مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية - سلسلة العلوم الهندسية المجلد (18) العدد (4) 1996
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research –Engineering Science Series Vol. (18) No (4) 1996

استخدام طريقة العناصر المنتهية في تحليل الحالة الإجهادية – التشوهية في الردميات الترابية العالية

الدكتور رامي مخائيل حنا*

(قبل للنشر في 1996/5/29)

□ الملخّص □

إن تحليل الحالة الإجهادية التشوهية في الردميات الطرقية باستخدام الطرق التقليدية غير دقيق وبعيد عن الحل المثالي، لكن استخدام الطرائق الرياضية التحليلية وطرائق النمذجة الرياضية لاسيما طريقة العناصر المنتهية في تحليل الحالة الإجهادية التشوهية في منظومة (ردمية + أساس)، تعتبر من أفضل الطرائق للوصول إلى الحل المثالي وتبيان السلوك الحقيقي للمنشأة ككل. فنتائج الحساب على النموذج المقترح بينت أن القيمة العظمى للانتقال الشاقولي u_z وفق محور الردمية كان باتجاه المحور، أما الانتقال الأفقي u_x الأعظمي فكان على حافة الردمية العلوية (حاجب الردمية)، أما فيما يتعلق بالاجهادات العمودية σ_z فمختلف قليلاً عن توزع الإجهاد الشاقولي الجيوستاتيكي $\sigma_z = \gamma.h$ في مركز الردمية، أما عند أطراف المنحدر فيكون التمايز كبيراً، والنتيجة مشابهة عندما يكون الضغط الجانبي ثابتاً، ويمكن الحكم على ذلك من حساب σ_x.

أما الإجهادات المماسية τ_{zx} فقد تركزت في منطقة منحدر الردمية، وتركزت القيمة العظمى لـ τ_{zx} في مركز الردمية وعلى عمق معين من السطح وباتجاه حافة الردمية وقاعدة المنحدر، لقد تناقصت مناطق تركيز الإجهادات المماسية بالقيمة والتوزع وبالقرب من السطح.

أما فيما يخص توازن الجملة (أساس + ردمية) ووفقاً للخواص الفيزيائية – الميكانيكية المعتمدة، تبين لنا أن أصغر قيم لعوامل الأمان ظهرت في منطقة منحدر الردمية كما ظهرت العوامل الأصغرية في أساس الردمية وعلى عمق محدد من سطحه.

---

* مدرس في قسم المواصلات والنقل – كلية الهندسة المدنية – جامعة تشرين – اللاذقية سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية - سلسلة العلوم الهندسية المجلد (18) العدد (4) 1996
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research –Engineering Science Series Vol. (18) No (4) 1996

STRESS-DEFORMATION ANALYSIS OF HIGH EARTH EMBANKMENT BY USING FINITE ELEMENTS PROCEDURES

Dr. Eng. Rami Hanna*

(Accepted 29/5/1996)

❐ ABSTRACT ❐

It is known that, the analysis of stress-deformation distribution in earth embankment by using traditional procedures is inexact, and far from its exact solution.

Recently the stress-deformation distribution was successfully, determined by using mathematical models, such as finite elements procedures. The results of studying stress deformation analysis of high earth embankment by using finite elements procedures are presented.

The maximum values of vertical deflections u_z were according to the axis of embankment, and the higher values of horizontal deflection were in the higher edge of the embankment.

The vertical stresses σ_z in system (embankment + base) were different from the geostatical stress distribution ($\sigma_z = \gamma.h$) by the center of embankment the differences were very high. The same results were for vertical stress σ_x, since lateral stresses were steady.

The shear stresses τ_{zx} were concentrated by the slope of the embankment, thus the maximum values were by the axis of the embankment.

At the conditional depth of the surface and in the direction of the edge of embankment and the base of slope, the shear stresses were decreased in values and distribution.

* Lecturer at Transport Department, Faculty of Civil Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تعتبر مشكلة تأمين توازن الردميات الترابية الطرقية والردميات الجيوتكنيكية من المشاكل الهندسية المعقدة التي صادفت علماء ميكانيك التربة منذ زمن طويل. ويزداد الوضع تعقيداً عندما تصبح ارتفاعاتها كبيرة أو عندما يصبح الوضع الجيولوجي الهندسي معقداً وشائكاً.

لقد بينت وتبين تحاليل المعطيات حول تشوه وانهيار الردميات الترابية الطرقية والطرائق التصميمية المتعلقة بها، أن المصممين اليوم لا يعتمدون النموذج الأمين الذي يحلل نظرياً متانتها واستقرارها، بل إنهم اعتمدوا ويعتمدون في واقع الحال على القوانين المستنتجة من حوادث وقعت لمنشآت متشابهة والتي تملك المكان المفترض في جسم الردمية. مثلاً حتى وقتنا الراهن مازال المصممون يدرسون توازن واستقرار المنحدرات الترابية ومنحدرات الردميات الترابية الطرقية ومنحدرات السدود الترابية على أساس دوائر الانزلاق السطحية التجريبية أو سطوح الانزلاق المتكسرة أو منحنيات القطوع المكافئة أو الناقصة، ولكن هذا الأسلوب لا يخلو من ابتعاد حقيقي وجوهري عن سلوك المنحدر وارتباطه بالوسط وارتباطه بالوسط المحيط به، فكم من المنشآت الطرقية كالردميات التي يتجاوز ارتفاعها 12م وقد انهارت بسبب عدم كفاءة عناصرها الإنشائية -منظومة (أساس + ردمية)- على مقاومة الإجهادات المؤثرة عليها أو بسبب الوضع الجيولوجي الهندسي للموقع الذي لا تستطيع الطرائق التقليدية التعامل معه بواقعية، أو بسبب تبدل الخواص الفيزيائية – الميكانيكية لمادة الردمية ذاتها مع الزمن بالإضافة لذلك عدم كفاءة الحلول التصميمية الموضوعة لها وإن كان ذلك من حيث الأسلوب أو من حيث واقعها وسلوكها الحقيقي تحت تأثير مجمل القوى.

