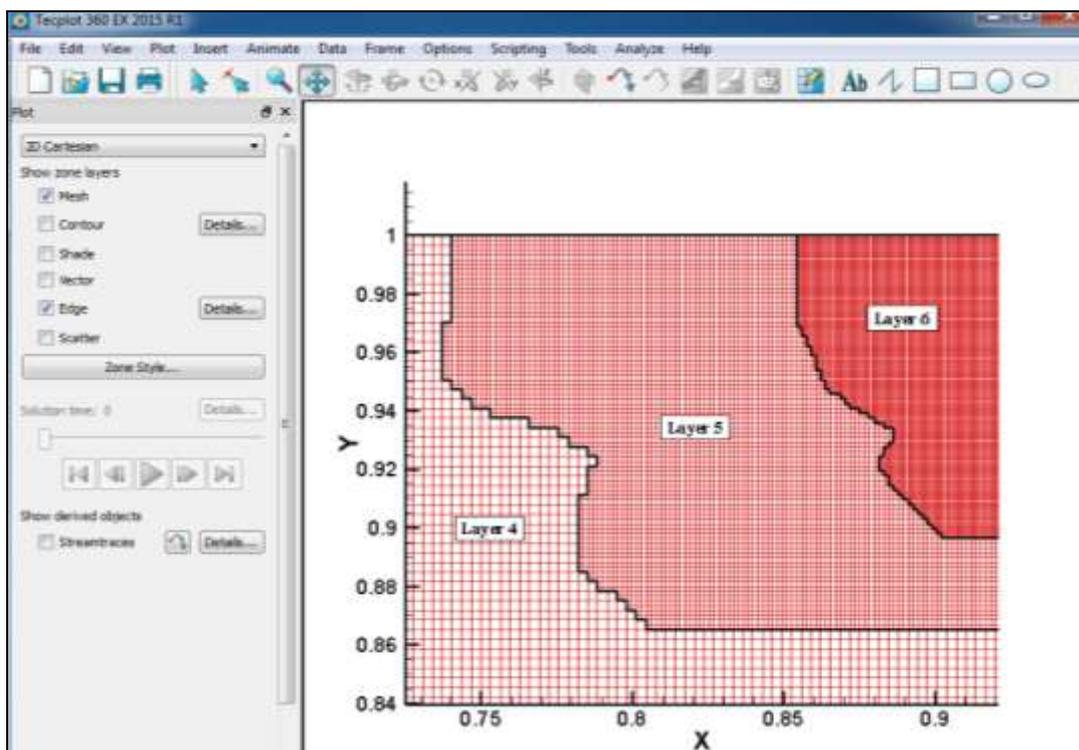


الشكل (11) جزء مكبر للطبقات (4-5-6) من الجهة الأمامية

يوضح الشكلان (12,13) جزءاً مكبراً من الجهة الخلفية:



الشكل (12) جزء مكبر للطبقات (1-2-3-4) من الجهة الخلفية

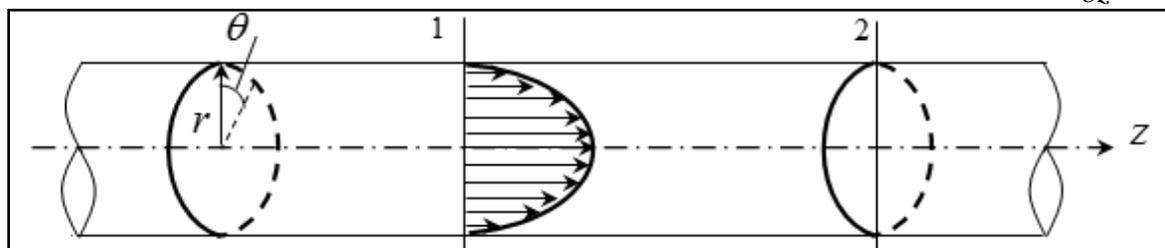


الشكل (13) جزء مكبر للطبقات (4-5-6) من الجهة الخلفية

■ تطبيق على خوارزمية حقل السرعة: جريان صفائحي متطور كلياً في أنبوب دائري المقطع [4]:
Laminar Fully Developed Pipe Flow:

جريان بوازيه هو عبارة عن جريان صفائحي غير قابل للانضغاط في أنبوب مستقيم دائري المقطع نصف قطره R كما هو مبين في الشكل (14)، وقد دُرِس تجريبياً من قبل هاغن G.Hagen في عام 1839 وبوازيه J.L.Poiseuille في عام 1840، نقصد بجريان متطور كلياً Fully Developed أي أن المنطقة المدروسة بعيدة بشكل كاف عن مدخل الأنبوب بحيث يكون الجريان محورياً تماماً أي أن السرعة المحورية $v_z \neq 0$ بينما السرعة القطرية $v_r = 0$ والسرعة الزاوية $v_\theta = 0$. نفرض أيضاً أن الجريان متناظر محورياً هذا يعني أن $\partial/\partial\theta = 0$ ، بذلك تختصر معادلة الاستمرار في الإحداثيات الأسطوانية إلى:

$$v_z = v_z(r) \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$



الشكل (14) جريان بوازيه

الحل التحليلي Analytical Solution:

باعتبار أن الجريان يتقدم مباشرة على طول الأنبوب بدون حركة قطرية، وبالتالي تبسط معادلة كمية الحركة r إلى

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{أو} \quad p = p(z) \quad \text{فقط.}$$

وتختصر معادلة كمية الحركة z في الإحداثيات الأسطوانية ، إلى:

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{dP}{dz} + \mu \nabla^2 v_z = -\frac{dP}{dz} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

يتلشى حد تسارع الحمل على الطرف الأيسر بسبب معادلة الاستمرار، وهكذا يمكن إعادة ترتيب معادلة كمية

الحركة في الاتجاه z كالتالي:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dP}{dz} = \text{Const} < 0$$

المعادلة خطية ويمكن مكاملتها مرتين:

$$v_z = \frac{dP}{dz} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2$$

حيث C_1, C_2 ثوابت التكامل يمكن تحديدها من الشروط الحدية، ألا وهي عدم الانزلاق عند الجدار وسرعة

متناهية عند محور الأنبوب:

$$C_2 = -\frac{dP}{dz} \left(\frac{R^2}{4\mu} \right), \quad C_1 = 0$$

وأخيراً نصل إلى الحل المشهور لجريان هاغن - بوازيه المتطور كلياً:

$$v_z = \left(-\frac{dP}{dz} \right) \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \Rightarrow v_z = \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (20)$$

حيث ΔP هبوط الضغط على طول الجزء المدروس من الأنبوب L بين المقاطع 1 و 2. $-\frac{dP}{dz} = \frac{\Delta P}{L}$

إن بروفيل السرعة عبارة عن مجسم قطع مكافئ مع النهاية العظمى عند الخط المركزي أي محور الأنبوب.

السرعة الأعظمية:

$$v_{\max} = v_z (r = 0) = \left(-\frac{dP}{dz} \right) \frac{R^2}{4\mu} \Rightarrow V_{\max} = \frac{\Delta P}{L} \frac{R^2}{4\mu} \quad (21)$$

والسرعة الوسطية:

$$V_{\text{avg}} = \left(-\frac{dP}{dz} \right) \frac{R^2}{8\mu} = \frac{V_{\max}}{2} \quad (22)$$

تكون هذه العلاقات سارية المفعول طالما أن الجريان صفائحي *Laminar* أي عندما يكون رقم

$$\text{رينولدز } Reynolds \text{ اللابعدي للجريان} = \frac{\rho V_{\text{avg}} (2R)}{\mu} = \frac{V_{\text{avg}} (2R)}{\nu} \text{ أقل من } 2100 \text{ تقريباً.}$$

