مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Engineering Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

تصغير خطوة الاستيفاء الداخلي الخطي باستخدام خوارزمية إقليدس

الدكتور إبراهيم الشامي*

(تاريخ الإيداع 21 / 9 / 2010. قُبِل للنشر في 4/ 5 / 2011)

□ ملخّص □

تبحث هذه الورقة في تحليل فكرة زيادة عدد الخطوات اللازمة لتوليد قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين ذات قيم إحداثيات صحيحة دون أن يؤثر ذلك في سرعة التوليد، وزيادة عدد الخطوات يتم عن طريق تقسيم كل خطوة إلى خطوتين أو أكثر.

يتم طرح خوارزمية جديدة تتصف بدقة توليد عالية ولا تتأثر سرعة التوليد فيها بزيادة عدد الخطوات. إذ يمكن إدخال عدد مرات مضاعفة عدد الخطوات لنحصل على الدقة التي نرغب.

يستلزم تنفيذ الخوارزمية تطبيقها بمعالج مضمن يسمح بمضاعفة عدد عقد الشبكة لمستوي التوليد.

الكلمات المفتاحية: خوارزميات الاستيفاء، خطوات واحدية، معالجات مضمنة، وحدات تحكم رقمي مستمر، توليد المستقيمات.

* أستاذ مساعد– قسم هندسة التحكم الآلي والحواسيب– كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية– جامعة البعث– حمص– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Engineering Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

Decrease of Linear Interpolation Step Using Euclid's Algorithm

Dr. Ibrahim Chami*

(Received 21 / 9 / 2010. Accepted 4 / 5 / 2011)

□ ABSTRACT □

This paper researches the analysis of the idea of increasing the number of the needed steps for straight generation of piece that links between two points of integers coordinates values without affecting generation speed. Increasing the number of steps is achieved by splitting each step to two or more.

The new introduced algorithm is characterized by high accuracy of generation; its generation speed is not affected by increasing the number of steps, since it is possible to enter the number of times to double the number of steps to obtain the wanted accuracy.

Algorithm requires its application to the Embedded Processor which allows doubling the number of network nodes for generating surface

Key words: Castle & Pitteway Algorithm, Embedded Processors, straight generation, Interpolation methods

***Associate Professor, Computer Eng.& Automatic Control Department, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering , Albaath University, Homs, Syria.**

مقدمة:

في خوارزميات الاستيفاء Interpolation algorithms يتم توليد نقاط بإحداثيات حقيقية تقع بين نقطة بداية الاستيفاء ونهايته. والنقاط المولدة تقع على خط مستقيم كما في طريقة أولر Euler أو على منحن من درجة محددة (الرابعة بحسب طريقة رانج–كوتا (عودة، 2002)). يمكن إجراء الاستيفاء بمساعدة نقاط تتحكم بشكل منحني الاستيفاء حيث نحتاج إلى نقطتي تحكم لتوليد منحنٍ من الدرجة الثانية (Wang, 1989)، وكحالة خاصة نحتاج إلى نقطة تحكم وحيدة لتوليد منحنٍ قطع ناقص أو دائري. إن الأساس في فكرة الاستيفاء هي سلسلة تايلور (Danielsson, 1970)، والتي بمساعدتها يمكن توليد نقاط من المنحني بترتيب فردي أو زوجي (Ducamp and Reverchon, 1985) ، فمن أجل استيفاء وفق منحنٍ من الدرجة n لدينا:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{i} f(x,y)$$

عند تقريب نقاط الاستيفاء إلى نقاط ذات إحداثيات بقيم صحيحة يكون لدينا منحني استيفاء متكسر يتولد عن طريق الانتقال بخطوة تساوي الواحد الصحيح $\Delta x = \pm 1, \Delta y = \pm 1$ من نقطة مولدة إلى أخرى سيجري توليدها والتي تعتمد على مشتقات معادلة منحني الاستيفاء (Mokrzycki 1990) . يمكن تقليل درجة التكسر (تنعيم) المنحني عن طريق تصغير طول الخطوة الواحدية، وهذا يمكن أن يتم عن طريق تقسيم الخطوة الواحدية إلى عدة خطوات أصغر مما يضاعف عدد الخطوات .

تعتبر خوارزمية بريسنهام الأولى (Bresenham 1965) من أقدم الخوارزميات التي وضعت لتوليد القطع المستقيمة ولكنها تحتاج لدورة أو حلقة loop كاملة من أجل توليد كل خطوة، وهذا يعني أنه عند مضاعفة عدد الخطوات سيتضاعف عدد دورات الخوارزمية (Agoston 2004) ، وحتى في خوارزمية بريسنهام الثانية (Bresenham 1985) التي بإمكانها توليد عدة خطوات متشابهة بدورة واحدة فإن مضاعفة عدد الخطوات سيضاعف أيضاً عدد دورات الخوارزمية.

هذا البحث يسلط الضوء على تأثير تقليل طول الخطوة الواحدية على سرعة إنجاز الإستيفاء الداخلي الخطي بين نقطتين ذات قيم بإحداثيات صحيحة ويتم استخلاص نتيجة هامة وهي أن خوارزمية Castle & Pitteway (المعتمدة على خوارزمية إقليدس الشهيرة لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين) هي الأفضل والأكثر ملاءمة لتطبيقات محددة في أنظمة التحكم الرقمي المستمر Always Digital Control Units مثل الأجهزة الرقمية للقص الآلي للألواح المعدنية الكبيرة المساحة (CASTLE, and PITTEWAY 1985) وأجهزة الحفر أو الرسم أو النقش على السطوح المعدنية مثل النحاس وآلات التفريز الرقمية ففي مثل هذه الأجهزة هناك أهمية خاصة لدقة توليد قطعة مستقيمة تصل ما بين نقطتين .

