

## Using Game Theory For Allocation Of Transmission Losses Between The Investors in Deregulated Electrical Power System

Dr. Massoud Sabyh\*  
Dr. Tammam Haydar\*\*  
Rama Salloum\*\*\*

(Received 1 / 10 / 2019. Accepted 24 / 11 / 2019)

### □ ABSTRACT □

Liberalization and deregulation in the electricity sector leads to competition in the energy market. Since the main part of electricity pricing is the fair and equitable allocation of system losses, allocation of transmission loss has become a contention issue among the electricity producers and consumers. It is difficult to find a formula for resolving the transmission loss allocation problem because of the fact that transmission losses are not linear in relation to loads. Different methods are used to allocate transport losses, but most of these methods lack economic fundamentals and also include complex calculations and time-consuming calculations. The concept of Shapley Value adopted from cooperative game theory is used to deal with the fairness of the allocation of loss. Where this method takes into consideration the configuration of the network and the relationships between the players and there is no need to specify the sharing factors of losses to be allocated to the supply side and demand side. The results are tested using the network IEEE 14 bus system.

**Keywords:** Loss Allocation, Market Power, Game Theory, Shapley Value

---

\* Professor, Faculty of Mechanical & Electrical Engineering, University of Tishreen, Lattakia, Syria.

\*\*Assistant Professor, Faculty of Mechanical & Electrical Engineering, University of Tishreen, Lattakia, Syria.

\*\*\*Postgraduate Student, Faculty of Mechanical & Electrical Engineering, University of Tishreen, Lattakia, Syria.

## استخدام نظرية اللعبة في توزيع ضياعات النقل بين المستثمرين في نظام طاقة كهربائي مخصص

د. مسعود صبيح \*

د. تمام حيدر \*\*

راما سلوم \*\*\*

(تاريخ الإيداع 1 / 10 / 2019. قُبِلَ للنشر في 24 / 11 / 2019)

### □ ملخص □

أدى تحرير قطاع الكهرباء إلى وجود منافسة في سوق الطاقة تقتضي التوزيع العادل والمنصف لضياعات النظام. ولأن الضياعات في شبكات النقل ليست تابعة خطأً للأحمال كان من الصعب إيجاد صيغ (بنى) رياضية بسيطة لتوزيعها بين المستثمرين وبين المستهلكين المستجرين للطاقة من مجموعات توليد مستثمر ما. يتم استخدام طرق مختلفة لتحديد ضياعات النقل، ولكن معظم هذه الطرق تفتقر إلى أسس اقتصادية فنية وتشمل أيضاً عمليات رياضية معقدة وحسابات مستهلكة للوقت. في هذا السياق يأتي استخدام نظرية اللعبة (الشكل التعاوني) من أجل توزيع عادل لهذه الضياعات. يستند الحساب باستخدام هذه النظرية إلى تركيب الشبكة وعلاقات اللاعبين بعضهم مع بعض من دون الحاجة لعوامل إضافية كعوامل المشاركة بالضياع للمولدات والأحمال. تختبر النتائج باستخدام شبكة 14 قضيب تجميع IEEE 14 bus system.

الكلمات المفتاحية: تخصيص الضياعات، سوق الطاقة، نظرية اللعبة، قيمة شابلي

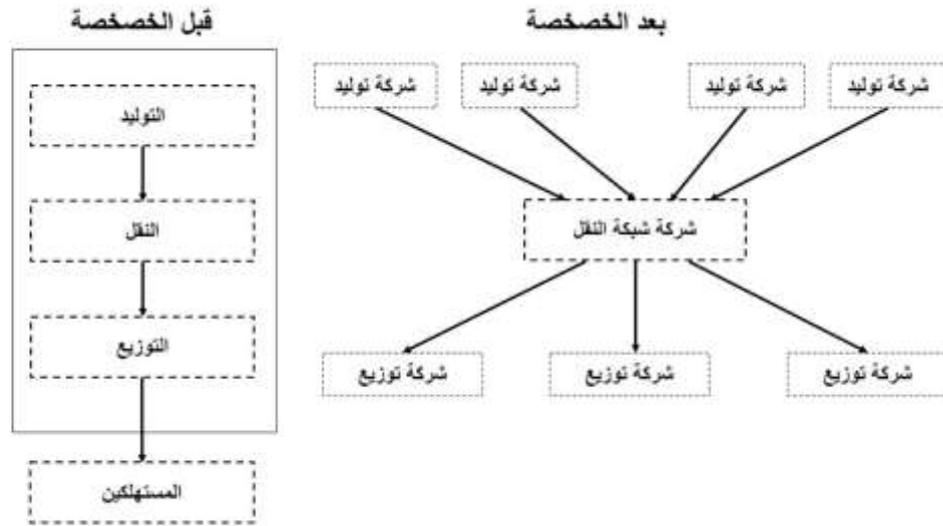
\*أستاذ- كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

\*\*مدرس- كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

\*\*\*طالبة دراسات عليا (ماجستير)- كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

**مقدمة:**

بدأت البنية التقليدية للنظام القائمة على الاحتكار والبنى المتكاملة عمودياً بالتغير إلى شكل حديث مفتوح يكثر فيه المستثمرون في مجال التوليد والنقل وتتم فيه تغذية المستهلكين في بيئات تنافسية كما هو موضح بالشكل (1). اذاً يمكن توصيف هذا التحول بسمتين أساسيتين وهما: إعادة الهيكلة والخصخصة. أما إعادة الهيكلة فهي تغير في شكل تبادل الطاقة أو اتجاهات حركتها في الشبكة. وأما الخصخصة فهي عملية نقل الملكية من الحكومة إلى القطاع الخاص الذي يعمل في بيئة تتنافس فيها الشركات على ثلاثة مستويات: التوليد والنقل والتوزيع.



الشكل (1) بنية نظام الطاقة الكهربائي قبل الخصخصة وبعدها

➤ يمكن تمييز أربعة نماذج أساسية لأسواق الطاقة في الوقت الراهن [1]، حيث يمثل نموذج المنافسة بالتجزئة Retail Competition Model سوق الطاقة الكهربائية الأكثر تحريراً.

أما في الجمهورية العربية السورية وبعد صدور القانون رقم 32 بتاريخ 2010/11/2 أصبح نقل الكهرباء محصوراً بمؤسسة النقل المرتبطة بالوزارة، حيث تلتزم مؤسسة النقل بشراء الكهرباء المنتجة من محطات التوليد ويبيعها لمؤسسة التوزيع والمشاركين الرئيسيين. وبالتالي يمكن تصنيف سوق الكهرباء في سوريا كنموذج وكيل شراء وحيد Single Purchasing Agent.

