مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (29) العدد (1) 2007
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Engineering Sciences Series Vol. (29) No. (1) 2007

تصميم خوارزمية استيفاء تحليل رقمي تفاضلي عالية الدقة

الدكتور إبراهيم الشامي*

(تاريخ الإيداع 7 / 12 / 2006. قبل للنشر في 2007/3/26)

□ الملخّص □

تبحث هذه الورقة في تحليل و مقارنة دقة التوليد بخوارزميات الاستيفاء المستندة على التحليل الرقمي التفاضلي ، ويتم طرح خوارزمية جديدة تتصف بدقة توليد أعلى من جميع الخوارزميات المعروفة حالياً. تعتمد المقارنة على حساب معين مصفوفة الانتقال T ، حيث ترتبط الإحداثيات الحالية P_i بالإحداثيات الآتية P_{i+1} بالعلاقة العودية $P_{i+1}=T.P_i$، ويكون بشكل عام $T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

وتعتمد الخوارزمية المقترحة على فرض قيمة cosθ بحيث تساوي $1-\frac{\varepsilon^2}{2}$، وحساب sinθ بحيث يكون معين مصفوفة الانتقال أقرب ما يمكن للواحد الصحيح $\sin\theta = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{8}$ ، وتستخدم مصفوفة الانتقال في حساب إحداثيات أول نقطة مولدة، وتحسب إحداثيات باقي النقاط من علاقة هنرييه:

$\{ P_{i+2}= (2\cos\theta).P_{i+1}-P_i \}$ $i>0$.

الكلمات المفتاحية: خوارزميات الاستيفاء، تحليل رقمي تفاضلي، وحدات تحكم رقمي مستمر، توليد المنحنيات.

* أستاذ مساعد في قسم هندسة الحواسيب والتحكم الآلي، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية-جامعة تشرين-اللاذقية-سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (29) العدد (1) 2007
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Engineering Sciences Series Vol. (29) No. (1) 2007

A High Precision Digital Differential Analyzer for Circular Interpolation

Dr. Ibrahim Chami*

(Received 7 / 12 / 2006. Accepted 26/3/2007)

□ ABSTRACT □

In this paper the writer presents a new algorithm for circular interpolation DDA. The accuracy of this algorithm is much higher than all others compared in this paper.

The comparison in algorithms of interpolation depends on calculating a determinant of the rotation matrix T. We may obtain the following recurrence formula: $P_{i+1} = T.P_i$, where $\{P_i\}$ i>0 is an equidistance point sequence on circular arc and T is a rotation matrix: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Our method is based on imposing a value of cosθ as: ($\cos\theta = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$) and calculating the value of sin where the determinant |T| equals unity. This results that: $\sin\theta = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{8}$.

We used cosθ and sinθ calculating the value of coordinates a single point which comes after the initial point directly. The rest of the interpolation points are calculated by Henrie's equation: { $P_{i+2} = (2\cos\theta).P_{i+1} - P_i$ } i >0 .

Keywords: DDA Algorithms, Always Digital Control Units, Interpolation methods.

* **Associate Professor, Department of Computer Engineering and Automatic Control, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

1- المقدمة:

في خوارزميات الاستيفاء Interpolation algorithms يتم توليد نقاط بإحداثيات حقيقية تقع بين نقطة بداية الاستيفاء ونهايته. والنقاط المولدة تقع على خط مستقيم كما في طريقة أولر Euler أو على منحن من درجة محددة (الرابعة بحسب طريقة رانج-كوتا (عودة، 2002)) . يمكن إجراء الاستيفاء بمساعدة نقاط تتحكم بشكل منحني الاستيفاء حيث نحتاج إلى نقطتي تحكم لتوليد منحني من الدرجة الثانية (Wang, 1989) ، و كحالة خاصة نحتاج إلى نقطة تحكم وحيدة لتوليد منحني قطع ناقص أو دائري. إن الأساس في فكرة الاستيفاء هي سلسلة تايلور (Danielsson, 1970) ، والتي بمساعدتها يمكن توليد نقاط من المنحني بترتيب فردي أو زوجي (Ducamp and Reverchon, 1985) ، فمن أجل استيفاء وفق منحني من الدرجة n لدينا:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i} f(x,y)$$

والتي تعتمد على مشتقات معادلة منحني الاستيفاء ومن أجل خطوة تساوي الواحد الصحيح:

$$f(x+1,y)=f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+.....$$

$$f(x-1,y)=f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-.....$$

$$f(x,y+1)=f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+.....$$

$$f(x,y-1)=f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-.....$$

هذا البحث يسلط الضوء على طرق الاستيفاء للأقواس الدائرية المعتمدة على التحليل الرقمي التفاضلي (Digital Differential Analyzer = DDA). حيث يتم إجراء المقارنات بينها من ناحيتي السرعة والدقة في التوليد. ويتم طرح خوارزمية استيفاء جديدة تتمتع بدقة توليد عالية جداً وبصرف النظر عن طول الخطوة.