من أجل جريان الماء الذي يملك الخصائص التالية: اللزوجة التحريكية $\mu = 1.003 \times 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$ وكتلة

نوعية $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ عند درجة حرارة 20°C ، بسرعة أعظمية $V_{\max} = 0.2 \text{ m/s}$ ضمن الأنبوب ذي الأبعاد:

$L = 1 \text{ m}$ وقطر $d = 2 \text{ cm}$ يكون رقم رينولدز:

$$\text{Re} = \frac{\rho V_{avg} d}{\mu} = \frac{998 \times 0.1 \times 0.02}{1.003 \times 10^{-3}} = 1990.03$$

ويمكن تحديد مقدار هبوط الضغط على الطول L من الأنبوب من معادلة بوازيه :

$$\Delta P = \frac{4\mu L V_{max}}{R^2} = \frac{4 \times 1.003 \times 10^{-3} \times 1 \times 0.2}{(0.01)^2} = 8.024 \text{ N/m}^2 \quad (23)$$

الحل الرقمي Numerical Solution:

من أجل محاكاة جريان بوازيه باستخدام الخوارزمية الموضحة في الشكل (3) قمنا بإعداد برنامج مكتوب بلغة C++ نحصل من خلال تنفيذه على حقل الضغط والسرعة في المجال المدروس، نطبق الشروط الحدية للسرعة والضغط على حدود المجال حيث يتم إدخال قيمة الضغط على مدخل الأنبوب P_{in} وعلى المخرج P_{out} ، ثم نُحوّل كافة المعطيات إلى الشكل اللابعدي على اعتبار أن الطول المرجعي هو قطر الأنبوب d والسرعة المرجعية هي السرعة الوسطية للجريان V_{avg} أما القيمة المرجعية للضغط فهي ρV_{avg}^2 ، وبالتالي يصبح لدينا:

$$L_d = L/d = 1/0.02 = 50$$

$$H_d = 0.02/0.02 = 1$$

$$V_{max_d} = V_{max} / V_{Ref} = 0.2/0.1 = 2$$

لتوليد الشبكة الرقمية على المجال المعطى نختار عدد أعمدة $N = 81$ وعدد أسطر $M = 21$ وبالتالي يكون عدد

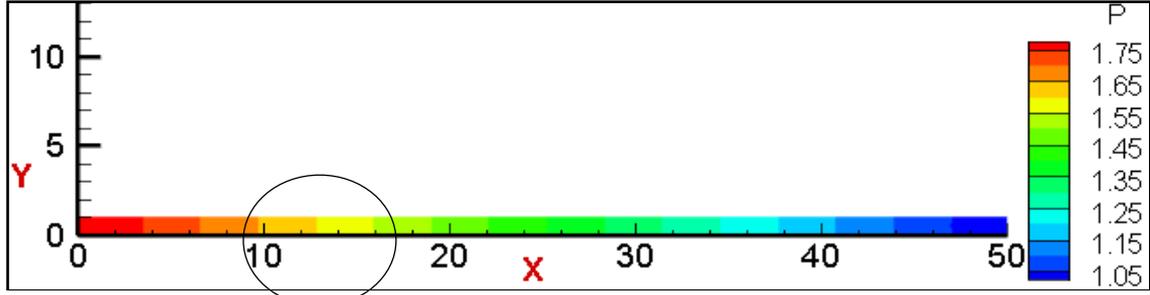
$$\text{العقد الكلي في المجال } \max d = N \times M = 1701$$

يتم حساب السرعة بحلقة تكرارية بحيث تتضمن بداخلها حلقة تكرارية لحساب الضغط أي عند كل تكرار للسرعة يتم حل معادلة بواسون، وهكذا تستمر العملية التكرارية حتى تتناقص قيمة الخطأ بشكل تدريجي إلى الدقة المطلوبة. ثم يقوم البرنامج بتصدير النتائج على شكل ملف نصي (dat) يتم رسمه من خلال برنامج Tecplot 2015. يوضح الشكل (15) خرج البرنامج وعدد التكرارات التي تقارب الحل عندها.