**الدراسة المرجعية**

إن إحدى القضايا الرئيسية لنظام الطاقة المعاد تشكيله هي توزيع ضياعات النقل بين المساهمين بشكل عادل ومنصف. استخدمت طرق متعددة لتوزيع ضياعات النقل، في المرجع [2] تم تقديم طريقة التحديد المتزايد للضياعات The incremental allocation of losses والتي تحسب أي تغير في الضياعات عند أي تغير في الاستطاعة المحقونة، وباعتبار أن هذه الطريقة تستند إلى الحساب الرياضي دون أساس فيزيائي واضح فإنها تحدد الضياع بين

قضبان تجميع الشبكة بدون منهجية واضحة وبالتالي لا يمكن استخدامها كأسلوب عادل لتوزيع الضياع. وفي المرجع [3] اقترحت طريقة تستند إلى سريان الاستطاعة المادي في النظام وكون هذه الطريقة تستند إلى المساهمة الفعلية لكل حمل بتيار الخط الكلي، فإنها تقدم تقديراً عادلاً إلى حد كبير للضياعات المسببة من قبل كل حمل. بمعنى أن، الأحمال التي تسبب زيادة في تيار الخط وبالتالي زيادة الضياع في الخط سوف تتحمل كلفة هذه الزيادة. بينما الأحمال التي تسبب انخفاضاً في تيار الخط سوف تكافأ. بكلا الحالتين فإن التكلفة أو المكافأة ستكون عادلة ومناسبة. كما يمكن استخدام هذه الطريقة لتوزيع الضياع بين الأحمال على نفس قضيب التجميع وبطريقة عادلة. تستند الطريقة المقترحة في المرجع [4] إلى قوانين الدارات وتحليل تبادلات سريان الاستطاعة مما يجعلها تتطلب الكثير من الحسابات والوقت الطويل.

تضمنت المراجع [5] و [6] عرضاً للطريقتين الأكثر شهرة واعتماداً، وهما طريقة المحاصصة (pro rata) التي توزع الضياعات بين المستثمرين بحسب مستوى استهلاكهم أو انتاجهم للطاقة وهي طريقة بسيطة لكنها لا تأخذ بالاعتبار طولوجيا الشبكة وبالتالي فهي لا تشجع على بناء محطات التوليد بالقرب من الأحمال. أما الطريقة الثانية فهي طريقة المشاركة النسبية (Proportional Sharing) وهي أكثر تعقيداً من الطريقة السابقة ولكنها تعطي نتائج أكثر عدالة من طريقة المحاصصة. بينما تضمن المرجع [7] بالإضافة للطرق السابقة طريقة تحليل تابع الضياع Loss Function Decomposition حيث تخصص هذه الطريقة الضياعات لكل قطاع ولا تأخذ بالاعتبار فرضية أن 50% من الضياعات تخصص للأحمال و 50% منها للمولدات، ولكن يمكن أن ينتج عن هذه الطريقة ضياعات سالبة قد تكون مقبولة أو غير مقبولة تبعاً للسوق والمشاركين فيه.

اقترحت أيضاً في المرجع [8] طريقة مستندة إلى نظرية النواة Nucleolus وهي إحدى مفاهيم تحليل وحل مسائل نظرية اللعبة التعاونية. قدمت من قبل شميدلر Schmeidler في عام 1969 وتفترض بأن لكل لعبة نواة واحدة فقط مالم يكن مركز اللعبة فارغاً. ولكن عند استخدام هذه الطريقة للشبكات الكبيرة فإنها تأخذ وقتاً طويلاً. تقدم نظرية اللعبة آلية رياضية لتقييم التفاعل بين المشاركين المختلفين في أسواق تنافسية وتساهم بحل النزاعات بين اللاعبين [9]، كما تم استخدامها في هندسة نظم القدرة الكهربائية في اختيار استراتيجية ملائمة لتخطيط الشبكات الكهربائية استناداً إلى أسس ومعايير مختلفة [10]، واستخدمت نظرية اللعبة أيضاً في توزيع كلفة توسيع خطوط النقل في المرجع [11].

تم استخدام نظرية اللعبة في المراجع [12] و [13] و [14] لتوزيع الضياعات ولكن من دون مقارنة نتائج هذه الطريقة مع طرق أخرى كما أنه لم يتم تطبيق الطريقة على أكثر من سيناريو، وهو ما سنقوم بإنجازه في هذا البحث. نتناول في هذا البحث تطبيق نظرية اللعبة (الشكل التعاوني) في حل مسألة توزيع كلفة الضياعات في نظام طاقة كهربائي مخصص.

### أهمية البحث وأهدافه:

رافق هذا التحول الأنف الذكر في قطاع الكهرباء جملة من التحديات الفنية والعلمية وكذلك الاقتصادية، كما جاء هذا التحول بمسائل جديدة تتطلب المعالجة ووضع الحلول، ومن أهم هذه المسائل الفنية - الاقتصادية موضوع الضياعات في الشبكة ونقاسم كلفتها بين شركات التوليد المختلفة. إن حساب هذه الضياعات اللاخطية بشكل دقيق تماماً هو أمر على درجة من التعقيد ويحتاج إلى خوارزميات متقدمة عن كل تلك المستخدمة حالياً. تعد دراسة الضياعات وتوزيع

كلفتها أمراً مهماً فهي في نهاية الأمر تعني توليداً إضافياً وبالتالي كلفة إضافية ينبغي على الشركة المولدة بالمشاركة مع المستهلكين الذين يستجرون طاقتهم الكهربائية منها تسديدها. تقع مسؤولية توزيع هذه الضياعات بشكل عادل على عاتق مشغل النظام المستقل (ISO) Independent System Operator وهو في أحيان كثيرة كيان غير ربحي مهمته الأساسية هي المحافظة على أمن نظام الطاقة، وإدارة تشغيل السوق، وضبط أسلوب التشغيل بما يحقق العدالة بين المستثمرين. نتطرق في هذا البحث لاستخدام نظرية اللعبة كتنقية نكاه اصطناعي متقدمة في توزيع هذه الضياعات بشكل عادل بين الشركات المولدة (في نظرية اللعبة "لاعبون") والمرتبطة كل منها بمستهلكين محددين.

### طرائق البحث ومواده:

إن إحدى أهم القضايا في ظل إعادة هيكلة سوق الكهرباء وفتح المجال للمنافسة فيها هي توزيع ضياعات النقل بين المستثمرين، كما أن التحديد الدقيق لهذه الضياعات وحصص كل من المولدين منها هو أمر مهم لتحقيق العدالة أولاً وأيضاً لمراقبة أداء شبكة النقل، لهذا الغرض طورت واستخدمت طرق مختلفة بسيطة نسبياً ولكن بقيت دقتها موضع تساؤل ولهذا الغرض أيضاً نقدم طريقة الحساب باستخدام نظرية اللعبة.

### الطرق الحالية المستخدمة لتقاسم الضياعات

#### طريقة المحاصصة Pro rata:

هي أحدث الطرق المستخدمة وأكثرها بساطة لتحديد الضياعات. حيث تحسب الضياعات عند كل قضيب تجميع كنسبة من الضياعات الكلية في الشبكة تكافئ نسبة التوليد أو الحمل عند القضيب من التوليد أو الحمل الكلي في الشبكة كما في المعادلتين [6]:

$$L_{Gi} = \frac{P_{loss}}{x} \times \frac{P_{Gi}}{P_G} \quad (1)$$

$$L_{Dj} = \frac{P_{loss}}{x} \times \frac{P_{Dj}}{P_D} \quad (2)$$

حيث:

$L_{Dj}$ : الضياعات عند قضيب الحمل  $j$   $L_{Gi}$ : الضياعات عند قضيب التوليد  $i$

$P_{Gi}$ : استطاعة الخرج [MW] الكلية للمولدات عند القضيب  $i$   $P_G$ : الاستطاعة الفعلية الكلية المولدة في النظام

$P_{Dj}$ : الاستطاعة الفعلية المستهلكة عند القضيب  $j$   $P_D$ : الاستطاعة الفعلية الكلية المستهلكة

$x$ : عامل الضرب ويستخدم لتحديد توزيع الضياعات بين جميع المشتركين بالسوق بحيث توزع الضياعات إما بنسبة 100% للأحمال أو بنسبة 50:50 للأحمال والمولدات.