تنطلق طرق التحليل الرقمي التفاضلي DDA في توليدها لنقاط الاستيفاء المتتابعة على حل المعادلة التفاضلية التي تصف منحني الاستيفاء. ويتم تبديل العمليات الحسابية المعقدة مثل الضرب والقسمة بعمليات أبسط مثل عمليات الإزاحة على الأعداد الثنائية والجمع والطرح.

تنفذ عمليات الإزاحة على الأعداد االصحيحة التي تعتبر من أسرع العمليات التي ينفذها الحاسوب فالقسمة على 2 تعني إزاحة (للفاصلة) لخانة واحدة نحو اليسار والضرب بـ 2 تعني إزاحة (للفاصلة) لخانة واحدة نحواليمين والضرب بـ 2^n تعني إزاحة (للفاصلة) بمقدار n خانة نحو اليمين والقسمة على 2^n تعني إزاحة (للفاصلة) بمقدار n خانة نحو اليسار وهذا يكافيء الضرب بـ 2^{-n}.

إن العدد الصحيح عند إزاحته نحو اليمين (إزاحة الفاصلة نحواليسار)، فإن جزءاً منه سيدخل في الجزء الكسري وهذا لا يعني أن العدد أصبح عدداً حقيقياً بالضرورة، لأن ذلك يعتمد على طريقة تمثيل العدد داخل الحاسوب، فإذا كان التمثيل مع فاصلة عائمة، فهذا يعني التعامل مع الأعداد الحقيقية، ولكن نتعامل هنا بالتمثيل مع فاصلة ثابتة Fixed point (أي هناك مسجل Register لتخزين الجزء الكسري ومسجل آخر لتخزين الجزء الصحيح من العدد)

ترتبط إحداثيات النقطة الحالية $[x_i, y_i]$ بإحداثيات النقطة التالية التي سيتم توليدها من منحني الاستيفاء $[x_{i+1}, y_{i+1}]$ بواسطة مصفوفة الانتقال Rotation matrix ،والتي سنرمز لها بـ T أي:

$$[x_{i+1}, y_{i+1}] = [T].[x_i, y_i]$$

في حالة توليد قوس دائري تكون T حسب (Smith, 1971):

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

حيث الزاوية θ هي الزاوية المقابلة للقوس الدائري الواصل بين نقطتين متجاورتين من قوس الاستيفاء .

في طرق DDA للاستيفاء وفق قوس دائري يتم تحويل قيمتي الدالتين المثلثيتين $cos\theta$ و $sin\theta$ إلى عدد مناسب من الإزاحات n (لم يقم سميث بهذا الأمر طبعاً).

نلاحظ أن محدد مصفوفة سميث أي |T| يساوي الواحد الصحيح تماماً لأن:

$$|T| = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

ويمكن استنتاج معيار لقياس دقة توليد نقاط الاستيفاء وفق قوس دائري من خلال مقدار الانحراف عن محدد مصفوفة سميث أي مقدار الانحراف عن الواحد الصحيح.

2. أهمية البحث و أهدافه:

تتصف خوارزميات الاستيفاء المستندة على التحليل الرقمي التفاضلي بالسرعة الهائلة حيث إن تلك الخوارزميات تطبق على هيئة دارات رقمية أو بوجود معالجات أو متحكمات صغرية تنفذ عمليات إزاحة على مسجلاتها الداخلية مباشرة وتكون هذه العمليات سريعة جداً مقارنة مع العمليات الأخرى . ولكنها تتصف بالمقابل بقلة الدقة. يتطرق البحث إلى تحليل دقة الاستيفاء في الخوارزميات الحالية، ويطرح خوارزمية تتصف بدقة عالية (مع المحافظة على السرعة العالية في التنفيذ)، مما يسمح باستخدامها في أنظمة التحكم الرقمي المستمر Always Digital Control Units مثل الأجهزة الرقمية للقص الآلي للألواح المعدنية الكبيرة المساحة وأجهزة الحفر أوالرسم أو النقش على السطوح المعدنية مثل النحاس وآلات التفريز الرقمية عموماً. وهذا يعني أن للبحث أهمية تطبيقية. يمكن أيضاً من خلال تطبيق هذه الخوارزمية التحكم بطول الخطوة دون أن يؤثر ذلك على دقة إحداثيات النقاط المولدة.