تنحصر الحركة عند التوليد الخطي على الشبكات المربعة ذات الثمانية للحركة بنوعين من الخطوات مائلة نرمز لها 1 ومحورية ونرمز لها 0 ، الخطوات المائلة تميل بمقدار 45^0 على محور السينات، وعددها ΔY (ΔY هو مسقط القطعة المستقيمة المراد توليدها على محور العينات الشاقولي)، بينما الخطوات المحورية تتم بأحد المحورين الأفقي أو الشاقولي وعددها ΔX (ΔX هو مسقط القطعة المستقيمة المراد توليدها على محور السينات الأفقي) فمثلاً الخطوات المتولدة مابين النقتطين (0,0) و (51,11) تتشكل السلسلة الرقمية الآتية :

00 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 00

و في جميع خوارزميات التوليد الخطي تكون الخطوات المتولدة مابين النقطتين (0,0) و (102,22) هي ذات السلسلة الرقمية السابقة و لكن مكررة لمرة واحدة أي (ما تحتها خط مكررة) :

00 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 0000 1 000 1
0000 1 0000 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 0000 1 0000 1 000 1 00

تتولد الخطوات المحورية الأفقية (وفق المحور 0X) عند توليد قطع مستقيمة ذات ميل أقل من 1 (أي عندما $\frac{\Delta Y}{\Delta X} < 1$) و تتولد الخطوات المحورية الشاقولية (وفق المحور 0Y) عند توليد قطع مستقيمة ذات ميل أكبر من 1 (أي عندما $\frac{\Delta Y}{\Delta X} > 1$) وعندما $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 1$ تتولد خطوات مائلة فقط.

أهمية البحث وأهدافه:

تتصف خوارزميات توليد القطع المستقيمة التي تصل ما بين نقطتين بخطأ توليد يتراوح مابين الصفر وطول الخطوة (الواحد الصحيح)، وفي الخوارزميات الشرطية Conditional algorithms عموماً مثل خوارزمية Bresenham الشهيرة فيها لا يتجاوز الخطأ طول نصف الخطوة، وكذلك في الكثير من الخوارزميات التركيبية Structural algorithms مثل خوارزمية Castle&Pitteway لهذا من البديهي أن يكون تقليل قيمة الخطأ عن طريق تصغير طول الخطوة ممكناً (في الحقيقة لا يوجد أية طريقة أخرى) ولكن تصغير طول الخطوة سيضاعف عدد الخطوات اللازم توليدها و ربما عدة مرات مما يعني زيادة عدد العمليات الحسابية والمنطقية اللازمة بشكل طردي مع زيادة عدد تلك الخطوات (أي إنقاص سرعة التوليد)، والفرضية الأساسية لهذا البحث ترتكز على زيادة عدد الخطوات بالقدر الذي نرغب دون أن يؤثر ذلك في سرعة التوليد (تزداد بمقدار طفيف جداً) ويتم تنفيذ هذه الفرضية عن طريق تطبيق فكرة أن زيادة عدد الخطوات بضرب عدد الخطوات في السلسلة الأساسية بعدد صحيح n سيؤدي إلى تكرار توليد تلك السلسلة بعدد n من المرات وهذا يتطلب حفظاً مؤقتاً لخطوات السلسلة الأساسية ضمن مسجل Register قبل تنفيذ الحركات الموافقة لتلك الخطوات و هذا يمكن تطبيقه فقط على أنظمة التحكم الرقمي المستمر مثل الأجهزة الرقمية للقص الآلي للألواح المعدنية الكبيرة المساحة وأجهزة الحفر أو الرسم أو النقش على السطوح المعدنية مثل النحاس وآلات التفريز الرقمية عموماً و آلات البحث عن المعادن. وهذا يعني أن للبحث أهمية تطبيقية.

طرائق البحث ومواده:

تستند طريقة البحث على توليد سلسلة رقمية أساسية و من ثم تكرارها بعدد مرات مضاعفة عدد الخطوات، وهذا يتطلب حفظاً مؤقتاً لسلسلة الخطوات في الذاكرة ، إن تطبيق ذلك على الخوارزميات الشرطية مثل Bresenham و Pitteway اللتين تولدان خطوة واحدة في كل دورة loop حسابية من دورات الخوارزمية وهذا يعني زيادة عدد الدورات بمقدار عدد الخطوات إذا لم يكن هناك تخزين، إذ مع التخزين المؤقت للسلسلة الأساسية وتكرار تخزينها دون الحاجة لإعادة حساب الخطوات المكررة نكون قد اختصرنا زمن ذلك الحساب ولكن يضاف بالمقابل زمن التخزين الكلي سواء للسلسلة الأساسية أو للسلاسل المكررة.

إن تطبيق الطريقة المشار إليها على خوارزمية Castle & Pitteway التركيبية سيكون أكثر ملاءمة من غيرها لأنها تعتمد بالأساس أولاً على التخزين المؤقت للسلسلة الرقمية المتولدة، وثانياً على خوارزمية إقليدس الشهيرة لإيجاد

القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين وليكن هذان العددان مثلاً هما ΔX=51 و ΔY=11 إذ تتلخص خوارزمية إقليدس في استمرار طرح العدد الكبير من الصغير حتى يتساوى العددان و عند تساويهما ينتج القاسم المشترك الأعظم لذلك العددين ومن أجل العددين الصحيحين المشار إليهما لدينا 9 دورات كما يبين الجدول1.