$P_{loss}$ : ضياعات نقل الطاقة للنظام

كما يتضح من المعادلتين السابقتين أن الضياعات عند كل قضيب تتعلق فقط بالاستطاعة المولدة أو المستجرة عند هذا القضيب وهي مستقلة تماماً عن طبولوجيا الشبكة وهذا يعني أن لحملين متساويين نفس كمية الضياعات بغض النظر عن موقعهما في الشبكة. وبالتالي فإن هذه الطريقة لا تدعم التوجه لوضع التوليد قريباً من الحمل وذلك بهدف تقليل ضياعات النظام.

#### طريقة المشاركة النسبية Proportional Sharing:

تتترض هذه الطريقة أن سريانات الاستطاعة التي تدخل عقدة ما تقسم بشكل متناسب بين سريانات الاستطاعة الخارجة من العقدة، ويمكن من خلالها تحديد مساهمة المولدات أو الأحمال إلى كل خط بالاستناد إلى حساب عوامل التوزيع الطبولوجية.

تحدد هذه الطريقة مقدار الاستطاعة المستجرة من مولد محدد لتغذية حمل محدد أو مقدار ما يستهلكه حمل محدد من مولد محدد. وذلك من خلال تتبع الاستطاعة من المولدات باتجاه الأحمال (Downstream tracing) أو تتبع الاستطاعة من الأحمال باتجاه المولدات (Upstream tracing) كما توضح المعادلتين التاليتين [15]:

$$P_{Gij} = \frac{P_{Gi}}{P_i} \sum_{j=1}^n [A_d]_{ij}^{-1} P_{Lj} \quad j=1, \dots, n \quad (3)$$

$$P_{Lij} = \frac{P_{Li}}{P_i} \sum_{j=1}^n [A_u]_{ij}^{-1} P_{Gj} \quad j=1, \dots, n \quad (4)$$

حيث:

$P_{Gij}$ : مساهمة المولد  $G_i$  لتغذية كل الأحمال  $j$  في  $P_{Lij}$ : استهلاك الحمل عند القضيب  $i$  من جميع الشبكة المولدات في الشبكة

$P_{Gi}$ : التوليد عند القضيب  $i$   $P_i$ : الاستطاعة الكلية الداخلة إلى العقدة  $i$  (المعادلة (3)

$P_{Lj}$ : الحمل عند العقدة  $j$   $P_{Li}$ : الحمل عند القضيب  $i$

$P_i$ : الاستطاعة الكلية الخارجة من العقدة  $i$  (المعادلة (4)  $P_{Gj}$ : التوليد عند العقدة  $j$

يتم إيجاد المصفوفتين  $A_d$  و  $A_u$  من خلال المعادلتين (5) و (6).

$$[A_d]_{ij} = -C_{ji} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\frac{|P_{ji}|}{P_j} & j \in \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5) \quad [A_u]_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\frac{|P_{ij}|}{P_j} & j \in \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

$A_d$ : مصفوفة تتبع السرينات باتجاه الأحمال (Downstream matrix)  $A_u$ : مصفوفة تتبع السرينات باتجاه المولدات (Upstream matrix)

$\alpha$ : مجموعة العقد التي تتغذى من العقدة  $i$  بشكل مباشر  $\beta$ : مجموعة العقد التي تغذي العقدة  $i$  بشكل مباشر من أجل توزيع الضياعات بين المولدات والأحمال، نقوم بداية بتحديد التوليد والحمل النهائيين لكل قضيب تجميع من خلال:

$$P'_{Gi} = \frac{P_{Gij} + P_{Gi}}{2} \quad (7)$$

حيث:

$P'_{Gi}$ : الاستطاعة الكلية التي تستهلكها جميع الأحمال من المولد  $G_i$

وبالتالي:

$$L_{Gi} = P_{Gi} - P'_{Gi} \quad (8)$$

حيث:

$L_{Gi}$ : الضياع المخصص للمولد  $i$   $P_{Gi}$ : التوليد الفعلي عند القضييب  $i$   
بنفس الشكل نحسب مقدار الاستهلاك الكلي لكل قضييب حمل من المولدات في الشبكة بالشكل:

$$P'_{Li} = \frac{P_{Lij} + P_{Li}}{2} \quad (9)$$

وبالتالي:

$$L_{Di} = P'_{Li} - P_{Li} \quad (10)$$

حيث:

$L_{Di}$ : الضياع المخصص للحمل عند القضييب  $i$   $P_{Li}$ : الحمل الفعلي عند القضييب  $i$

$P'_{Li}$ : الاستطاعة الكلية التي يستهلكها الحمل  $i$  من المولدات في النظام.

يجب أن يشجع توزيع الضياعات بين المولدين والمستهلكين لاتخاذ الاجراءات التصحيحية بهدف تخفيض حصتهم من الضياعات.

مشكلة هذه الطريقة هي أن توزيع سريانات الاستطاعة مبني على مبدأ المشاركة النسبية الذي يفتقر إلى التبرير الفيزيائي/الاقتصادي. هذا الخروج عن السلوك الكهربائي للشبكة قد يشير إلى أن هذه الاستراتيجية لتخفيض الضياعات ربما لا تكون مرضية من الناحية الفنية. وبالتالي يعتبر عدم وجود ارتباط مبرر بين السلوك الكهربائي للشبكة وتتبع سريانات الاستطاعة الناتج من مبدأ المشاركة النسبية عاملاً مقيداً لاستخدام هذه الطريقة بشكل دقيق.

#### نظرية اللعبة واستخدامها لتوزيع الضياعات

يعتبر العالم الفرنسي Emil Borel أول من طرح فكرة نظرية اللعبة عام 1920، إلا أن الفضل الكبير لبرهنة النتائج الأساسية لهذه النظرية يرجع للعالم Jhon Von Neumann بعد أن نشر مؤلفه الشهير "نظرية اللعبة والسلوك الاقتصادي" (Theory of Game and Economic Behaviour) عام 1944 [16] وذلك بالمشاركة مع Oskar Morgenstren.

طورت نظرية اللعبة أيضاً من قبل الرياضي Jhon Nash سنة 1950 الذي كان أول من أعطى تفسيراً لمعنى الاستراتيجية المثالية للعبة وبين أن الألعاب المنتهية تملك دائماً نقطة توازن حيث يختار جميع اللاعبين أفعالاً هي الأفضل مع إدراكهم لتحركات خصومهم. أول التطبيقات لتوازن Nash كان من قبل Melvin Dresher و Merill Flood سنة 1950 بما يعرف بمعضلة السجين.