3. حسابات الدقة لطرق التحليل الرقمي التفاضلي:

في عام 1971 عمل Cohen أول خوارزميتين في التحليل الرقمي التفاضلي (Cohen 1971) لتوليد الأقواس الدائرية، استند في عملهما على ربط عدد عمليات الإزاحة n بطول نصف قطر القوس الدائري R وفق العلاقة:

$$2^{-n+1} < \frac{1}{R} < 2^{-n}$$

وعرف Cohen القيمة : $\varepsilon = 2^{-n}$

على أنها معامل التناسب مابين التزايد وفق المحور الأفقي X والتزايد وفق المحور الشاقولي Y وذلك للنقاط المولدة للقوس الدائري، ويمكن الإشارة إلى أن Cohen قد سمى الخوارزمية الأولى SC-DDA ، والثانية E-DDA .

في خوارزمية SC-DDA لدينا مصفوفة الانتقال الآتية:

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & -\varepsilon\\ \varepsilon & 1\end{bmatrix}$$

وفي خوارزمية E-DDA لدينا مصفوفة الانتقال الآتية:

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & -\varepsilon\\ \varepsilon & 1-\varepsilon^2\end{bmatrix}$$

وإذا ما قارنا هاتين المصفوفتين للانتقال مع مصفوفة الانتقال لسميث نجد أنه لكلتا الخوارزميتين:

$$\sin\theta=\varepsilon$$

ولدينا لخوارزمية SC-DDA :

$$\cos\theta=1$$

بينما لا توجد قيمة محددة لـ cosθ في خوارزميةE-DDA رغم أن هذه الخوارزمية هي أدق من السابقة، لأنه بالعودة إلى معيار الدقة المتمثل بمقدار الانحراف عن محدد مصفوفة سميث أي مقدار الانحراف عن الواحد الصحيح، نجد أن مقدار انحراف الخوارزميةSC-DDA هو ε^2+1، ومقدار انحراف الخوارزميةE-DDA هو0 ، ولكن هذا لا يعني أن الخوارزمية الثانية مثالية في دقتها، وذلك لعدم تناظر عنصري القطر الرئيس لمصفوفة الانتقال.

في عام 1985 حاول Teo (Tao 1985) حل مشكلة الدقة في خوارزميتي Cohen مستفيداً من تقريب سلسلتي الدالتين المثلثيتين sinθ و cosθ وفق الآتي:

$$\sin\theta\cong\varepsilon$$

$$\cos\theta\cong 1-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{4!}\varepsilon^4-.....$$

و بالاكتفاء بحد واحد من سلسلة sinθ وحدين من سلسلة cosθ يكون:

$$\cos\theta\cong 1-\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

وتكون مصفوفة الانتقال لخوارزمية Teo هي:

$$[T]=\begin{bmatrix}1-\dfrac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon\\ \varepsilon & 1-\dfrac{\varepsilon^2}{2}\end{bmatrix}$$

وقيمة محدد هذه المصفوفة هو $\frac{\varepsilon^4}{4}+1$، أي مقدار الانحراف عن الواحد الصحيح هو $\frac{\varepsilon^4}{4}$، وتعتبر هذه القيمة كبيرة نسبياً ، وخصوصاً في حالة توليد قوس دائري بنصف قطر صغير.

4. طريقة البحث:

باستثناء مشكلة عدم الدقة المذكورة في الفقرة السابقة، هنالك مشكلة تراكم الأخطاء و تزايدها من نقطة مولدة إلى أخرى يجري توليدها، كما توجد مشكلة توليد النقطة نفسها في دورتين متتاليتين من الخوارزمية.

أقترح في هذه الفقرة خوارزمية تهدف إلى تلافي تلك العيوب المذكورة آنفاً.