الجدول1 جدول إختباري لتنفيذ خوارزمية إقليدس من أجل ΔX=51 و ΔY=11

ΔX=51	ΔY=11
ΔX=51-11=40	ΔY=11
ΔX=40-11=29	ΔY=11
ΔX=29-11=18	ΔY=11
ΔX=18-11=7	ΔY=11
ΔX=7	ΔY=11-7=4
ΔX=7-4=3	ΔY=4
ΔX=3	ΔY=4-3=1
ΔX=3-1=2	ΔY=1
ΔX=2-1=1	ΔY=1

ونلاحظ أن القاسم المشترك الأعظم للعددين 51 و 11 هو الواحد الصحيح، و تصغير طول الخطوة للنصف يتضاعف عدد الخطوات وهذا يعني أن العددين أصبحا 102 و 22 و يعدل الجدول 1 إلى الجدول 2.

الجدول1 جدول إختباري لتنفيذ خوارزمية إقليدس من أجل ΔX=102 و ΔY=22

ΔX=102	ΔY=22
ΔX=102-22=80	ΔY=22
ΔX=80-22=58	ΔY=22
ΔX=58-22=18	ΔY=22
ΔX=18-22=14	ΔY=22
ΔX=14	ΔY=22-14=8
ΔX=14-8=6	ΔY=8
ΔX=6	ΔY=8-6=2
ΔX=6-2=4	ΔY=2
ΔX=4-2=2	ΔY=2

ونلاحظ عدد الدورات بقي 9 و القاسم المشترك الأعظم للعددين 102 و 22 هو العدد الصحيح 2، و تصغير طول الخطوة للنصف أي مضاعفة عدد الخطوات لم يؤثر في عدد الدورات .

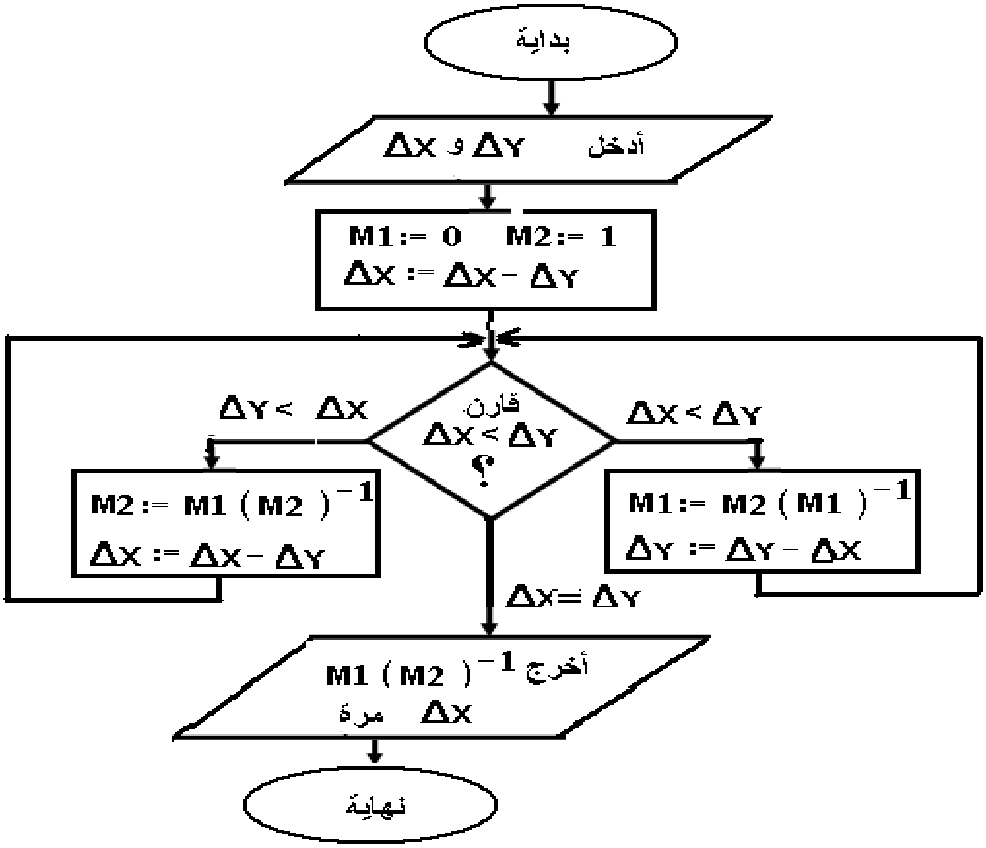
ولكن ماذا عن خوارزمية بيتواي– كاستل المشتقة من خوارزمية إقليدس السابقة؟

تعتمد خوارزمية بيتواي– كاستل على تخزين مؤقت للسلسلة المتولدة ضمن مسجلين M1 و M2 يتغير محتواهما مع كل دورة من الخوارزمية كما يوضح الشكل(1). ومن أجل توليد الخطوات مابين النقتطين (0,0) و (51,11) يكون محتوى المسجلين M1 و M2 متغيراً في دورات الخوارزمية التسع كما يبين الجدول3.

وعند مضاعفة عدد الخطوات يبقى عدد دورات الخوارزمية ذاته أي 9 بينما يتم إخراج السلسلة الأخيرة مرتين متتاليتين، وهكذا يتم تكرار الإخراج الأخير بحسب مقدار زيادة عدد الخطوات.