إن نظرية اللعبة هي إحدى الوسائل الحديثة التي تستخدم لاتخاذ القرارات في الحالات والمواقف التي تتميز بوجود صراع بين الوحدات المتنافسة المستقلة، حيث لا يستطيع متخذ القرار أن يسيطر على العوامل المؤثرة عليه في ظل التغيرات الحاصلة في السوق.

إن هيئات (سلطات) سوق الطاقة يجب ان تميز وتصحح الحالات التي تسيطر فيها بعض الشركات على سوق الطاقة. ونحن هنا نأخذ بالاعتبار منهجيات مستندة الى نظرية اللعبة يمكن أن تستخدم لتمييز الحالات غير التنافسية في اسواق الطاقة المحررة أو المعاد هيكلتها (تحليل الصفقة من وجهة نظر منسق السوق) وتقديم دعم من اجل تقليل المجازفات المتضمنة في قرارات الاسعار ( تحليل الصفقة من وجهة نظر المشترك).

## تصنيف الألعاب

- وفقاً لعدد اللاعبين:  
ألعاب بين لاعبين (two person games)  
ألعاب بين n لاعب (N person games) حيث  $n \geq 3$
- وفقاً لطبيعة تابع الدفعات:  
ألعاب ذات مجموع صفري (Zero-sum games): حيث ما يخسره لاعب يربحه الآخر.  
ألعاب ذات مجموع غير صفري (Non zero sum games): لا يشترط أن يكون مجموع عوائد اللاعبين مساوياً للصفر.
- وفقاً لعدد الاستراتيجيات:  
ألعاب محدودة (Finite game): حيث عدد الاستراتيجيات المتاحة منته.  
ألعاب مستمرة (continuous game): حيث عدد الاستراتيجيات المتاحة غير منته.
- وفقاً للمفاوضات قبل اللعب:  
ألعاب تعاونية (Cooperative games): حيث يشكل اللاعبون تحالفات وينسقون استراتيجياتهم من خلال بناء تحالفات قبل بدء اللعبة.  
ألعاب غير تعاونية (Non-Cooperative game): الاتصال والتنسيق بين اللاعبين غير ممكن.  
في بحثنا هذا تم استخدام نظرية اللعبة التعاونية (التحالفية) (Coalitional) Cooperator game حيث الهدف منها هو تعزيز التعاون بين اللاعبين وتحقيق هدف نهائي يحقق مصلحة الجميع.

## الألعاب التعاونية وتوزيع الكلفة

- تمثل الألعاب التعاونية حالات يتم فيها التعاون بين اللاعبين من خلال تشكيل تحالفات قبل اللعب وتنسيق استراتيجياتهم لتحقيق أهدافهم. من المفترض هنا أن كل مجموعة من اللاعبين يمكن أن تشكل تحالفاً وتلتزم باتفاق يعطيها مقدراً معيناً من الربح (الفائدة) ويسمى المقدار الأعظمي الذي يمكن أن ينتج من التحالف بقيمة التحالف.
- لحل هذا النوع من الألعاب لدينا ما يسمى "مفهوم الحل" solution concept وهنا نميز حالتين:
- مفهوم الحل وحيد القيمة A single-valued solution concept: هو تابع ينسب لكل لعبة تعاونية متجه  $R^N$  يشير إلى المقدار الذي يحصل عليه كل لاعب.
  - مفهوم حل المجموعة A set solution concept: هو تابع ينسب لكل لعبة تحالفية مجموعة من المتجهات في  $R^N$ . مفهوم الحل وحيد القيمة يمثل القاضي أو المحكم الذي يوصي اللاعبين بكيفية تقسيم قيمة التحالف بين أعضائه بينما يشير مفهوم حل المجموعة إلى أقسام أكثر احتمالية من غيرها.
- لا يتم في نظرية اللعبة التعاونية التركيز على مجموعة الخيارات المتوفرة لكل عميل (لاعب) كما هو الحال في الألعاب غير التعاونية وإنما يتم التركيز على ميزة تجميع (تشكيل) التحالفات لتحقيق الهدف العام للعبة، حيث تبحث نظرية اللعبة التعاونية في أسئلة، مثل: أي المجموعات من اللاعبين (التحالفات) سوف توافق على إبرام اتفاقية ملزمة؟ أي الاتفاقيات التي من المتوقع أن يتم التوصل إليها من قبل اللاعبين (وأياً ليست معقولة)؟ أي الاتفاقيات التي من المتوقع أن تقترح من قبل القاضي أو المحكم؟ لهذا السبب يمكن أن تدعى الألعاب التعاونية بالألعاب التحالفية لتأكيد حقيقة أن الحالات الممثلة من خلال الألعاب التعاونية تتضمن قضايا متعلقة بتكوين التحالفات من قبل اللاعبين.

### قيمة شابلي Shapley value

قدمت طريقة شابلي لأول مرة في عام 1953. هدف شابلي الأساسي كان أن يجيب عن السؤال " ما مقدار ما يرغب اللاعب بدفعه من أجل المشاركة باللعبة". والجواب عن ذلك السؤال يعتمد على ما يتوقع اللاعب أن يكسبه من المشاركة في اللعبة.

قيمة شابلي هي مفهوم حل وحيد للعبة تحالفية. تحدد لكل لعبة تحالفية قيمة أو عائداً يمثل الدفع (أو الربح) الذي يتوقع أن يحصل عليه كل لاعب من المشاركة في اللعبة، وتتميز بعدة خصائص مهمة هي: الاستقرار، الكفاءة، التناظر والتجميع.

باعتبار أن  $\varphi$  هو تابع يعين المتجه الحقيقي  $\varphi(w) = (\varphi_1(w), \varphi_2(w), \dots, \varphi_n(w))$  لكل تابع مميز في لعبة تتألف من  $n$  لاعب.  $\varphi_i(w)$  يمثل قيمة اللاعب  $i$  في لعبة لها تابع مميز  $w$ . إن مساهمة اللاعب  $i$  في التحالف  $S$  هي القيمة التي أضافها اللاعب  $i$  إلى التابع من خلال انضمامه إلى التحالف. من أجل كل تحالف  $S$  لا يحتوي اللاعب  $i$  ( $S \subset N \setminus i$ )، فإن  $P_S^i$  هو احتمال انضمام اللاعب  $i$  إلى التحالف  $S$ ، و  $P^S$  هو احتمال تشكيل التحالف  $S$ . يمكن اعتبار أن  $P_S^i$  و  $P^S$  تمثلان المساهمة الحدية للاعب  $i$  في التحالف  $S \cup \{i\}$ .