يتم التركيز في الخوارزمية المقترحة على افتراض قيمة الدالة cosθ كما في خوارزمية Teo، أي:

$$\cos\theta \cong 1-\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

ونحسب قيمة الدالة sinθ بحيث يكون محدد مصفوفة الانتقال أقرب ما يمكن من الواحد الصحيح، أي:

$$(\sin\theta)^2 = 1-(\cos\theta)^2 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-(\cos\theta)^2}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)^2} = \sqrt{\varepsilon^2-\frac{\varepsilon^4}{4}} \cong \varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{8}$$

وتصبح مصفوفة الانتقال للخوارزمية المقترحة هي:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1-\frac{\varepsilon^2}{2} & -\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{8} \\ \varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{8} & 1-\frac{\varepsilon^2}{2} \end{bmatrix}$$

وقيمة محدد هذه المصفوفة هو $1+\frac{\varepsilon^6}{64}$، أي مقدار الانحراف عن الواحد الصحيح هو $\frac{\varepsilon^6}{64}$، وبالتالي تتمتع هذه الخوارزمية بدقة عالية جداً، ولكن وجود حد ثان عند حساب sinθ، وذلك مقارنة مع خوارزمية Teo، سيجعل هذه الخوارزمية أقل سرعة، فكيف سنحل هذه المشكلة؟

5. النتائج والمناقشة:

نناقش في هذه الفقرة ثلاث نقاط أساسية، وهي:

1. حل مشكلة السرعة في الخوارزمية المقترحة
2. تحليل الدقة في الخوارزمية المقترحة
3. التحكم بطول الخطوة في الخوارزمية المقترحة

5-1-حل مشكلة السرعة في الخوارزمية المقترحة:

في عام 1989 وضع السيدان Wang في (Wang, 1989) طريقة جديدة تستند على معادلة Henrie التكرارية المعروفة من الستينات وهي:

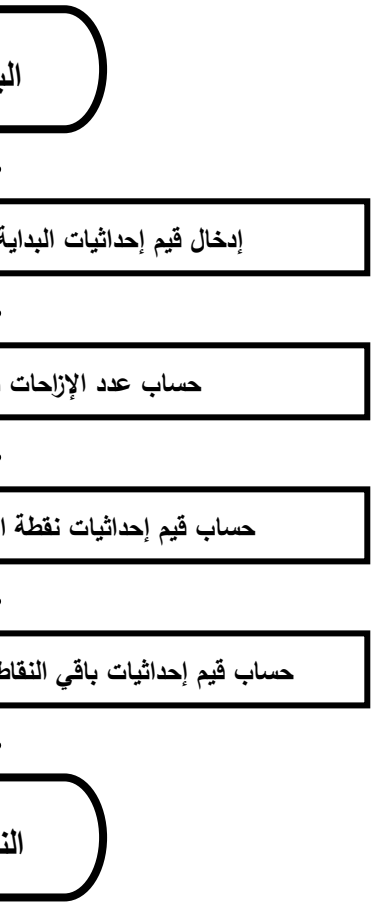
$$P_{i+2} = (2\cos\theta)P_{i+1} - P_i$$

حيث i ترتيب النقطة السابقة، و1+i ترتيب النقطة الحالية، و2+i ترتيب النقطة التالية.

والطريف في الأمر أن المعادلة السابقة تصلح لتوليد الأقواس الدائرية وكذلك القطوع الناقصة ، ولكن كيف لمعادلة رياضية واحدة أن تصف منحنيين مختلفين بآن واحد، لنحلل ذلك!

من الواضح أن المعادلة السابقة تولد النقاط المتتابعة ، ولكن في البداية لا يكفي معرفة إحداثيات نقطتي البداية والنهاية، بل لابد من معرفة إحداثيات نقطة ثالثة، وهي نقطة تقع بعد نقطة البداية مباشرة ، وتحدد هل النقاط المولدة الآتية هي لقطع ناقص أم لدائرة، وهذا يعني أنه علينا حساب إحداثيات النقطة الثالثة هذه بدقة متناهية، لأنها هي التي ستحدد شكل مسار المنحني المولد. لهذا سوف نسمي النقطة الثالثة هذه بنقطة التحكم.