الجدول3 محتوى المسجلين M1 و M2 عن تنفيذ خوارزمية بيتواي– كاستل من أجل ΔX=51 و ΔY=11

ΔX	ΔY	المسجل M1	المسجل M2
40	11	0	01
29	11	0	010
18	11	0	0010
7	11	00100	0010
7	4	00100	001000100
3	4	00100010000100	001000100
3	1	00100010000100	0010001000010000100010
2	1	00100010000100	00100010000100001000100001000100
1	1	أخرج سلسلة الخطوات:001000100001000010001000010000100010000100001000100	



الشكل(1) المخطط التدفقي لخوارزمية بيتواي–كاستل

النتائج والمناقشة:

نناقش في هذه الفقرة ثلاث نقاط أساسية، وهي:

1. تحليل الدقة في الطريقة المقترحة
2. التحكم بطول الخطوة الواحدية في الطريقة المقترحة

3. المتطلبات الصلبة اللازمة لتطبيق الطريقة المقترحة

1. تحليل الدقة في الطريقة المقترحة

لكل منحنٍ يتم توليده على سطح شبكي هناك تابع خطأ يعطينا قيمة الخطأ في كافة العقد Nodes المتولدة، و في حالة كانت الخطوة الواحدية مساوية لوحدة طولية واحدة يكون لدينا في حالة التوليد الخطي في كل عقدة i:

$$\eta_i = aX_i + b - \lfloor aX_i + b + 0.5 \rfloor$$

وعند تتطابق نقطة البداية مع مبدأ الإحداثيات يكون b=0 و عندها نكتب:

$$\eta_i = aX_i - \lfloor aX_i + 0.5 \rfloor$$

ويعبر a عن الميل:

$$\eta_i = \frac{\Delta Y}{\Delta X} X_i - \left\lfloor \frac{\Delta Y}{\Delta X} X_i + 0.5 \right\rfloor$$

ومن أجل المثال السابق يكون:

$$\eta_i = \frac{11}{51} X_i - \left\lfloor \frac{11}{51} X_i + 0.5 \right\rfloor$$

وعند مضاعفة عدد الخطوات (أي جعل طول الخطوة الواحدية مساو لنصف وحدة طولية) تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\eta_i = \left(\frac{22}{102} X_i - \left\lfloor \frac{22}{102} X_i + 0.5 \right\rfloor \right) / 2$$

وعند ضرب عدد الخطوات بالعدد الصحيح m تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\eta_i = \left(\frac{11m}{51m} X_i - \left\lfloor \frac{11m}{51m} X_i + 0.5 \right\rfloor \right) / m$$

أي:

$$\eta_i = \left(\frac{11}{51} X_i - \left\lfloor \frac{11}{51} X_i + 0.5 \right\rfloor \right) / m$$

أي:

$$\eta_i = \frac{\frac{\Delta Y}{\Delta X} X_i - \left\lfloor \frac{\Delta Y}{\Delta X} X_i + 0.5 \right\rfloor}{m}$$

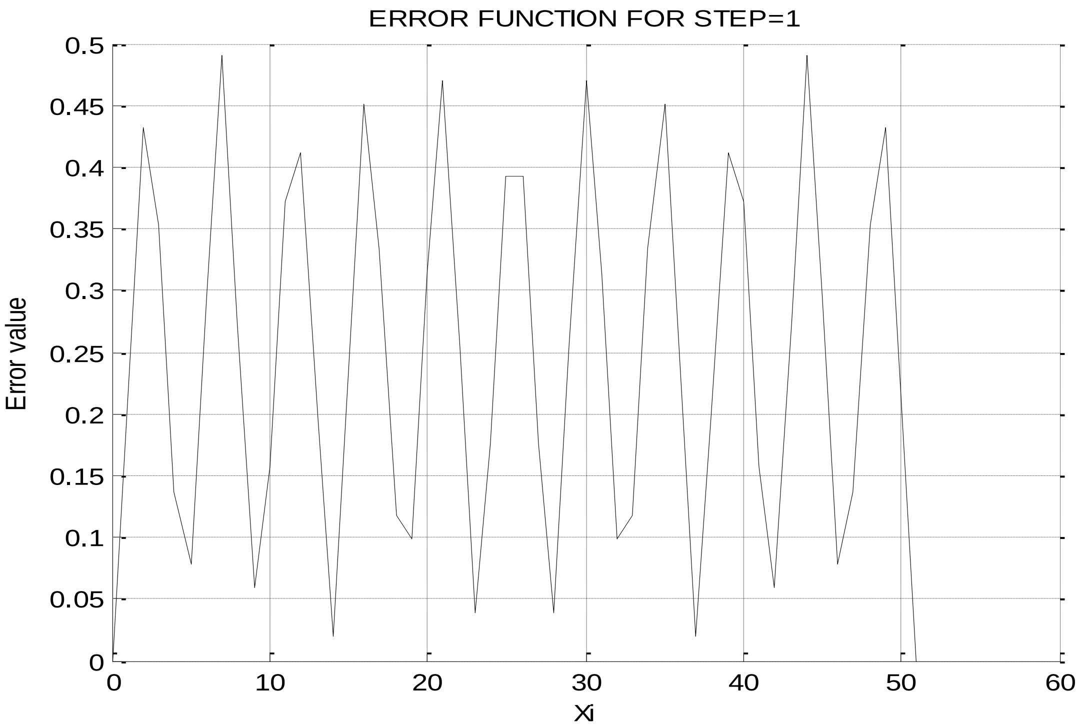
لنكتب برنامجاً لحساب قيم الأخطاء في النقاط من (0.0) وحتى (51,11):

```
i=0:dx*m
psi=dy/dx*i;
psi1=int16(psi);
psi1=single(psi1);
psi2=(psi-psi1)/m;
psi2=abs(psi2)
std_x=std(psi2),mean_x=mean(psi2)
plot(i,psi2),grid on,xlabel('Xi'),ylabel('Error value'),title('ERROR FUNCTION FOR STEP=1')
```

فينتج قيم الأخطاء الآتية والتي جميعها أقل من النصف والانحراف المعياري لها هو 0.1485 بينما المتوسط الحسابي فقيمته 0.2451 والشكل(2) يبين منحني الخطأ.