لتوصيف تابع قيمة شابلي، تحسب قيمة التابع المميز من أجل كل التحالفات الممكنة للاعبين وبناء على التابع المميز المشكل يتم الحصول على الحصة المخصصة لكل لاعب باستخدام المعادلة (11):

$$\varphi_i(w) = \sum_{S \subset N \setminus i} P_S^i P^S [w(S \cup i) - w(S)] \quad (11)$$

باعتبار أن احتمالات تشكيل جميع التحالفات متساوية وتساوي 1، فإن

$$P^S = 1, \forall S \subset N \quad (12)$$

$P_S^i$  هو احتمال وجود التحالف  $S$  عندما ينضم اللاعب  $i$  إلى التحالف ويعطى بالمعادلة (13):

$$P_S^i = \frac{|S|!}{|N|!} (|N| - |S| - 1)! \quad \forall S \subset N \setminus i \quad (13)$$

بتعويض المعادلتين (12) و (13) في المعادلة (11) نحصل على المعادلة التالية [17]:

$$\varphi_i(w) = \sum_{S \subset N \setminus i} \frac{|S|! (|N| - |S| - 1)!}{|N|!} * [w(S \cup i) - w(S)] \quad (14)$$

حيث:

$S$  التحالف الذي لا يتضمن اللاعب  $i$        $(S \cup i)$  التحالف بعد ضم اللاعب  $i$

$|S|$  عدد اللاعبين في التحالف       $N$  عدد اللاعبين الكلي في اللعبة

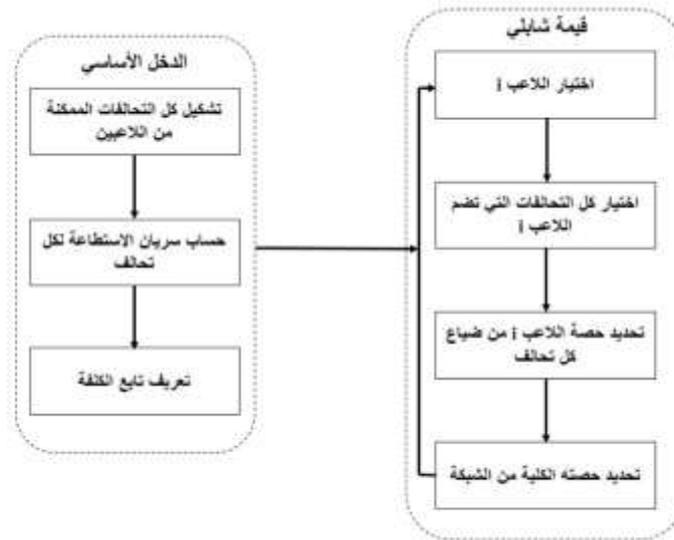
$w(S)$  التابع المميز المرتبط بالتحالف  $S$

يتم تحديد الضياعات في الشبكة وحصة المولدين والمستهلكين منها باستخدام الخوارزمية المبينة في الشكل (2). يقوم مشغل النظام بدراسة سريان الاستطاعة وفقاً لعدد الأحمال والمولدات في الشبكة وذلك من أجل تحديد توزيع سريان الاستطاعة عبر الشبكة لكل تحالف، بحيث يتم استخدام الشبكة من أجل تحالف واحد فقط في كل مرة يحسب فيها سريان الاستطاعة. بمعنى أنه، عند دراسة التحالف  $S$  فإن جميع التحالفات الأخرى تكون خارج النظام. من خلال الضياعات المحسوبة لكل التحالفات الممكنة في اللعبة والتي يبلغ عددها  $2^N$ ، فإن مشغل النظام يمكنه تحديد الضياعات لكل حمل أو مولد باستخدام قيمة شابلي المبينة في المعادلة (15).

$$L_i = \sum_{S \subset N \setminus i} \frac{|S|! (|N| - |S| - 1)!}{|N|!} * [LOSS(S \cup i) - LOSS(S)] \quad (15)$$

حيث:

L: حصة اللاعب i (مولد أو حمل) من الضياعات S: مجموعة من التركيبات المختلفة للتحالفات  
LOSS(s): تشير إلى كمية الضياعات المرتبطة بالتحالف S عندما لا يشارك اللاعب i ضمنه

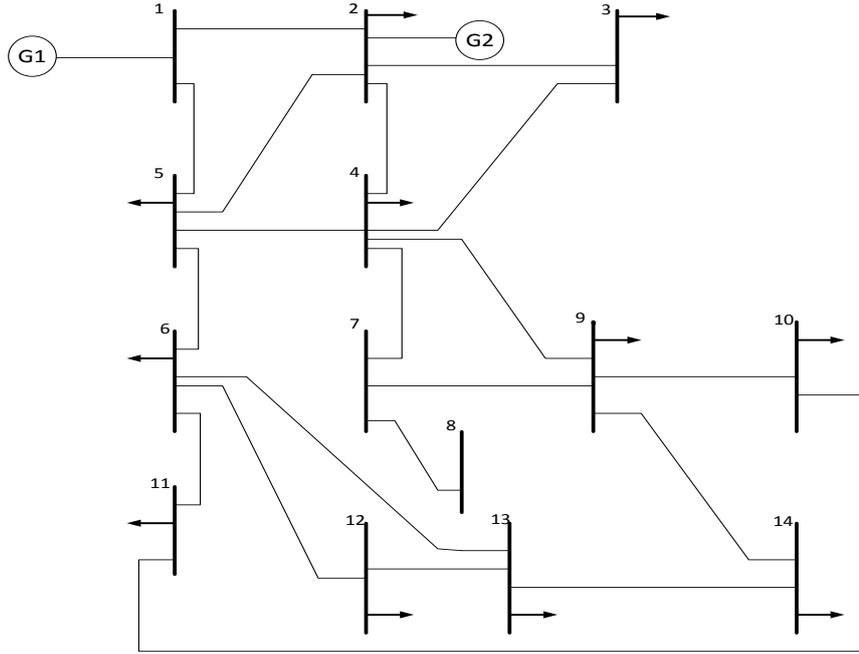


الشكل (2) خوارزمية طريقة شابلي المقترحة

يمكن تطبيق الخوارزمية المبينة في الشكل (2) من أجل أي نوع من الشبكات الشعاعية أو الحلقية، وذلك لأنها تعتمد نتائج سريان الاستطاعة بغض النظر عن توصيل قضبان الشبكة.

الحسابات لشبكة نموذجية

يبين الشكل (3) شبكة 14 قضيب تجميع IEEE 14 bus system، تم توضيح بياناتها بالملحق (1).



الشكل (3) شبكة 14 فضيف تجميع IEEE 14 bus system

سنقوم بتحديد سيناريو تشغيل محدد للشبكة نبين فيه المولدات والاحمال التي تتغذى منها، ثم سنقوم باختبار النتائج وفقاً لبعض الطرق الحالية المستخدمة ووفقاً للطريقة المقترحة في هذا البحث وهي نظرية اللعبة. اذا أخذنا بالاعتبار اربع عقود ثنائية من هذه الشبكة سيكون لدينا اربع لاعبين كما في الجدول (1):

الجدول (1) اللاعبين حسب السيناريو الأول

اللاعب	التوليد	الحمل
X1	G1	D3+D4+D6
X2	G1	D9+D14+D13+D10
X3	G2	D2+D5
X4	G2	D11+D12

سيناريو التشغيل الثاني يحوي أيضاً اربع لاعبين وهو مبين بالجدول (2).

الجدول (2) اللاعبين حسب السيناريو الثاني

اللاعب	التوليد	الحمل
X1	G1	D2+D4+D6
X2	G1	D9+D14+D13
X3	G2	D5+D6
X4	G2	D11+D12+D10

### النتائج والمناقشة:

- النتائج حسب طريقة المحاصصة **Pro rata**: باستخدام المعادلة (2) نقوم بتوزيع الضياعات بين قضبان التجميع بنسبة 100% للأحمال باعتبار عامل الضرب  $x$  مساوياً الواحد فتصبح العلاقة بالشكل:

$$L_{Dj} = P_{loss} \times \frac{P_{Dj}}{P_D}$$

حيث يمكن الحصول على  $P_{loss}$  من برنامج سريان الاستطاعة وهي تساوي 13.59، ويكون الضياع المحسوب للمولدين 1 و 2 مساوياً للصفر.