لتحسين سرعة الخوارزمية المقترحة، سنقوم باستخدام الطريقة المصفوفية المقترحة في الفقرة السابقة لتوليد إحداثيات النقطة الثالثة، أي لتوليد نقطة واحدة فقط ، وهذا سيكون بدقة عالية جداً كما أسلفنا. أما قيم إحداثيات النقاط الآتية فسيتم حسابها وفق معادلة Henrie، والتي لن نستخدم فيها قيمة الدالة sinθ المقربة. ويكون المخطط التدفقي للخوارزمية المقترحة كما في الشكل(1).



الشكل(1) المخطط التدفقي للخوارزمية المقترحة

5-2. تحليل الدقة في الخوارزمية المقترحة:

تم اقتراح قيمة cosθ في خوارزمية Wang وفق الآتي:

$$\cos\theta = 1-\varepsilon = 1-2^{-n}$$

مما يسمح بتوليد نقاط متباعدة من القوس، و قد اقترح السيدان Wang وصل تلك النقاط بقطع مستقيمة وفق خوارزمية Bresenham ، والمعدلة في (Pitteway 1990) ، ويمكن ذلك بواسطة معالجين، الأول يولد نقاط القوس، والثاني يولد نقاط القطع المستقيمة، ويمكن بواسطة معالج واحد باستخدام نظام المقاطعة فيه ، حيث يولد البرنامج الرئيس Background Program نقاط القوس، وبرنامج خدمة المقاطعة Interrupt Program يولد نقاط القطع المستقيمة. لم يقترح السيدان Wang قيمة لـsinθ ، باعتبار أنها تدخل في حساب نقطة التحكم فقط، ولكن لو حسبنا أفضل قيمة لـsinθ ، وهي التي تحقق الآتي:

$$\begin{vmatrix} 1-\varepsilon & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = 1$$

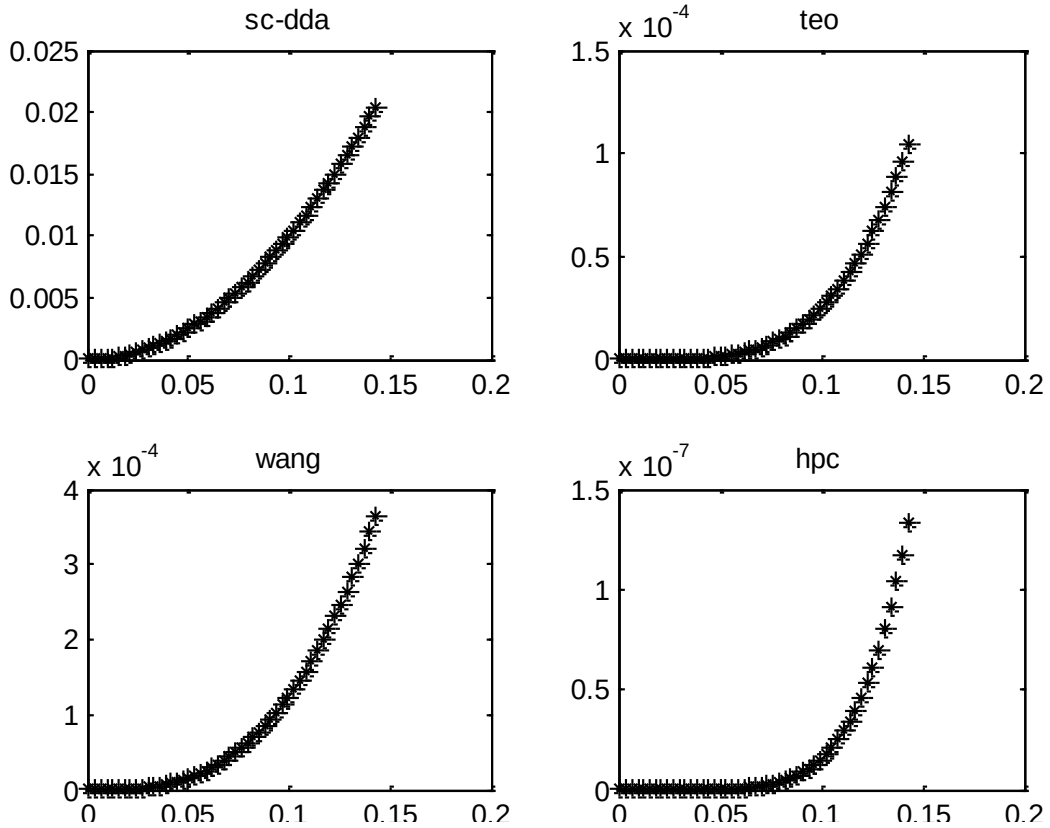
وبالتالي:

$$\sin\theta \cong \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

وهذا يجعل محدد مصفوفة الانتقال $1+\frac{\varepsilon^3}{8}$، أي مقدار الانحراف عن الواحد الصحيح هو $\frac{\varepsilon^3}{8}$ ، وتعتبر هذه القيمة كبيرة نسبياً، وعموماً هذا أكبر من $\frac{\varepsilon^4}{4}$ ، أي إن الدقة أقل من خوارزمية Teo الأقدم. يبين الجدول (1) مقارنة بين الدقة في الخوارزميات.

الجدول (1) مقارنة الدقة في الخوارزميات

الخوارزمية	قيمة محدد مصفوفة الانتقال	قيمة الانحراف عن الواحد الصحيح	الميزات
المثالية	1	0	الدقة مثالية
SC-DDA	$1+\varepsilon^2$	ε^2	غير دقيقة لأن قيمة الانحراف كبيرة جداً
E-DDA	1	0	غير دقيقة لعدم تساوي عنصري القطر الرئيس لمصفوفة الانتقال (رغم تساوي القيم مع المثالية)
Teo	$1+\frac{\varepsilon^4}{4}$	$\frac{\varepsilon^4}{4}$	دقة مقبولة
Wang	$1+\frac{\varepsilon^3}{8}$	$\frac{\varepsilon^3}{8}$	الدقة أسوأ من أعلاه
المقترحة	$1+\frac{\varepsilon^6}{64}$	$\frac{\varepsilon^6}{64}$	أفضل دقة ممكنة مع المحافظة على السرعة



الشكل(2) قيم الانحرافات لمختلف الخوارزميات

وبمساعدة الحزمة MATLAB يمكن رسم المنحنيات كما في الشكل(2) ، والتي تبين دقة الخوارزمية المقترحة، والتي سميناها hpc كاختصار، وتفوقها المطلق على باقي الخوارزميات، وحيث نلاحظ أن الانحراف لخوارزميتي Teo & Wang (المحور الشاقولي) مضروب بـ 10^{-4} ، بينما للخوارزمية المقترحة مضروب بـ 10^{-7} أي أن الخوارزمية المقترحة هي أدق بأكثر من 1000مرة من تلك الخوارزميتين، ونلاحظ أن خوارزمية Teo هي أدق بأكثر من مرتين من خوارزمية Wang، رغم أنها أقدم.

المحور الأفقي هو لتغير ε عندما يتغير نصف القطر R للقوس المولد من 7 وحتى 1000، وباختيار ست قيم عددية للانحراف نحصل على:

Wang=1.0*e-003

0.02406605032362 0.00316727099708 0.00000012500000
0.36443148688047 0.18757022840525 0.07982439283965