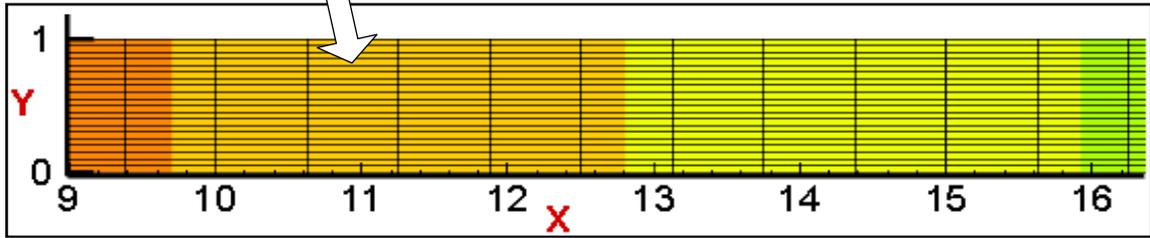
```
e:\Master\Poiseuille\debug\Poiseuille.exe
Ld = 50
Hd = 1
N = 81
M = 21
DX = 0.625
DY = 0.05
Water Neu = 1.00501e-006
Number of Nodes=1701
*****
Re = 1990.03
Pin = 18.024 Pascal
Pout = 10 Pascal
Pd1 = 1.80601
Pd2 = 1.002
*** <Poisson> Solution Obtained at k = 651 iteration from : 10000 ****--kv = 1
Maxu = 1-----Kv = 1
*** <Poisson> Solution Obtained at k = 373 iteration from : 10000 ****--kv = 2
Maxu = 0.0180175-----Kv = 2
*** <Poisson> Solution Obtained at k = 142 iteration from : 10000 ****--kv = 3
Maxu = 0.000615505-----Kv = 3
*** <Poisson> Solution Obtained at k = 21 iteration from : 10000 ****--kv = 4
Maxu = 1.98807e-005-----Kv = 4
*** <Poisson> Solution Obtained at k = 1 iteration from : 10000 ****--kv = 5
Maxu = 1.17823e-006-----Kv = 5
***** <Velocity> Solution Obtained at Kv = 5 iteration from : 10000*****
Press any key to continue . . .
```

الشكل (15) خرج البرنامج

يبين الشكلين (16,17) خريطة لونية لحقل الضغط على طول الجزء المدروس من الأنبوب L :