أما عند توزيع الضياعات بنسبة 50:50 لكل من الأحمال والمولدات، نقوم بالحساب وفق المعادلتين (1) و (2) حيث نعتبر أن  $x$  تساوي 2. يوضح الجدولان (7) و (8) نتائج الحساب بهاتين الحالتين.

- النتائج حسب طريقة المشاركة النسبية **Proportional sharing**: نقوم بداية بتشكيل المصفوفتين  $[A_u]_{14 \times 14}$  و  $[A_d]_{14 \times 14}$  وذلك وفق المعادلتين (5) و (6) ثم نشكل مقلوبيهما. نقوم بحساب مساهمة كل من المولدين 1 و 2 لتغذية كل حمل في الشبكة على حدا وفق المعادلة (3).

الجدول (3) مساهمة المولدات إلى كل حمل في الشبكة

مساهمة المولد 1 لكل الأحمال $P_{G1j}$		مساهمة المولد 2 لكل الأحمال $P_{G2j}$	
$P_{G12}$	16.845	-	-
$P_{G13}$	74.83	$P_{G23}$	17.935
$P_{G14}$	40.783	$P_{G24}$	6.624
$P_{G15}$	7.029	$P_{G25}$	0.578
$P_{G16}$	10.358	$P_{G26}$	0.852
$P_{G17}$	0	$P_{G27}$	0
$P_{G18}$	0	$P_{G18}$	0
$P_{G19}$	25.045	$P_{G19}$	4.068
$P_{G1-10}$	7.983	$P_{G1-10}$	0.955
$P_{G1-11}$	3.237	$P_{G1-11}$	0.266
$P_{G1-12}$	5.641	$P_{G1-12}$	0.464
$P_{G1-13}$	12.474	$P_{G1-13}$	2.588
$P_{G1-14}$	13.113	$P_{G1-14}$	2.72
المجموع $P_{G1j}$	217.340	المجموع $P_{G2j}$	37.053

الاستطاعة الكلية التي تستهلكها الأحمال من المولد 1 بحسب المعادلة (7):

$$P'_{G1} = \frac{217.340 + 232.2}{2} = 224.77$$

الاستطاعة الكلية التي تستهلكها الأحمال من المولد 2:

$$P'_{G2} = \frac{37.053 + 40}{2} = 38.526$$

ومن المعادلة (4) نحدد استهلاك كل حمل من المولدين 1 و 2 ثم باستخدام المعادلة (9) نحسب الاستطاعة الكلية التي يستهلكها كل حمل من المولدين في الشبكة. الجدول (4) يبين نتائج هذه الحسابات.

الجدول (4) استهلاك الأحمال من المولدات في الشبكة

استهلاك الأحمال من المولد 1		استهلاك الأحمال من المولد 2		$P'_{Li}$
$P_{Li1}$		$P_{Li2}$		
$P_{L21}$	17.66	$P_{L22}$	4.502	21.931
$P_{L31}$	81.037	$P_{L32}$	18.556	96.896
$P_{L41}$	43.35	$P_{L42}$	6.784	48.967
$P_{L51}$	7.319	$P_{L52}$	0.578	7.7
$P_{L61}$	10.784	$P_{L62}$	0.852	11.418
$P_{L71}$	0	$P_{L72}$	0	0
$P_{L81}$	0	$P_{L82}$	0	0
$P_{L91}$	26.703	$P_{L92}$	4.178	30.19
$P_{L10-1}$	8.521	$P_{L10-2}$	0.98	9.250
$P_{L11-1}$	3.414	$P_{L11-2}$	0.270	3.592
$P_{L12-1}$	5.925	$P_{L12-2}$	0.467	6.246
$P_{L13-1}$	13.162	$P_{L13-2}$	1.038	13.85
$P_{L14-1}$	14.094	$P_{L14-2}$	1.72	15.357

في الخطوة الأخيرة نحسب الضياعات للمولدات والأحمال بحسب المعادلات (8) و (10) ونبين النتائج النهائية لتوزيع الضياعات بين قصبان جميع المولدات والأحمال في الجدولين (7) و (8).

■ **النتائج حسب طريقة نظرية اللعبة Game Theory:** كما هو موضح في الجدول (1) لدينا أربع لاعبين ( $N=4$ ). نقوم بتشكيل جميع التحالفات الممكنة بين اللاعبين والتي يبلغ عددها  $2^N$  ونحدد الضياع الناتج عن كل تحالف في الشبكة حسب برنامج سريان الاستطاعة. الجدول (5) يبين جميع التحالفات والضياعات المقابلة لها.

الجدول (5) الضياعات الناتجة عن التحالفات في الشبكة

	S التحالف	الضياع لكل تحالف LOSS(S)
1	0	0
2	1	6.783
3	2	1.704

4	3	0.248
5	4	0.301
6	2 و 1	12.842
7	3 و 1	6.514
8	4 و 1	6.025
9	3 و 2	1.73
10	4 و 2	1.737
11	4 و 3	0.295
12	1,2,3	12.523
13	1,2,4	11.803
14	1,3,4	7.159
15	2,3,4	2.108
16	1,2,3,4	13.593

نحصل على حصة كل لاعب من الضياع في الشبكة وفق المعادلة (15)، والحساب اليدوي من أجل اللاعب  $X_1$  هو كالآتي:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \left[ \frac{0!(4-0-1)!}{4!} * (6.783 - 0) \right] \\
 &+ \left[ \frac{1!(4-1-1)!}{4!} * (12.842 - 1.704) \right] \\
 &+ \left[ \frac{1!(4-1-1)!}{4!} * (6.514 - 0.248) \right] \\
 &+ \left[ \frac{1!(4-1-1)!}{4!} * (6.025 - 0.301) \right] \\
 &+ \left[ \frac{2!(4-2-1)!}{4!} * (12.523 - 1.73) \right] \\
 &+ \left[ \frac{2!(4-2-1)!}{4!} * (11.803 - 1.737) \right] \\
 &+ \left[ \frac{2!(4-2-1)!}{4!} * (7.159 - 0.295) \right] \\
 &+ \left[ \frac{3!(4-3-1)!}{4!} * (13.593 - 2.108) \right] = 8.804
 \end{aligned}$$

الجدول (6) يبين حصة كل لاعب من الضياعات الكلية وتقسيم الضياعات بين المولدات والأحمال لكل لاعب بنسبة 50:50 للعقود الثنائية.

الجدول (6) حصص اللاعبين من الضياعات وتقسيمها بين المولدات والأحمال

اللاعب	الضياع $L_i$	ضياعات المولدات		ضياعات الأحمال	
X1	8.804	G1	4.402	L3	2.7
				L4	1.37
				L6	0.321
X2	3.916	G1	1.958	L9	0.863
				L10	0.263
				L13	0.395
				L14	0.436
X3	0.587	G2	0.2935	L2	0.217
				L5	0.076
X4	0.285	G2	0.1425	L11	0.052
				L12	0.09

➤ يتم في النهاية جمع الضياعات للمولدات أو الأحمال الموجودة في أكثر من لاعب ويوضح الجدولان (7) و (8) توزيع الضياعات بشكل نهائي بين قضبان التجميع وفق الطرق الأربعة المذكورة.