في الأعوام الأخيرة بدأت تظهر طرائق رياضية متطورة لحل المشاكل الجيوتكنيكية، كمنشآت السدود الترابية ومنشآت الجيوتكنيكية الطرقية وأساسات الأبنية والمنشآت الضخمة، ونذكر منها طرائق النمذجة الرياضية كطريقة التشابه الهيدروديناميكي الكهربائي ونخص بالذكر منها طريقة العناصر المنتهية التي اعترض عليها كبار علماء ميكانيك التربة حتى وقت ليس ببعيد، إلا أنه لا ننكر أنه في بداية عهد هذه الطرائق كانت حلولها تقريبية وبعيدة أحياناً عن الحل المنطقي أو عن وصف السلوك الفعلي لأية منشآت وضعت لها حلول باستخدامها.

لكن في الأعوام الخمس عشرة الأخيرة تحديداً بدا عصر القفزات الكبيرة لهذه الطرائق، نحو وضع الحلول المثالية والدقيقة للمشاكل الجيوتكنيكية المعقدة.

في بحثنا هذا وانطلاقاً من اعتقادنا الشخصي ونتيجة لتوفر أبحاث كثيرة أكدت على دقة وكفاءة طريقة العناصر المنتهية، فقد اعتمدنا هذه الطريقة كمنهج وأسلوب لتحليل الحالة الإجهادية – التشوهية في دراسة الردميات الترابية العالية ولقد قدمنا حلاً على ردمية واحدة حلل فيه بمساعدة هذه الطريقة كافة مؤشرات التشوه والتوازن وفقاً لخواص فيزيائية – ميكانيكية محددة للتراب ووفقاً لأبعاد هندسية محددة أيضاً على اعتبار العمل المشترك لجملة (أساس + ردمية) وفي المستوى.

I- فكرة عامة عن بعض الطرائق غير الرياضية المعتمدة لحل الردميات الترابية الطرقية:

حتى زمن ليس ببعيد مازالت أغلب الشركات المصممة والهيئات العامة تستخدم طرائق تقليدية حسابية لوضع حلول إفرادية لردميات ترابية عالية (ارتفاعاتها تزيد على 9م) وذلك على النحو التالي:

تعتبر منظومة الردمية عند دراسة توازنها واستقرارها كتلة منفصلة عن أساسها ويتم دراسة توازن جوانبها باستخدام دوائر الانزلاق السطحية وما شابهها ووفقاً لأبعاد هندسية وخواص فيزيائية – ميكانيكية محددة، فعند توافر عناصر التوازن وفقاً لتلك المعطيات تعتبر الردمية متوازنة حتى مستوى أساسها، وفي الخطوة التالية وبعد دراسة الردمية يتم تقييم توازن أساس الردمية على أن يكون خاضعاً لحمولات الردمية وما عليها من قوى وإجهادات إضافية ويتم تحليل التوازن بعد تحليل الحالة الإجهادية لمنطقة الأساس وحتى عمق مرة ونصف عرض تماس الردمية مع سطح الأساس B كما هو موضح بالشكل.

فبعد تحليل الإجهادات في أساس الردمية، فإذا بينت نتائج الحساب أن الإجهادات تزيد من الإجهادات المسموحة يعاد تصميم الأبعاد الهندسية للردمية أو يتم اللجوء إلى طرائق تعتمد على تقوية أساس الردمية وتحسين خواصها الميكانيكية والفيزيائية، ويلجأ إلى استبدال التربة وحتى عمق تحدده نتائج الحساب حتى نصل إلى مستوى إجهادات أقل أو يساوي الإجهادات المسموح بها.

لكن هناك مأخذ واضح على هذه الطرائق، حيث أنها لا تأخذ بعين الاعتبار التأثير المتبادل الفعلي بين الردمية وأساسها وبهذا الشكل لا تعكس السلوك الفعلي الحقيقي والدقيق لسوك المنشأة (ردمية + أساس) تحت مختلف القوى كما هناك مأخذ آخر أكثر وضوحاً أن هذه الطرائق تقف عاجزة عن وضع الحلول المثلى الدقيقة عندما يصبح الوضع الجيولوجي – الهندسي لأساس الردمية معقداً وشائكاً وتصبح عاجزاً عن تحليل الحالة الإجهادية

– التشوهية عندما تزيد عدد الطبقات الستراتيغرافية عن طبقتين أو ثلاث.