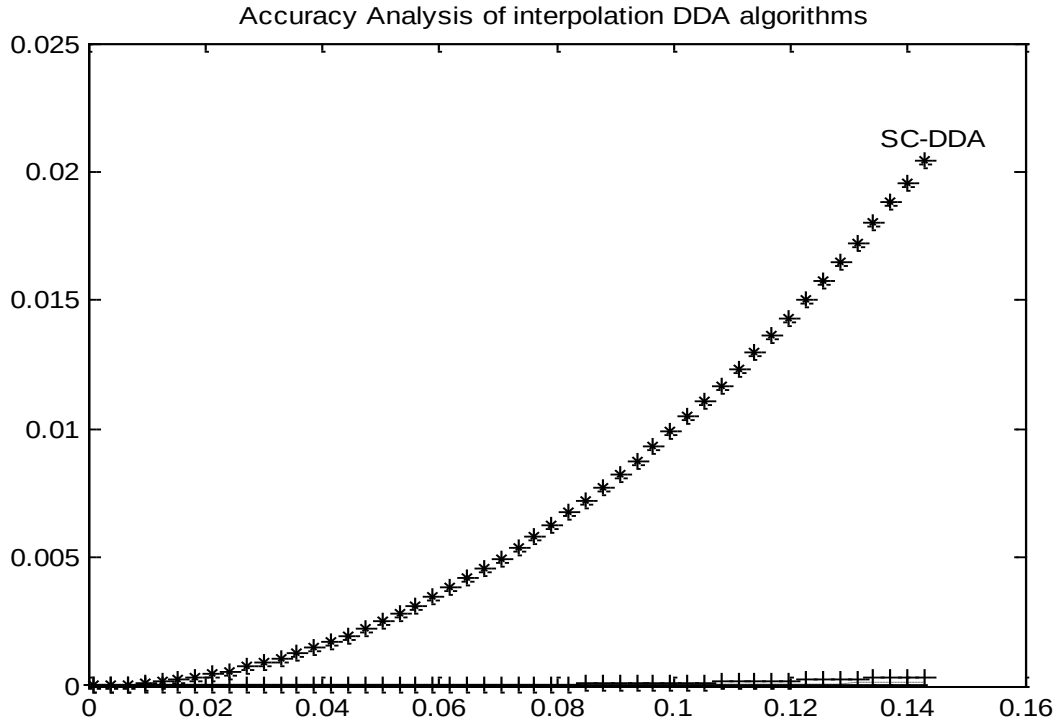
teo=1.0*e-003

0.00277928501166 0.00018605454771 0.00000000025000
0.10412328196585 0.04294822315542 0.01374804114393

hpc=1.0*e-006

0.00057917477818 0.00001003160557 0.00000000000002
0.13281030862991 0.03518259058400 0.00637193369222

ويمكن تجميع المنحنيات الأربعة على شكل واحد وليكن الشكل(3)



الشكل(3) قيم الانحرافات لمختلف الخوارزميات على شكل واحد

ونلاحظ أن قيم الانحراف للخوارزمية SC-DDA كبيرة جداً مقارنة مع قيم الانحرافات للخوارزميات الأخرى، لهذا يمكن حذفها ، وذلك حتى نستطيع مقارنة الخوارزميات الأخرى، وبهذا نحصل على الشكل(4).

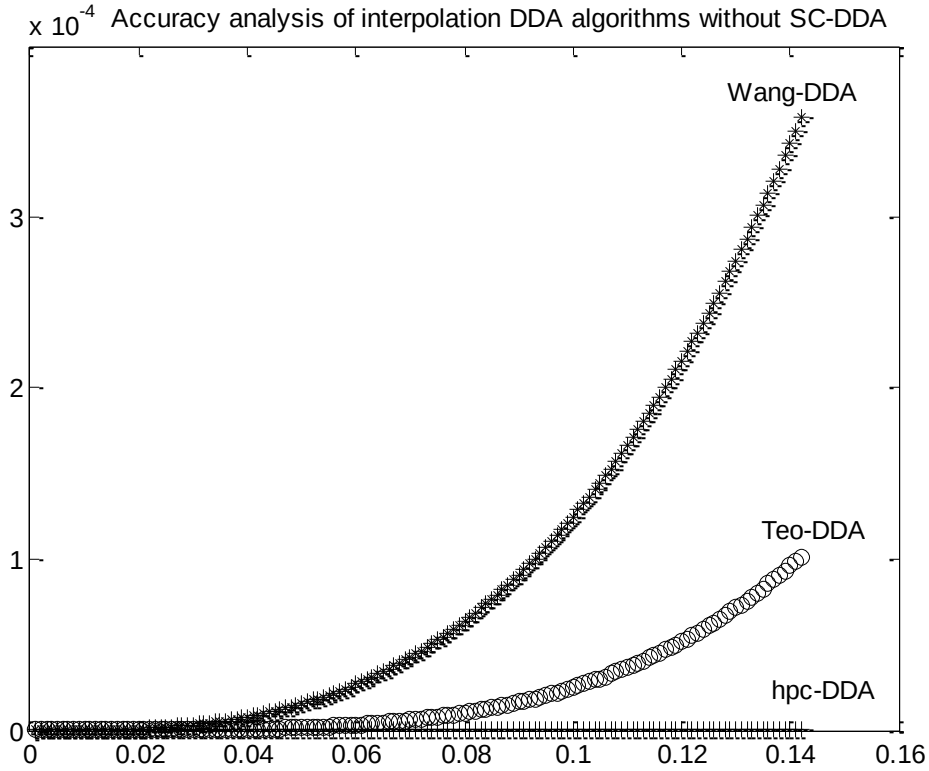
ويبدو من الشكل(4) تفوق الدقة في الخوارزمية hpc المقترحة، حيث إن المنحني الذي يعطي تغير الانحراف مع نصف القطر ينطبق تقريباً مع محور السينات.