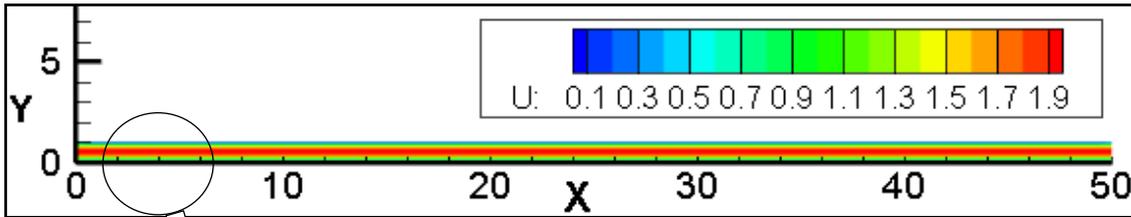


الشكل (16) خريطة لونية لحقل الضغط



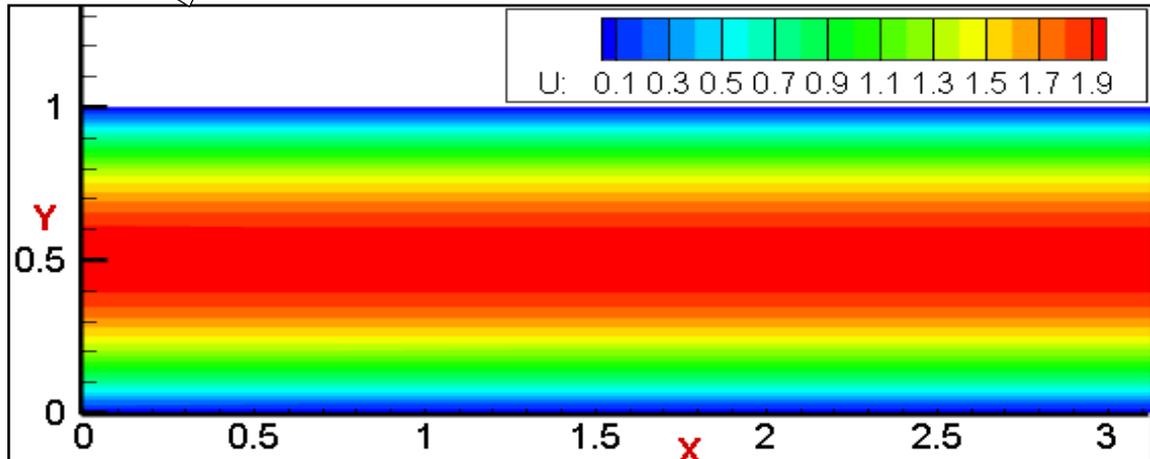
الشكل (17) حقل الضغط ضمن جزء مكبر من المجال السابق

يبين الشكل (18) خريطة لونية لحقل السرعة على طول الجزء المدروس من الأنبوب L :



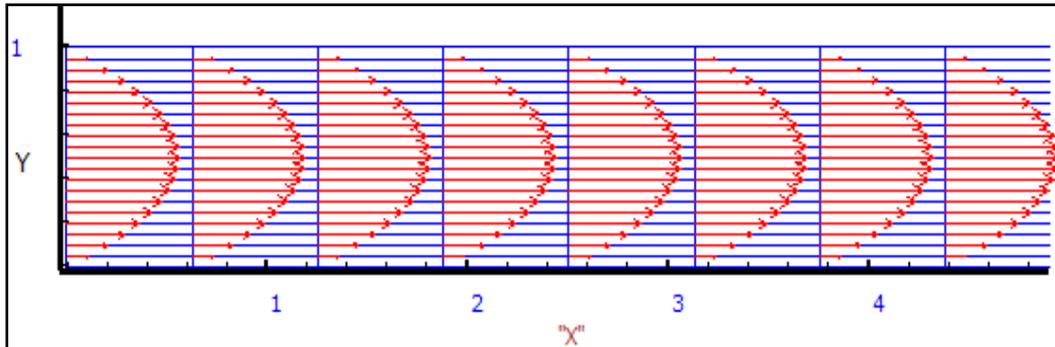
الشكل (18) خريطة لونية لحقل السرعة

يبين الشكل (19) خريطة لونية لحقل السرعة ضمن جزء مكبر من المجال السابق:



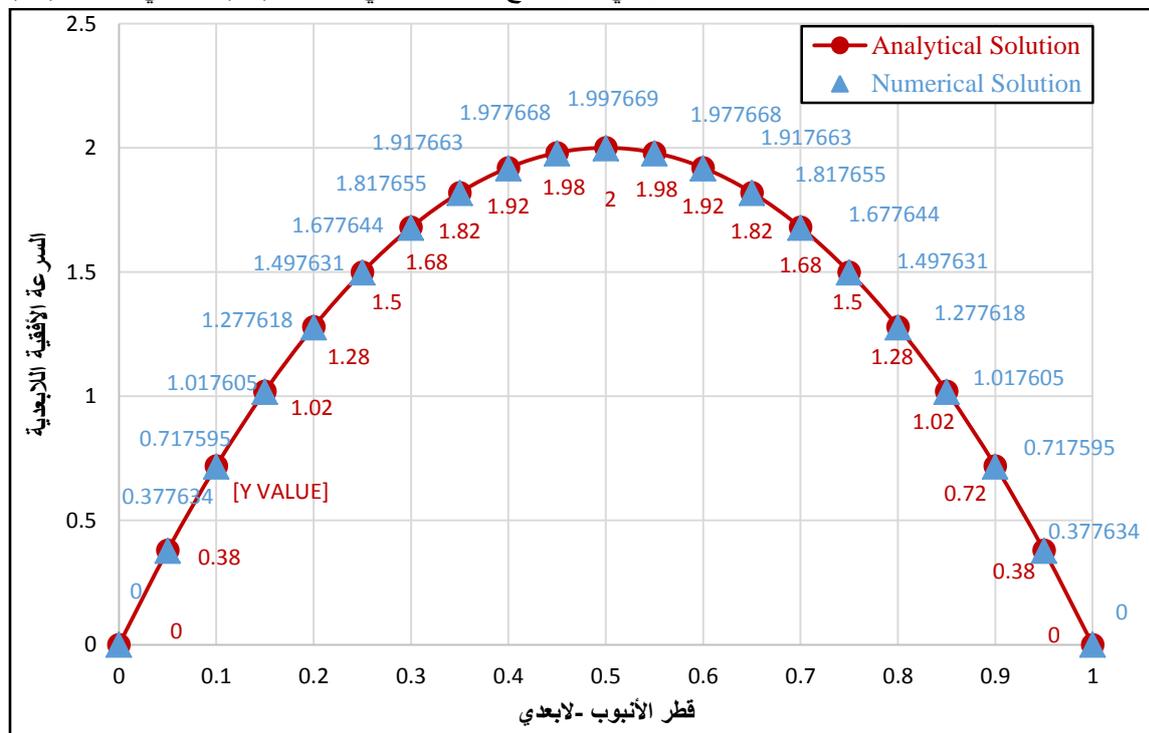
الشكل (19) حقل السرعة ضمن جزء مكبر من المجال

يبين الشكل التالي بروفيل أشعة حقل السرعة ضمن الجزء المكبّر من المجال:



الشكل (20) بروفيل أشعة حقل السرعة

للتأكد من صحة الحل الرقمي نقارنه مع الحل التحليلي العلاقة (20) كما في الشكل (21):



الشكل (21) مقارنة الحل الرقمي مع الحل التحليلي في جريان Poiseuille

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث تقديم طريقة جديدة من أجل تعميم الشبكة الرقمية حول الجسم المغمر، بالإضافة إلى تهيئة معادلات الجريان للحل رقمياً، ومن أجل اختبار الخوارزمية المعتمدة للحل الرقمي درسنا جريان بوازيه حيث تبين من خلال المقارنة بين الحلين الرقمي والتحليلي أن النتائج تتطابق بشكل جيد جداً وهذا يُظهر فعالية الخوارزمية المعتمدة لتطبيقها على أي جسم مغمر (السفينة مثلاً).

الخطوة القادمة هي اختيار الجسم العائق وتوضعه الهندسي داخل الشبكة الرقمية، وحساب حقل السرعة والضغط حول الجسم بفعل الأمواج المتولدة والتي تتطلب دراسة الشروط الحدية على السطح الحر بشكل مفصل.

المراجع:

- [1] ISSA, H. Y. "*Simulation numérique d'un bassin à houle par la résolution directe des équations de Navier –Stokes. Application: étude de l'écoulement autour d'un obstacle immergé*". Thèse Doctorat, ENSMA, France, 2006, pp 241.
- [2] ANANTHAKRISHNAN, "*Nonlinear diffraction of waves over a submerged body in a real fluid*". Proc. 8th, Int. Offshore and Polar Ing. Conf., Montreal, 1998, pp288-293.
- [3] ISSA, H. Y. "*Numerical Analyses*". Master Lectures, Department of Marine Engineering, Tishreen University, Syria, 2012, pp 63.
- [4] د. حسن علي، "ميكانيك الموائع"، قسم الهندسة البحرية - جامعة تشرين، 2006، pp 353-355.