الجدول (7) ضياعات المولدات وفق الطرق الأربعة

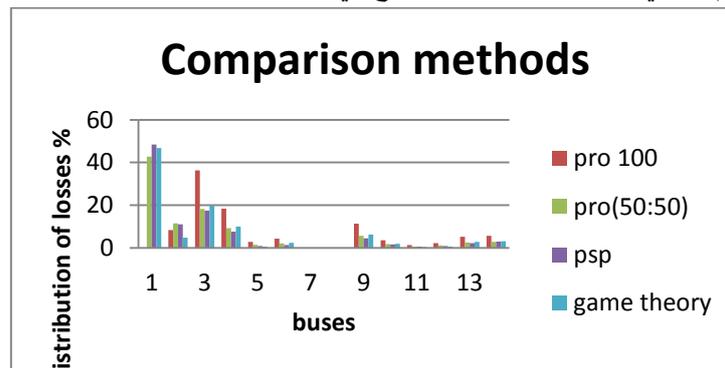
Bus Gen	Pro rata(100% load) [MW]	Pro rata (50:50) [MW]	Proportional sharing [MW]	Game theory [MW]
1	0	5.8	7.43	6.36
2	0	0.99	1.473	0.436

الجدول (8) ضياعات الأحمال وفق الطرق الأربعة

Bus Load	Pro rata(100% load) [MW]	Pro rata (50:50) [MW]	Proportional sharing [MW]	Game theory [MW]
2	1.13	0.57	0.231	0.217
3	4.9	2.47	2.696	2.7
4	2.49	1.253	1.167	1.37
5	0.4	0.199	0.148	0.076
6	0.58	0.293	0.218	0.321
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0

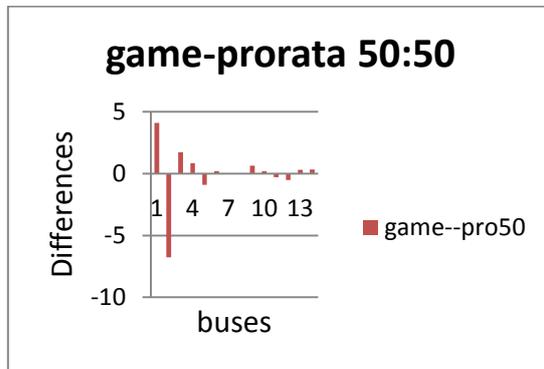
9	1.54	0.774	0.69	0.863
10	0.48	0.236	0.250	0.263
11	0.18	0.0918	0.0924	0.052
12	0.318	0.16	0.146	0.09
13	0.7	0.354	0.35	0.395
14	0.78	0.39	0.457	0.436

والشكل (4) يوضح الرسم البياني لضياعات قضبان التجميع في الشبكة لكل طريقة من الطرق السابقة.

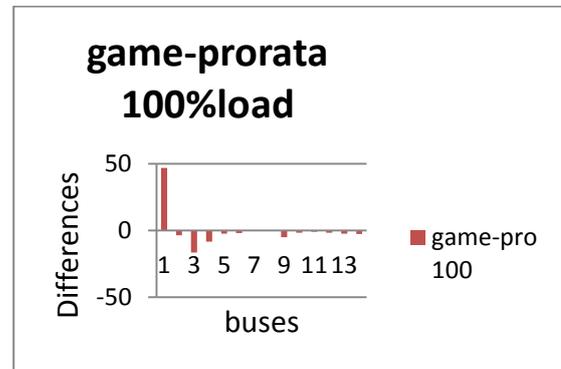


الشكل (4) توزيع الضياعات وفق الطرق الأربعة

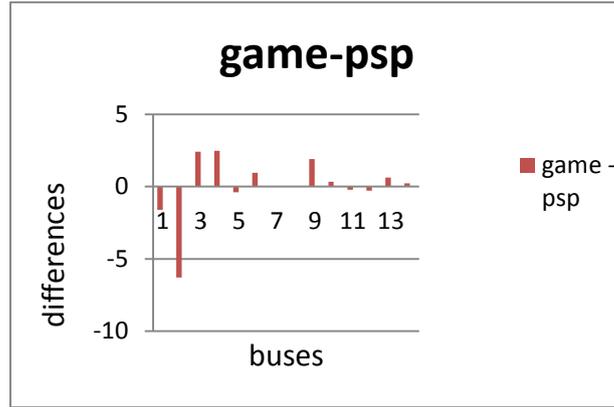
كما تبين الأشكال (5) و (6) و (7) مقارنة طريقة اللعبة مع الطرق الأخرى.



الشكل (6) مقارنة طريقة اللعبة مع طريقة (50:50) pro rata



الشكل (5) مقارنة طريقة اللعبة مع طريقة (100% load) pro rata



الشكل (7) مقارنة طريقة اللعبة مع طريقة proportional sharing

- 1- يبين الجدول (8) أن حصة الأحمال من الضياعات المحسوبة وفق طريقة المحاصصة (100%) هي الأعلى من الحصص المحسوبة بالطرق الأخرى وهذا أمر مفهوم كون هذه الطريقة تعفي الجهة المولدة من المساهمة في الضياعات بشكل مباشر.
- 2- يبين الجدول (8) أيضاً أن هناك تقارب في الحساب بين طريقتي المحاصصة (50:50) وطريقة المشاركة النسبية، حيث فقط بالنسبة للحمل عند القضيبي 2 فقد بلغت حصته من الضياعات المحسوبة وفق المحاصصة (50:50) 0.57 في حين بلغت هذه الضياعات وفق طريقة المشاركة النسبية 0.231 أي أقل بنسبة 40%، ووبالنسبة للحمل عند القضيبي 3 كان الفرق بين الضياعات وفق الطريقتين 23%. في حين لم يتجاوز الفرق بين الأحمال الأخرى المحسوبة بالطريقتين 8.4%.
- 3- الأشكال (5) و (6) و (7) تبيّن أن نتائج الطرق الأربعة متقاربة بشكل واضح.
- 4- الجدول (9) يبين النسب المتوقعة للضياعات من الحمل على القضيبي وفق طريقة نظرية اللعبة وطريقة المشاركة النسبية:

الجدول (9) النسب المتوقعة للضياعات وفق نظرية اللعبة والمشاركة النسبية

Bus Load	نسبة الضياعات وفق طريقة المشاركة النسبية %	نسبة الضياعات وفق نظرية اللعبة %
2	1	1
3	2.8	2.8
4	2.4	2.8
5	1.94	1
6	1.94	2.8
9	2.3	2.9
10	2.7	2.9
11	2.6	1.4
12	2.4	1.4

13	2.6	2.9
14	3	2.9

نلاحظ من الجدول تساوي حصة الضياعات للحملين 13 و 14 المتقاربين في الاستطاعة والمتوضعين بشكل متجاور في النقطة الأبعد من الشبكة وكلاهما يتلقيان التغذية من المولد الأول G1 بحسب العقود في السيناريو الأول. نفس الملاحظة يمكن الإشارة إليها بالنسبة للحملين 9 و 10 حيث تتساوى ضياعاتهما وفق طريقة نظرية اللعبة حيث أنه بالرغم من أن الحمل 10 أصغر من الحمل 9 ولكنه أبعد عن المولد G1 الذي يستجر منه تغذيته.