II– دراسة الردميات الترابية الطرقية باستخدام العناصر المنتهية (F.E.M):

إن إحداث وتطوير طرائق تحليل الحالة الإجهادية – التشوهية من منظومة (أساس + ردمية) يعتبر من أفضل الطرائق فعالية في حل المشاكل المتعلقة بتصميم الجسم الترابي للطريق ولاسيما أنها تأخذ بعين الاعتبار كافة التأثيرات المتبادلة بين عناصر الجملة الإنشائية، وتأخذ بعين الاعتبار تعقيد الوضع الجيولوجي – الهندسي لموقع الطريق وتطور مناسيب المياه الجوفية وتبدل الخواص الفيزيائية – الميكانيكية للتربة مع الزمن، لكن في هذه الحالة يبقى أمامنا الجواب على سؤال وحيد ألا وهو فيما يتعلق بتأمين استقرار وثبات الحالة الإجهادية – التشوهية في منظومة (ردمية + أساس) وذلك في مجالات مسموح بها.

في الوقت الحالي إن المسألة المتعلقة بتشوه الردميات العالية وبشكل خاص مشكلة إمكانية تشوه كونتور الردمية في مرحلة البناء، وانسجام الجملة الإنشائية (ردمية + أساس) أثناء الاستخدام، تعتبر من المشاكل الهامة التي أصبحت حلولها توضع وبنجاح بمساعدة النمذجة العددية للحالة الإجهادية – التشوهية على الحاسوب.

عند التصميم الكلي لجملة (ردمية + أساس) وبمساعدة طريقة العناصر المنتهية نتوصل إلى طريقة تحليل عددية للحالة الإجهادية – التشوهية، والتي بشكل كامل بإمكانها أن تأخذ بعين الاعتبار الخواص الفيزيائية – الميكانيكية الحقيقية ومهما تغيرت وتشعبت ضمن الجملة الإنشائية كما بإمكانها أن تأخذ بعين الاعتبار النظام الحراري – المائي للجسم الترابي وتبدله مع الزمن ومهما ازداد تعقيد الوضع الجيولوجي – الهندسي للموقع.

II–1: النموذج الرياضي لطريقة العناصر المنتهية المستخدم في حساب الحالة الإجهادية – التشوهية في الدرميات الترابية:

إن جوهر طريقة العناصر المنتهية يتلخص بما يلي: إن الجسم المتجانس المستمر يعتبر وكأنه مؤلف من عدد متناه من العناصر المنفصلة تستند بعضها إلى بعض بشكل مفصلي ومثبتة عند نقاط الاستناد بعضها إلى بعض. لكن هذه العناصر المنفصلة أو المفصولة لا تعتبر قطع منفصلة عن الجملة الإنشائية، وإنما تم فصلها عن الجسم المستمر من أجل تحديد الحالة الإجهادية – التشوهية في كل منها، وبذلك فإن المستمر والمقسم إلى عناصر لا يفقد طبيعته البدائية ويبقى مستمراً.

وبشكل عام فإن جملة المعادلات والنموذج الرياضي لطريقة العناصر المنتهية أتت من مبدأ لاغرانج الذي ينص على ما يلي:

إذا كان لدينا جسم مرن فإنه سوف يكون في حالة مستقرة ومتوازناً عندما يكون الفرق بين الطاقة الكامنة الناتجة عن انتقال عقد الجملة الإنشائية وبين الطاقة الكامنة عن القوى المؤثرة أصغرياً أو متناهياً إلى الصفر، ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقة:

$$E = E(u,v,w) - E(Q,P) \quad (1)$$

حيث: E(u,v,w): الطاقة الكامنة لتشوه الجسم المرن،

U: الانتقال وفق المحور X،

v: الانتقال وفق المحور Y،

w: الانتقال وفق المحور Z (في حالتنا اعتمدنا الوضع في المستوى إذا v=0)،

E(Q.P): الطاقة الكامنة للقوى الخارجية،

Q: القوى الحجمية،

P: القوى المركزة والموزعة بانتظام الخارجية.

إذا انطلقنا من هذا المبدأ وباستخدام مبادئ العناصر المنتهية فإن الوجهة الرياضية للمسألة تقودنا إلى حل المعادلات المصفوفاتية بعد تحويلها باستخدام طريقة العناصر المنتهية من معادلات تفاضلية، وهذه المعادلات تأخذ الشكل التالي والحالة في المستوى:

$$\{R\} = [K(U)]\ \{U\} \quad (2)$$

حيث أن:

{R}: شعاع القوى عند العقد الزاوية،

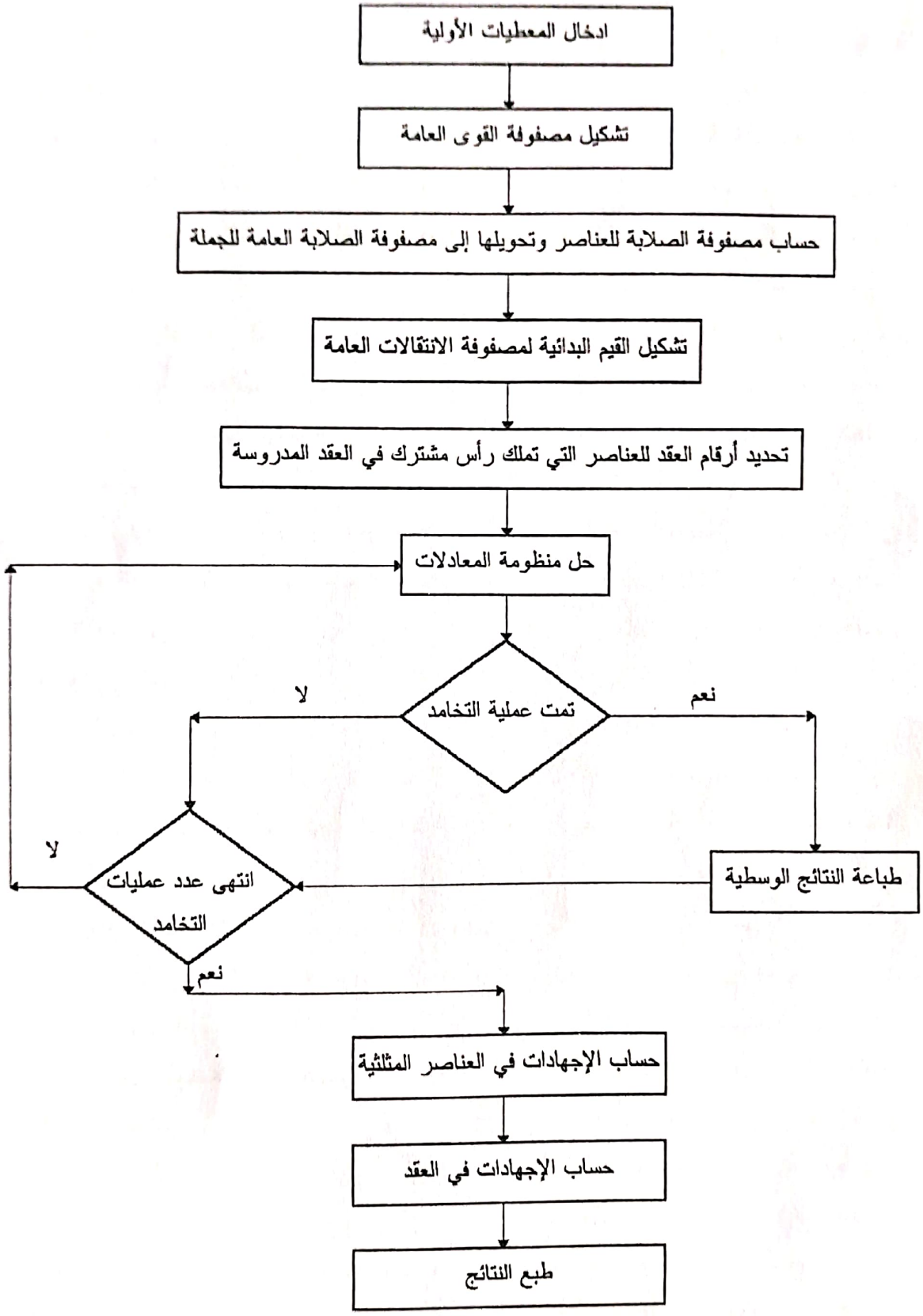
{K}: مصفوفة الصلابة للجملة (أساس + ردمية)،

{U}: شعاع الانتقال للعقد الزاوية وفق المحور X وZ.

ويبين الشكل رقم (1) المخطط المنهجي لبرنامج حساب الحالة الإجهادية – التشوهية الموضوع من قبلنا وباستخدام طريقة العناصر المنتهية وذلك في الحالة المستوية.

II-2: الاعتبارات التصميمية المعتبرة في الحساب:

بتم اعتبار الخصائص التشوهية للجملة (ردمية + أساس) على أنها تتعلق وترتبط بالحالة الإجهادية، كما تم اعتبار شروط المتانة انطلاقاً من أن الجسم الترابي وكأنه وسط تشوهه خطي ويملك قيماً ثابتة لعامل التشوه E وعامل بواسون μ في كل عنصر (في دراستنا اعتمدنا العنصر المثلثي (انظر الشكل 1) أما بالنسبة لقوى الثقالة فقد تم اعتبارها موزعة بالتساوي على رؤوس المثلث وذلك عند حساب الساحة الإجهادية في الجسم الترابي على أساس النمذجة الرياضية وباستخدام نظرية العناصر المنتهية.



شكل (1): المخطط النهجي لبرنامج حساب الحالة الإجهادية – التشوهية باستخدام طريقة العناصر المنتهية

تجدر بنا الإشارة أنه عند وجود المياه الجوفية في أساس الردميات الترابية فإنه يجب إدخال تأثيراتها على الساحة الإجهادية وفقاً للقوى الناتجة عنها، إن كانت تسربية ضاغطة أو قوة هيدروستاتيكية رافقة.

في حالة الردميات على السفوح أو المناطق الجبلية الوعرة، قد تظهر في أساس الردمية أو جسمها نتيجة الوضع الجيولوجي لمنطقة الردمية قوى هيدروستاتيكية وديناميكية للمياه الجوفية تضاف إلى قوى الثقالة وفقاً لاتجاهات تأثير قواها ولكن هنا في دراستنا لم نتطرق إلى الموضوع واعتبرنا أن الردمية وأساسها خاضعة فقط لقوى الثقالة.