3-5. التحكم بطول الخطوة في الخوارزمية المقترحة:

إن طول الخطوة عموماً يرتبط بقيمة ε، حيث نميز الحالتين التاليتين:

1. حالة $\varepsilon = 2^{-n}$ ، وهنا طول الخطوة يساوي الواحد الصحيح، وترتبط قيمة n بطول نصف القطر R، وفق ما أشرنا إليه في الفقرات السابقة.
2. حالة $\varepsilon = 2^{-n+m}$ ، وهنا طول الخطوة أكبر من الواحد الصحيح، وتحدد قيمة m مدى التباعد بين نقطة وأخرى فكلما كانت قيمة m أكبر ، كلما كان التباعد أكبر (تناسب أسي)، و تأخذ m قيماً صحيحة m=1,2,3,…..

في الحالة الثانية يمكن توليد قطع مستقيمة تصل مابين القطع المتباعدة وفق خوارزمية توليد خطي من(Agoston, 2004) ، أو من (Kaarna, Kalvianon and Porkkinen, 2005)، و في (Dawara, 2005) هناك برمجة لخوارزميات التوليد الخطي بلغة الـ C.



الشكل(4) قيم الانحرافات لمختلف الخوارزميات على شكل واحد

6. الاستنتاجات والتوصيات:

إن تطبيق الخوارزمية في وحدات التحكم الرقمي المستمر، سيرفع من دقة تنفيذ عمل تلك الوحدات، مع المحافظة على سرعة تنفيذها العالية. وتطبق عادة خوارزميات DDA بالدارات Hardware، حيث هناك بساطة في البنية، والتكلفة.

إن أساس عمل خوارزميات DDA هو اعتمادها على عمليات الإزاحة المباشرة، من خلال استخدام مسجلات المعالج الداخلية، ويمكن تطبيق هذه العمليات على أعداد (معاملات Operands) صحيحة بفاصلة ثابتة، كبديل عن استخدام الأعداد الحقيقية مع فاصلة عائمة، وهذا يعني أنه لا حاجة لتقريب نتائج الإزاحات إلى أقرب عدد صحيح.

إن رفع معيار الدقة سيقلل من تأثير مشكلة تراكم الأخطاء وانتشارها عند توليد عدد كبير من النقاط، مما يسمح باستخدام الخوارزمية المقترحة لتوليد أقواس طويلة بقدر ما نشاء ، كما في آلات قص الألواح المعدنية .

المراجع:

1- **عودة، نبيه** : *التحليل العددي(1)*. مديرية الكتب والمطبوعات- الطبعة الثانية، 2001-2002- جامعة دمشق. 144صفحة.

2- AGOSTON, M- *Computer Graphics and Geometric Modeling*. Springer Publisher, 2004, 922p.

3- COHEN, D - *On Linear Difference Curves* Advenced Computer Graphics, Economics, Techniques and Applications**,** Plenum Press , London1971 pp.1143-1177.

4- DANIELSSON, P - *Incremental Curve Generation* IEEE Transactions on Computer**,** Vol. C-19, No. 9, 1970, PP. 783-793.

5- DAWARA, S-*Mastering Graphics Programming in C,* FIRE wall Media 2005,286p.

6- DUCAMP, M and REVERCHON, A - *Mathematiques et Graphisme sur Apple II.* Eyrolles, Paris, 1985, 300p.

7- KAARNA, A, KALVIANON, H and PORKKINEN, J- *Computers* . Joensuu Finland 2005, 1270p.

8- PITTEWAY, M.L.V. 1990- *On Some Pel Level Algorithms* Computer Aided Design, Vol. 22, No. 7, PP. 451-456.

9- SMITH, L.B - *Drawing Ellipses, Hyperbolas or Parabolas with a Fixed Number* of Points *and Maximum Inscribed Area* Computer Journal**.** Vol. 14, No. 1, 1971, PP. 81-86.

10- TAO, H - *A High Precision Digital Differential Analyzer for Circle Generation* Fundamental Algorithms for Computer Graphics**,** NATO Scientific Affairs Division, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1985 pp.239-256.

11- WANG, W.P. and WANG, C.Y. - *Difference Method for Generation of Circular Arcs and Ellipses* Computer Aided Design**,** Vol. 21, No. 1, 1989, PP. 33-37.