Error Values:

```
0      0.2157  0.4314  0.3529  0.1373  0.0784  0.2941  0.4902  0.2745  0.0588
0.1569  0.3725  0.4118  0.1961  0.0196  0.2353  0.4510  0.3333  0.1176
0.0980  0.3137  0.4706  0.2549  0.0392  0.1765  0.3922  0.3922  0.1765
0.0392  0.2549  0.4706  0.3137  0.0980  0.1176  0.3333  0.4510  0.2353
0.0196  0.1961  0.4118  0.3725  0.1569  0.0588  0.2745  0.4902  0.2941  0.0784
0.1373  0.3529  0.4314  0.2157  0
std_x =    0.1485
mean_x =   0.2451
```



الشكل(2) منحني الخطأ لخوارزمية بيتواي–كاستل و الخطوة تساوي الواحد

يمكننا كتابة برنامج آخر يكون فيه طول الخطوة بواحدة طول محددة متغيراً ويساوي $\frac{1}{2^m}$ حيث m هي عدد مرات التصغير:

```
i=0:dx*m
psi=dy/dx*i;
psi1=int16(psi);
psi1=single(psi1);
psi2=(psi-psi1)/m;
psi2=abs(psi2)
std_x=std(psi2),mean_x=mean(psi2)
hold on
plot(i,psi2,i,psi5),grid on,xlabel('Xi'),ylabel('Error value'),title('ERROR FUNCTION FOR STEP=1 ').
```

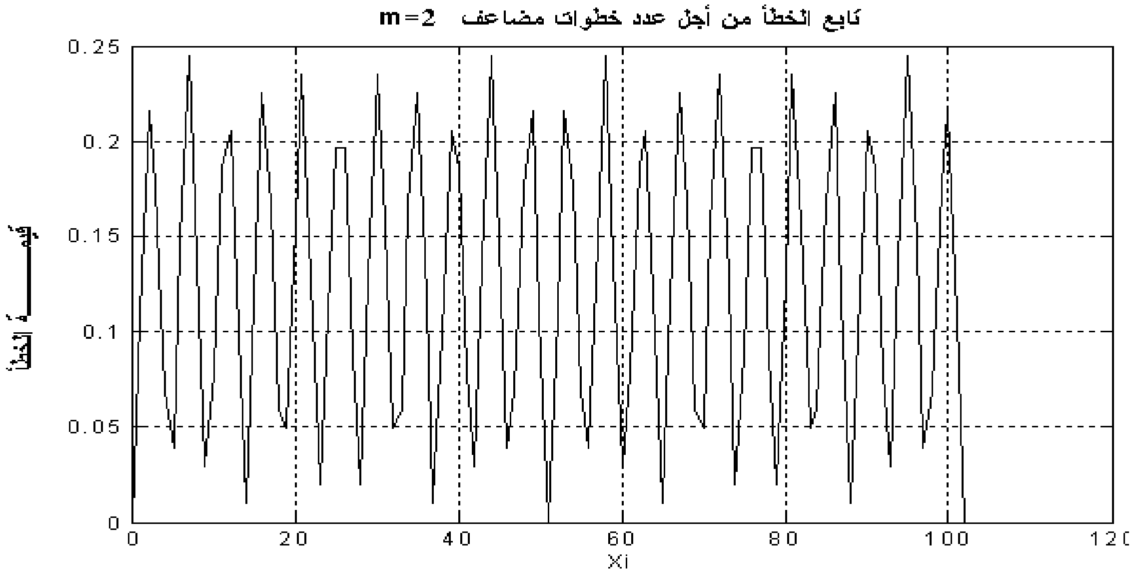
عند التنفيذ من أجل مضاعفة عدد الخطوات ينتج قيم الأخطاء الآتية والتي جميعها أقل من الربع والانحراف المعياري لها هو 0.0732 بينما المتوسط الحسابي فقيمته 0.1237 ونلاحظ وكأن قيم الأخطاء والانحراف المعياري والمتوسط الحسابي قد تم تقسيمها على 2. والشكل(3) يبين منحني الخطأ.

Error Values:

0	0.1078	0.2157	0.1765	0.0686	0.0392	0.1471	0.2451	0.1373
0.0294	0.0784	0.1863	0.2059	0.0980	0.0098	0.1176	0.2255	0.1667
0.0588	0.0490	0.1569	0.2353	0.1275	0.0196	0.0882	0.1961	0.1961
0.0882	0.0196	0.1275	0.2353	0.1569	0.0490	0.0588	0.1667	0.2255
0.1176	0.0098	0.0980	0.2059	0.1863	0.0784	0.0294	0.1373	0.2451
0.1471	0.0392	0.0686	0.1765	0.2157	0.1078	0	0.1078	0.2157
0.1765	0.0686	0.0392	0.1471	0.2451	0.1373	0.0294	0.0784	0.1863
0.2059	0.0980	0.0098	0.1176	0.2255	0.1667	0.0588	0.0490	0.1569
0.2353	0.1275	0.0196	0.0882	0.1961	0.1961	0.0882	0.0196	0.1275
0.2353	0.1569	0.0490	0.0588	0.1667	0.2255	0.1176	0.0098	0.0980
0.2059	0.1863	0.0784	0.0294	0.1373	0.2451	0.1471	0.0392	0.0686
0.1765	0.2157	0.1078	0					

std_x = 0.0732

mean_x = 0.1237



الشكل(3) منحني الخطأ للخوارزمية المقترحة من أجل عدد خطوات مضاعفة

2. التحكم بطول الخطوة الواحدية في الطريقة المقترحة

عند تصغير طول الخطوة فإنها لا تصبح كسرية بل طولها يبقى مساوياً الواحد عند تعويض طول الخطوة في الخوارزمية المقترحة والذي يتغير هو مقياس الرسم أو طول الخطوة مقاساً بوحدة أطوال محددة.