II-3: وصف الجملة الإنشائية والشروط الطرفية:

إن الجملة الإنشائية هي ردمية ترابية ارتفاعها (H=10M) وميول جوانبها (1:1.5) أما عرضها من الأعلى (2b=7.5m). تستند الردمية على تربة من نفس خواص الردمية أي $E_1/E_2=1$ وبالتالي $\gamma_1/\gamma_2=1$ و $\mu_1=\mu_2$ أي أن مواصفات المتانة والتشوه والأوزان الحجمية متشابهة (شكل a-1) (بالحساب تم تدقيق تجانس خواص التشوه في الأساس والردم)، علماً بأن تماسك التربة كان (C=0.035Mpa) وزاوية الاحتكاك الداخلي ($\varphi=18^{\circ}$).

تم تقسيم الجملة الإنشائية (أساس + ردمية) إلى شبكة من العناصر المنتهية شكل (1-b) حيث أنه قمنا بتصغير مساحة المثلثات في المناطق التي تتركز فيها الإجهادات والمناطق التي يهمنا بشكل أساسي توزع الإجهادات فيها.

أما شروط الطرفية فكانت على النحو التالي:

1- على الجانب الأيسر والأيمن للجملة الإنشائية المقسمة إلى عناصر مثلثاتية هناك فقط انتقالات شاقولية أما الانتقالات الأفقية معدومة.
2- على الحد العلوي للجملة الإنشائية هناك انتقالات أفقية وانتقالات شاقولية.
3- على الحد السفلي للجملة (أساس + ردمية) على عمق 37.5m تحت منسوب التأسيس، الانتقالات الأفقية والشاقولية معدومة باعتبارها تستند على طبقة كتيمة غير قابلة للتشوه.

هكذا انطلاقاً من هذه الشروط الطرفية المفترضة، ينطلق الحساب لإيجاد قيم الانتقالات الشاقولية والأفقية للجملة ككل ومن بعدها حساب التشوهات والإجهادات والتوازن في عقد الجملة

الإنشائية المقسمة إلى عناصر وفقاً للمخطط النهجي للبرنامج الموضوع من قبلنا وباستخدام طريقة العناصر المنتهية.

III- تحليل نتائج الحساب:

إن النتائج التي توصلنا إليها فيما يتعلق بحساب الحالة الإجهادية – التشوهية للنموذج الرياضي المقترح موضحة على الأشكال من (2 إلى 5).

III-1: فيما يتعلق بنتائج حساب انتقالات العقد والإجهادات في عناصر منظومة (أساس + ردمية) ووفقاً لاعتماد البناء السريع للردمية، قد تبين لنا أن القيمة العظمى للانتقال الشاقولي u_z هي وفق محور الردمية (الطريق) انظر الشكل (3a)، أما الانتقالات الأفقية (شكل 3b)، وبالنسبة لظهور وتشكل التشوهات فإن الردمية اصطلاحاً يمكن تقسيمها بالارتفاع إلى قسمين، في الجزء العلوي -40)] [%(45 من مساحة المقطع العرضي، التشوه والانتقال كان باتجاه محور الردمية، أما الجزء السفلي من المساحة فإن انتقالات عقد الجملة كانت باتجاه المنحدرات، زد على ذلك فإن الانتقالات الأفقية الأعظمية لاحظناها على حافة الردمية العلوية (الحاجب)، أما في الأساس تحت طرف الردمية من الأسفل انظر الشكل (3b).

تجدر بنا الإشارة إلى أن المظهر العام للحالة التشوهية لمنظومة (ردمية + أساس) يعكس الصورة الحقيقية لسلوكها وذلك وفقاً للخيال الهندسي البديهي في حالة تأثير الوزن الذاتي للتربة، كما يعكس حقيقة إمكانية حدوث بروز للتربة عندما تكون تربة اساس الردمية ضعيفة حيث يمكن أن تكون الحالة الإجهادية غير مستقرة.

III-2: إن توزع الإجهادات العمودية σ_x, σ_z في الجسم المتجانس للوسط الترابي يخضع وبشكل ملحوظ لقوانين ثابتة شكل (4).