❖ بتغيير السيناريو المخصص للشبكة المدروسة إلى السيناريو 2، نجد النتائج الموضحة في الجدول (10) والذي يبين اختلاف توزيع الضياعات وفق السيناريو 1 والسيناريو 2.

الجدول (10) توزيع الضياعات وفق السيناريو الأول والسيناريو الثاني

المولدات والأحمال	الضياعات وفق السيناريو الأول	الضياعات وفق السيناريو الثاني
G1	6.36	6.144
G2	0.436	0.65
L2	0.217	0.586
L3	2.7	2.547
L4	1.37	1.292
L5	0.076	0.11
L6	0.321	0.162
L9	0.863	0.874
L10	0.263	0.182
L11	0.052	0.07
L12	0.09	0.123
L13	0.395	0.4
L14	0.436	0.441

5- بسبب تغير توزيع الأحمال وبالنظر إلى طبولوجيا الشبكة تبدو أحمال المولد 2 في السيناريو 2 موزعة على امتداد الشبكة في حين كانت في السيناريو 1 تقع في المحيط القريب للمولد 2. حتى أن الحمل 2 كان موصل مباشرة مع قضيب التجميع الموصل إليه المولد وهذا أمر لا تلاحظه الطرق الأخرى إذ تبقى نسب الضياعات فيها متساوية بغض النظر عن أطراف العقود.

يبدو هذا واضحاً عند مقارنة حصص الأحمال 2 و 10، حيث ارتفعت حصة الحمل 2 من الضياعات بشكل واضح كونه أصبح أبعد عن مصدر التغذية في العقد الجديد، أيضاً بالنسبة للحمل 10 والذي بات يستجر استطاعته من المولد الثاني (بحسب العقد الجديد) انخفضت حصته من الضياعات بمقدار 30%.

## الاستنتاجات والتوصيات:

### الاستنتاجات:

1. إن طبيعة الشبكة المدروسة وكون التوليد فيها متمركز والمولدين 1 و 2 قريبين من بعضهما، جعل نتائج الحساب بالنسبة للطرق الأربعة متقاربة بشكل واضح.
2. يمكن لنظرية اللعبة أن تخصص نفس الضياعات لمجموعة من الأحمال ذات الاستطاعات المختلفة، وهذا الأمر مبرر لأنها تراعي توزع الأحمال وبعدها عن المولدات.
3. تأخذ نظرية اللعبة بالاعتبار أن السوق المخصصة توفر للمستهلك إمكانية اختيار المولد الذي يريد استجرار التغذية منه وبالتالي عندما يتغير سيناريو التغذية في الشبكة أي يتغير المولد الذي يغذي حمل معين فإن توزيع الضياعات باستخدام نظرية اللعبة يتغير، بينما لاتراعي الطرق الأخرى هذا الجانب وتبقى نتائجها ثابتة طالما أن قيم الاستطاعات ثابتة.
4. تأخذ نظرية اللعبة بالاعتبار علاقات اللاعبين مع بعضهم البعض ويؤثر دخول أو خروج أي لاعب من التحالف على نتائج اللعبة وعلى نتائج اللاعبين الآخرين.

### التوصيات:

- 1- العمل لصياغة معيار موضوعي لتقييم عدالة هذه الطرق.
- 2- التوسع في الدراسة ومتابعة دراسة تأثير التحالفات على النتائج.
- 3- اختبار شبكات يكون فيها التوليد موزع بشكل أكبر من الشبكة المستخدمة في هذا البحث.

## References:

1. ALIKHANZADEH, A.H. *Oligopolistic and oligopsonistic bilateral electricity market modeling using hierarchical conjectural variation equilibrium method*, Doctoral dissertation, Brunel University School of Engineering and Design PhD Theses, London, 2013,2-18.
2. GALIANA, F.D.,CONEJO, A.J.,KOCKAR, I. *Incremental transmission loss allocation under pool dispatch. IEEE transactions on power systems*, vol. 17, NO. 1, 2002,26-33.
3. SOBHAY, A. *Transmission loss allocation in a deregulated electrical energy market*. Electric Power Systems Research, 76(11), 2006,962-967.
4. SANTOS,B.F.,SAAVEDRA,O.R. *A Methodology for Allocation of Transmission Losses in Competitive Environment*. IEEE Lausanne Power Tech, 2007, 926-931.
5. ANAND, B.,Sai, M.H., *Power Loss Allocation in Deregulated Electricity Markets*. International Journal of Engineering Research and Development, Volume 10, Issue 12, 2014, 37-45.
6. LIM,V.S.C., MCDONALD,J.D.F., SAHA,T.K. *Comparative distribution of system losses to market participants using different loss allocation methods*. IEEE/PES Transmission & Distribution Conference & Exhibition: Asia and Pacific, 2005, 1-7.

7. VARMA,P.S., SANKAR,V. *Comparison of Transmission Loss Allocation Methods in Deregulated Power System*. International Journal on Advanced Electrical and Electronics Engineering, ISSN (Print): 2278-8948, Volume-1, Issue-1, 2012, 70-79.
8. SONGHUAI, D., XINGHUA, Z., LU, M., HUI, X. *A novel nucleolus-based loss allocation method in bilateral electricity markets*. IEEE Transactions on Power Systems, 21(1), 2006, 28-33.
9. MAALI, Y. *A multiobjective approach for solving cooperative n-person games*. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 31(10), 2009, 608-610.
10. Ahmed, Ahmed., Haider, Tammam., Kassir, Maysa. *The application of game theory in choosing a suitable strategy for the expansion of an electrical network*. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies, Engineering Science Series, 34 (5), 2012 .
11. ERLI, G., TAKAHASI, K., CHEN, L., KURIHARA, I. *Transmission expansion cost allocation based on cooperative game theory for congestion relief*. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 27(1), 2005, 61-67.
12. ROSTAMIAN, A., HOSSEINZADEH, M., SHOKROLLAHI, A. *Transmission loss allocation in the deregulated electricity market based on the cooperative game theory*. The Journal of Mathematics and Computer Science, 4(1), 2012, 81-92.
13. RAJESH,M., SABITHA,M. *Fair Transmission Loss Allocation By Shapley Value Method*. International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 10, 2013, 915-925.
14. JANARDHAN, K., KUMAR, Y.N.V., PRADEEP, G.V. *Transmission Loss Allocation by Shapley Value Method*, International Journals of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering ISSN: 2277-128X (Volume-8, Issue-4), 2018, 43-49.
15. VINOTHKUMAR, M., ARUL,P. *Power Tracing and Loss Allocation in a Power System by Using Bialek's Algorithm*. International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT) – Volume 4 Issue 10, 2013, 1-7.
16. NEUMANN, J.V., MORGENSTREN, O. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 2007, 1-46.
17. MASCHLER,M., SOLAN,E., ZAMIR,S. *Game Theory*, Cambridge University Press,2013,979.