إن طول الخطوة يتم تصغيره من 1 إلى 0.5 ثم إلى 0.25 .... وهكذا لنناقش حالة تصغير الخطوة إلى النصف.

هنا سيتم التقريب Y_i إلى أعداد صحيحة أو إلى أعداد كسرية قسمها الكسري يساوي النصف أي لدينا حالتان وعلينا التمييز بينهما، وهذا يتم عن طريق اختبار الآتي:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X}X_i+0,25-\left\lfloor \frac{\Delta Y}{\Delta X}X_i+0.25\right\rfloor<0.5$$

فإذا كانت المتراجحة أعلاه محققة يكون لدينا حالة تقريب Y_i إلى أعداد صحيحة وإذا كانت غير محققة كون لدينا حالة تقريب Y_i إلى أعداد كسرية قسمها الكسري يساوي النصف:

أ- في حالة تقريب Y_i إلى أعداد صحيحة يكون لدينا الخطأ:

$$\eta_i=\frac{\Delta Y}{\Delta X}X_i-\left\lfloor \frac{\Delta Y}{\Delta X}X_i+0.25\right\rfloor$$

ب- في حالة تقريب Y_i إلى أعداد كسرية قسمها الكسري يساوي النصف يكون لدينا الخطأ:

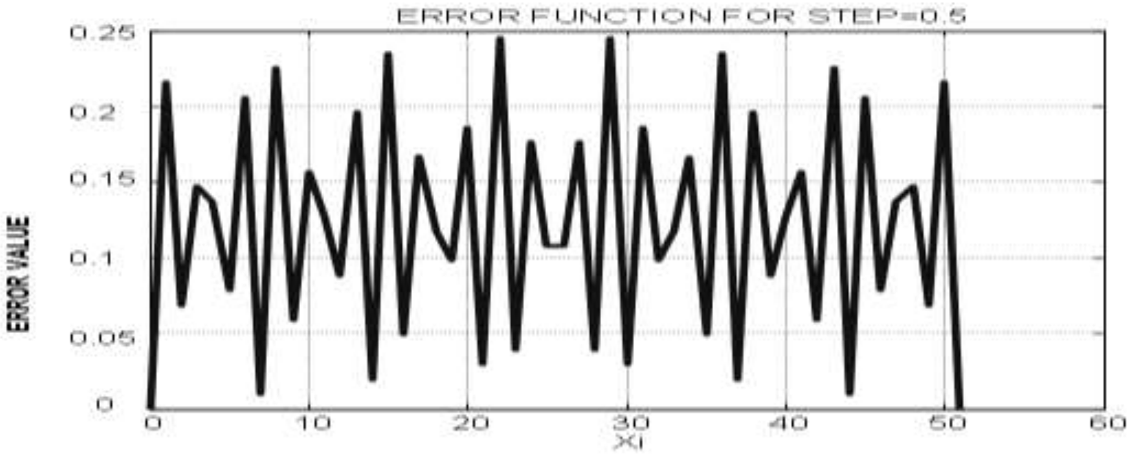
$$\eta_i=\left|\frac{\Delta Y}{\Delta X}X_i-\left\lfloor \frac{\Delta Y}{\Delta X}X_i+0.25\right\rfloor-0.5\right|$$

لنكتب برنامجاً لحساب قيم الأخطاء في النقاط من (0.0) وحتى (51,11) و ذلك عند جعل الخطوة مساوية للنصف:

```
i=0:dx
psi=dy/dx*i
psi1= psi+0.25
psi2=int16(psi1)
psi3=double(psi2)
psi4=psi1-psi3
for j=1:dx+1
if  psi4(j) > 0.0
psi5(j)=abs(psi4(j)-0.25)
else
psi5(j)=abs(psi4(j)+0.25)
end
end
std_x=std(psi5),mean_x=mean(psi5)
i=0:dx;
plot(i,psi5),grid on,xlabel('Xi'),ylabel('Error value'),title('ERROR FUNCTION FOR STEP=0.5')
```