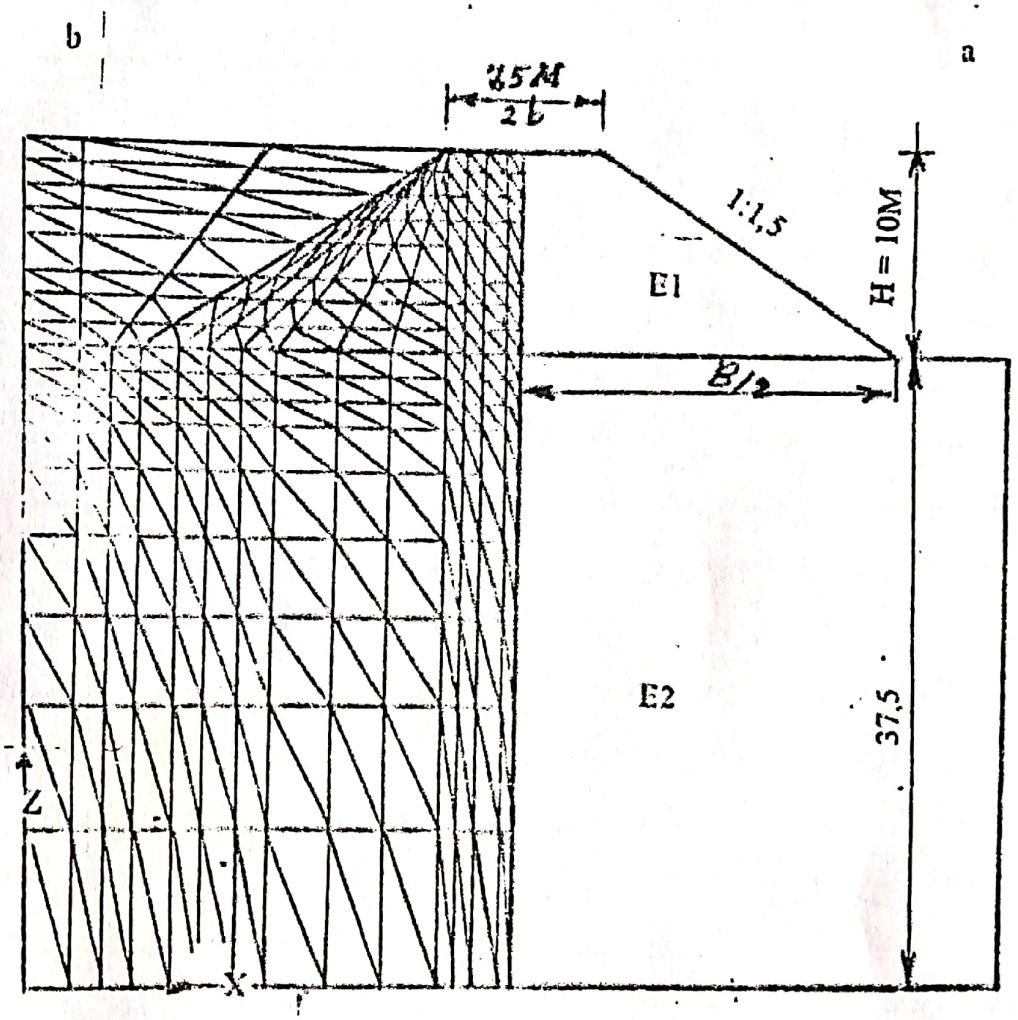
والمميز هنا أنه في مركز الردمية تكون قيم الإجهادات الشاقولية مختلفة قليلاً عن توزع الإجهاد الشاقولي الجيوستاتيكي $\sigma_z = \gamma.h$ شكل (4a) أما في أطراف الردمية وعند منطقة المنحدر يكون التمايز كبيراً نوعاً ما والنتيجة مشابهة عندما يكون الضغط الجانبي ثابتاً، ويمكن الحكم في ذلك من حساب σ_x شكل (4b).

III-3: تركزت الإجهادات المماسية τ_{zx} في منطقة منحدر الردمية، أما القيمة الأعظمية τ_{zx} فقد تركزت في مركز الردمية وعلى عمق معين من السطح. وباتجاه حاجب الردمية وقاعدة المنحدر فإن مناطق تركيز الإجهادات المماسية قد تناقصت بالقيمة والتوزع وبالقرب من السطح، انظر الشكل (5).

III-4: من تحليل منحنيات الإجهادات نجد أنه بالاقتراب من منحدر الردمية تصبح أكثر تحدباً وامتداداً وانحدارا متزايداً، ومن خلال ذلك نجد أن قيم الإجهاد العمودية

العظمى تتناقص ببطء، أما القيمة الأصغرية فتتناقص سريعاً، أما في أساس المنحدر بالقرب من قاعدة الردمية يصبح المحور الكبير للقطع الناقص للإجهادات قريباً من الأفقي.

III-5: إن توازن منظومة (ردمية + أساس) كان مؤمناً بشكل كافٍ حيث كانت قيم عوامل الأمان الأصغرية في حدود منحدر الردمية وعلى بعد معين من سطح الأساس وهذه العوامل تقع ضمن الحدود المسموحة انظر الشكل (5) فالحالة الإجهادية – التشوهية ضمن المعطيات المتوفرة مستقرة تماماً.