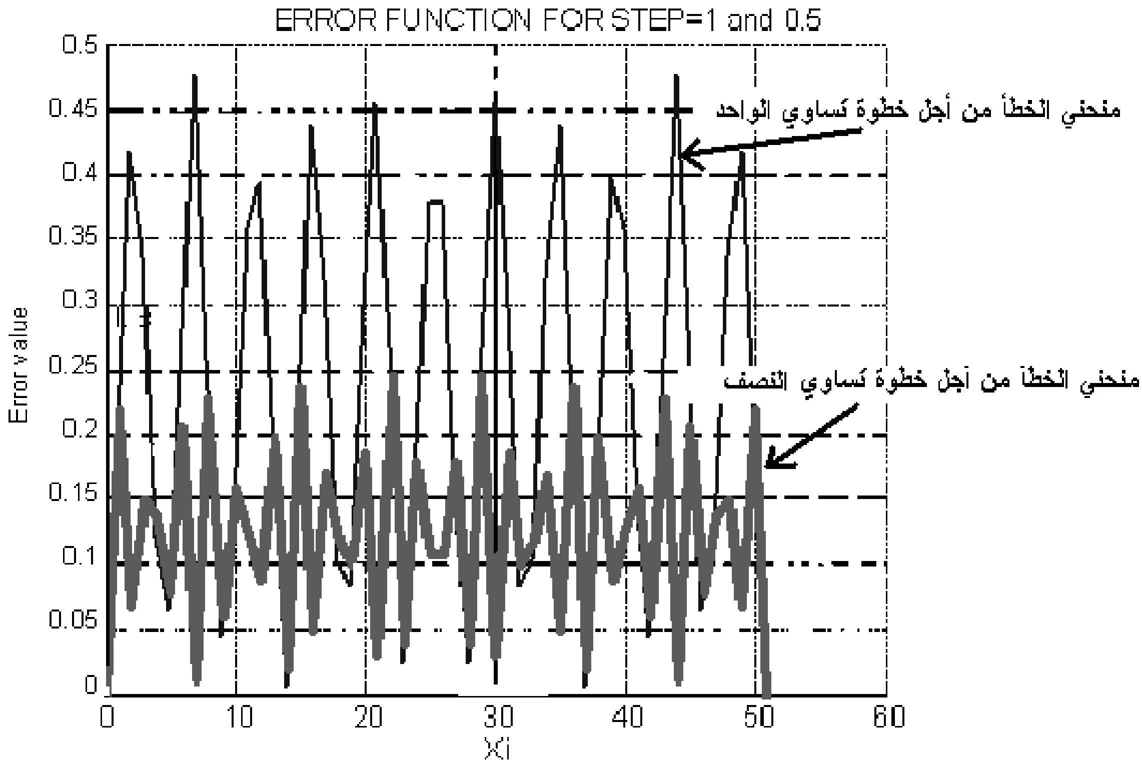
عند التنفيذ ينتج قيم الأخطاء الآتية والتي جميعها أقل من الربع والانحراف المعياري لها هو 0.0742 بينما المتوسط الحسابي فقيمته 0.1225 ونلاحظ وكأن قيم الأخطاء والانحراف المعياري والمتوسط الحسابي قد تم تقسيمها على 2. والشكل(4) يبين منحني الخطأ.

```
  Error Values:
0    0.2157    0.0686    0.1471    0.1373    0.0784    0.2059    0.0098    0.2255
  0.0588    0.1569    0.1275    0.0882    0.1961    0.0196    0.2353    0.0490    0.1667
  0.1176    0.0980    0.1863    0.0294    0.2451    0.0392    0.1765    0.1078    0.1078
  0.1765    0.0392    0.2451    0.0294    0.1863    0.0980    0.1176    0.1667    0.0490
  0.2353    0.0196    0.1961    0.0882    0.1275    0.1569    0.0588    0.2255    0.0098
  0.2059    0.0784    0.1373    0.1471    0.0686    0.2157      0
std_x =    0.0742
mean_x =    0.1225
```



الشكل(4) منحني الخطأ للخوارزمية المقترحة من أجل طول خطوة مساو للنصف

ويمكن دمج منحنيي الخطأ من أجل طول خطوة واحد ومن أجل طول خطوة يساوي النصف، أي دمج الشكلين(2) و (4) في شكل واحد لينتج الشكل(5) حيث نرى الفرق واضحاً بين المنحنيين.

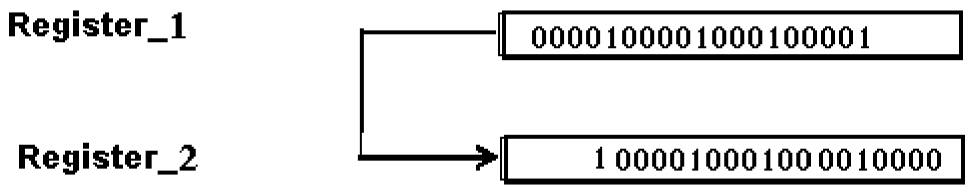


الشكل(5) دمج منحنيي الخطأ للخوارزمية المقترحة من أجل طول خطوة مساو النصف و الواحد

3. المتطلبات الصلبة اللازمة لتطبيق الطريقة المقترحة

إن تطبيق خوارزمية بيتواي–كاستل في آلات التحكم الرقمي المستمر يتطلب تزويد الآلة بدارة رقمية مناسبة أو بمعالج مضمن Embedded Processor (Wolf 2007) يمـكن تنفيذه باستخدام تقنية دارات المنطق المبرمج

FPGA (Navabi 2007) ، وعادة تتم برمجته بلغات متخصصة أشهرها لغة **CitectHMI/SCADA** . والفكرة الأساسية التي علينا تمثيلها هي عملية تخزين سلسلة رقمية (أصفار ووحدات) ضمن مسجل Register_1 ثم عملية عكس تلك السلسلة عن طريق نقلها تسلسلياً إلى مسجل آخر Register_2 كما يبين الشكل(6).