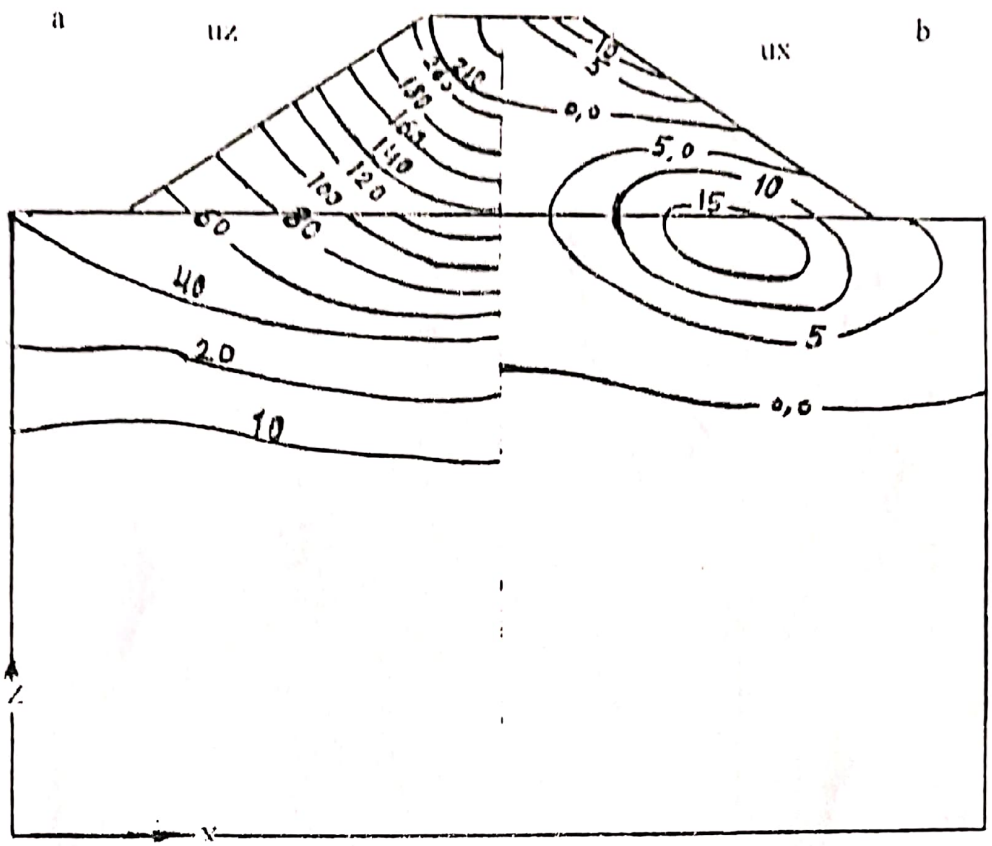


شكل (1): المخطط الحسابي للجملة الإنشائية ومخطط تقسيم الجملة إلى عناصر منتهية

a- المخطط الحسابي.

b- مخطط تقسيم الجملة إلى عناصر منتهية.

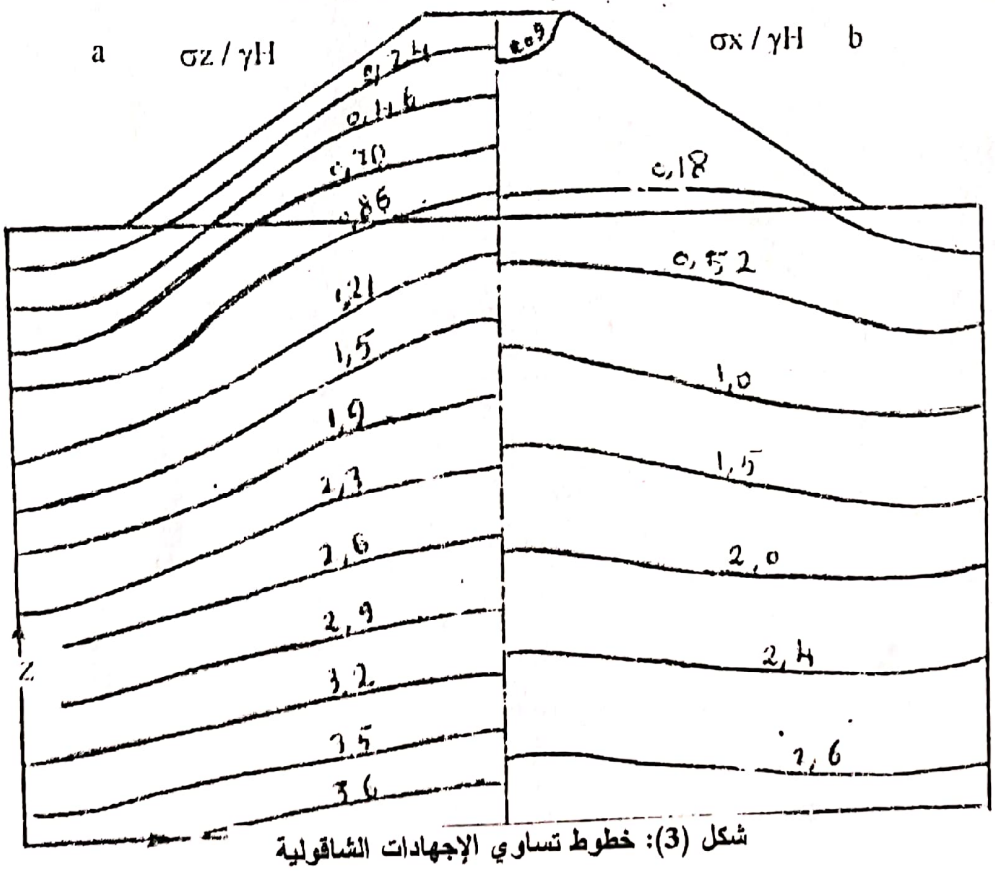
$m = 1:1.5$, $\mu = 0.3$, $E_1/E_2 = 1$



شكل (2): خطوط تساوي الانتقالات الشاقولية والأفقية

a- خطوط تساوي الانتقالات الشاقولية MM u_z

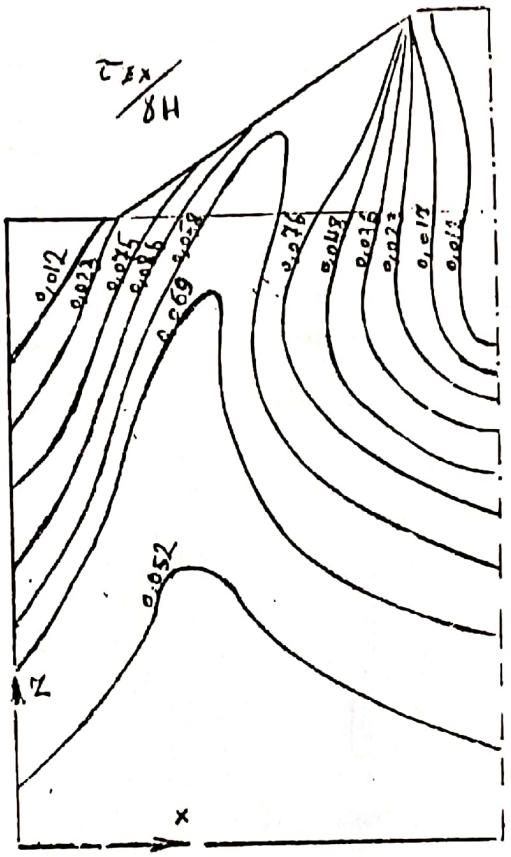
b- خطوط تساوي الانتقالات الأفقية MM u_x



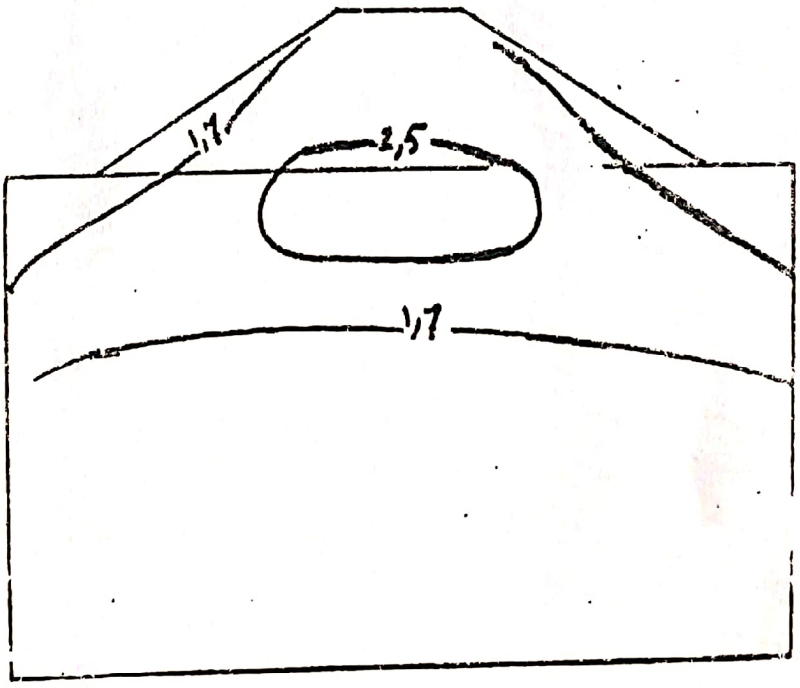
شكل (3): خطوط تساوي الإجهادات الشاقولية

a- خطوط تساوي الإجهادات الشاقولية العمودية σ_z

b- خطوط تساوي الإجهادات الأفقية σ_x



شكل (4): خطوط تساوي الإجهادات المماسية τ_{zx}



شكل (5): خطوط تساوي عامل الأمان في منظومة (أساس + ردمية)

REFERENCES المراجع

[1]- Ukhov S.B., Semenov V.V. Use of Numerical calculation methods for studies on the Interaction between concrete Dam and Heterogeneous fissured block foundations Indo-Soviet Norking on Rock Mechanics, New Delhi, 1988.

[2]- Stricklin T.Q., Haisjer W., and Reisemen W. Evaluation of Solution Procedures of Material and/or Geometrically Non-Linear structural analysis – AIAAJ, 1990, Vol. II, pp.292-299.

[3]- Zien Kiewisz O.C., the finite element method –3rd ed. – New York: McHraw-Hill, 1979.

[4]- The Academy of Sciences, the ministry of Railway. The comparison method in engendering geology for determining the trust of landslides. //BJEG,: Paris 1978, No. 17, pp. 48-52.

[5]- Ukhov S.B. Design of structures by using finite elements procedures Moscow 1986.

[6]- المقترحات الأساسية المتعلقة ببناء الردميات الطرقية من مخلفات الحفريات الترابية عندما تكون رطوبة التربة أكبر من الرطوبة المثالية معهد البحوث العلمية – اتحاد جمعيات الطرق السوفيتية موسكو 1988.

[7]- المبادئ الأساسية لحساب توازن المنحدرات الصخرية العالية باستخدام طريقة العناصر المنتهية موسكو 1973.

[8]- روزين ل.أ. طريقة العناصر المنتهية في حساب المنشآت الهيدروليكية باستخدام الحاسوب. لينيغراد. انرجيا 1971.