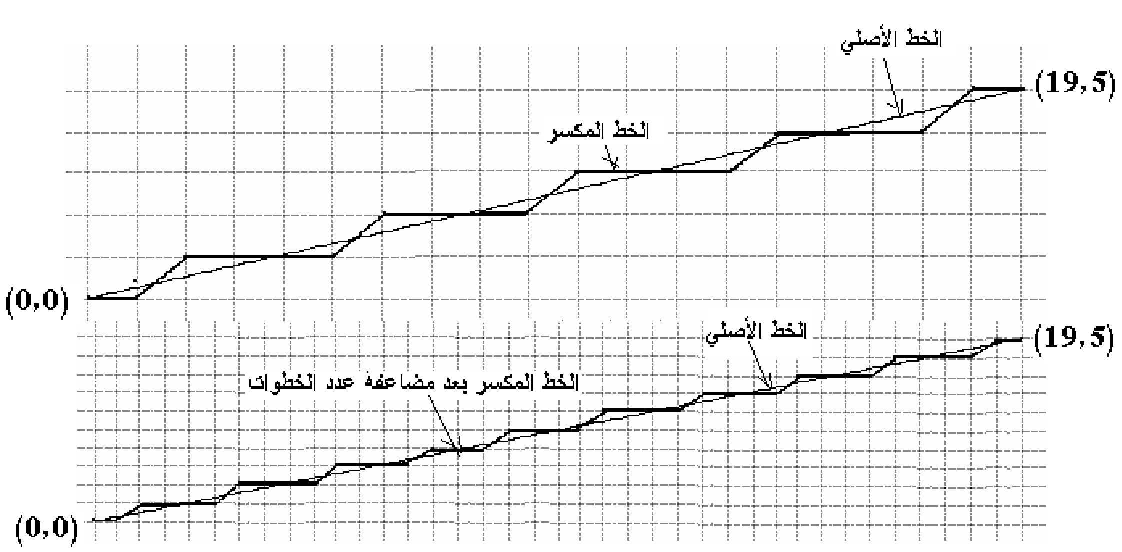
الشكل(6) المسجل Register_1 يحتوي السلسلة M و المسجل Register_2 يحتوي السلسلة $(M)^{-1}$

إن العملية المشار إليها يمكن تضمينها بسهولة في عمليات المعالج المضمن فيصبح تنفيذها يتم بصورة أسرع من تنفيذها بمعالج شائع الاستعمال إذ يتطلب التنفيذ في هذه الحالة تنفيذ عدة عمليات تشكل برنامجاً فرعياً.

بالنسبة للفكرة المطروحة في هذا البحث وهي مضاعفة عدد الخطوات الواحدية يتطلب وجود تعديلات على دارة التحكم Adapter بسطح الحركة الشبكي بشكل تسمح فيه بمضاعفة عدد العقد Nodes برمجياً وكذلك استخدام محركات خطوية Stepper motors ذات طول خطوة منغير.

الاستنتاجات والتوصيات:

إن تطبيق الخوارزمية في وحدات التحكم الرقمي المستمر، سيرفع من دقة تنفيذ عمل تلك الوحدات، مع المحافظة على سرعة تنفيذها العالية إذ نلاحظ على الشكل(7) أن تصغير طول الخطوة الواحدية إلى النصف سيجعل الخط المتولد أكثر نعومة وهذا له تأثيره الواضح في آلات قص الألواح المعدنية و كذلك أجهزة الرسـم الرقمية والتفريز والآلات الرقمية المشابهة، أي أنه يمكننا الحصول على النعومة (الدقة) التي نرغبها دون أن يترتب على ذلك زيادة في زمن الانتظار.



الشكل(7) تصغير طول الخطوة الواحدية سيقلل من التكسر في الخط المتولد (زيادة النعومة)

كما أن الخوارزمية المطبقة لايوجد فيها تأثير لمشكلة تراكم الأخطاء وانتشارها عند توليد عدد كبير من النقاط (الموجودة في بعض الخوارزميات الأخرى)، مما يسمح باستخدام الخوارزمية المقترحة لتوليد خطوط أو أقواس طويلة بقدر ما نرغب ، كما في آلات قص الألواح المعدنية .

المراجع:

1- عودة، نبيه: *التحليل العددي(1)*. مديرية الكتب والمطبوعات– الطبعة الثانية، 2001–2002– جامعة دمشق. 144.

2- AGOSTON, M. *Computer Graphics and Geometric Modeling*. Springer Publisher, 2004, 922.
3- BRESENHAM, J. E. *Algorithm for computer control of a digital plotter*, IBM Systems journal 4 , No 1, 1965, 25-30.
4- BRESENHAM, J. E. *Run length slice algorithm for Incremental lines,* , NATO ASI Series. Vol. F17 , 1985, 59-104.
5- CASTLE, C. M. A. and PITTEWAY. , M.L.V. *An application of Eclid's algorithms to drawing straight lines,* , NATO ASI Series. Vol. F17 , 1985, 135-140.
6- DANIELSSON, P. *Incremental Curve Generation* IEEE Transactions on Computer**,** Vol. C-19, No. 9, 1970, 783-793
7- DUCAMP, M and REVERCHON, A. *Mathematiques et Graphisme sur Apple II.* Eyrolles, Paris, 1985, 300.
8- MOKRZYCKI, W. *Some algorithms of algebraic curve discretization on homogeneovs multiconnected grids*. Comp. and Artiticial Intelligence. vol.9, No:1, Bratislava Slovakia, 1990 269- 273.
9- NAVABI, Z. *Embedded Core Design with FPGAs*., McGraw-Hill, USA, 2007, 433.
10- WANG, W.P. and WANG, C.Y. **-** *Difference Method for Generation of Circular Arcs and Ellipses* Computer Aided Design**,** Vol. 21, No. 1, 1989, 33-37.
11- WOLF, W. *High-performance Embedded Computing Architectures, Applications, and Methodologies*., ELSEVIER, 2007, 521.