وجهة نظر في معالجة طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات

د. سليمان ابو دياب*

ملخص

في طرق العناصر المحددة تكون التوابع التقريبية للانتقالات غير متعلقة مباشرة بتوابع الحمولات على مستوى العنصر المحدد. تظهر هذه العلاقة بين التوابع المذكورة فقط في جملة المعادلات النهائية الجبرية لانتقالات العقد وبشكل نقطي كعامل الجملة المدروسة. في سياق هذا البحث سوف يتم ربط توابع الانتقالات التقريبية بتوابع الحمولات في مستوى العنصر المحدد وبشكل منظم بحيث يتم تحقيق المعادلة التفاضلية الحاكمة للمسألة المدروسة وسوف تعرض وجهة نظر جديدة في تطبيق طريقة العناصر المحددة – نموذج الانتقالات. ستفحص وجهات النظر المقترحة بناءً على النتائج العددية لعناصر محددة جديدة مطورة لمعالجة مسائل الاطارات والبلاطات الخاضعة للانعطاف.

* الدكتور سليمان أبو دياب مدرس في كلية الهندسة المدنية – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

1- مقدمة:

تختار توابع الانتقالات التقريبية المستخدمة في طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات عادة مستقلة عن توابع الحمولات. فالأساس النظري لهذا الاختيار هو مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري الذي يسمح باستقلالية توابع الانتقالات ضمن العنصر عن توابع الحمولات، إذ لا يفترض في توابع الاجهادات المشتقة من توابع الانتقالات التقريبية أن تحقق معادلات التوازن ضمن العنصر. والعلاقة بين الانتقالات والحمولات تظهر فقط في المعادلات الجبرية الخطية النهائية لكامل الجملة المدروسة بشكل نقطي على عقد الجملة . وفي مثل هذه الحالة لا يؤثر توزع توابع الحمولات ضمن العنصر على شكل توابع الاجهادات أو توابع الانتقالات ضمن العنصر نفسه. هناك أعداد لا تحصى من الأعمال العلمية التي عالجت تطبيق طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات على مختلف انواع المنشآت، استخدم فيها قاطبة توابع انتقالات تقريبية لا تراعي الربط المباشر الواجب اعتباره بين الحمولات والانتقالات وبالتالي الاجهادات المشتقة من الانتقالات . في بعض هذه الأعمال العلمية لم يتم فقط تحقيق المتطلبات التي ينص عليها تطبيق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري وإنما افترضت فيها توابع انتقالات تقريبية تحقق جزء المعادلة التفاضلية المتجانس للمسألة المطروحة. وعلى أساس هذه الأعمال طورت عناصر محددة أعطت نتائج جيدة تجاري في بعض الأحيان الحل التحليلي في صحتها. ولكن فقط في حال كون الحمولات مركزة على العقد. نضرب مثالاً على ذلك العناصر القضبانية الوحيدة البعد المستخدمة في حل الجوائز الشبكية والعناصر القضبانية الاطارية المستخدمة في حل الاطارات المستوية والفراغية. وفي حال وجود حمولات موزعة ضمن العناصر المحددة المقسمة للجملة الانشائية ظهرت اخطاء في الحل كبيرة نسبياً وفي بعض الحالات وصلت إلى 50٪ في حسابات القوى القاصة.

ظهر الربط الأول بين حمولات العنصر المحدد وحالة الاجهادات الناشئة فيه في أعمال PIAN[1] المبنية على أساس مبدأ الطاقة المتممة المعدل، وطور على هذا الأساس عناصر محددة هجينة من نموذج الاجهادات . وانتشر استخدام هذه العناصر على المنشآت التي يصعب فيها تحقيق استمرارية الانتقالات نظراً لشروطها الطبولوجية المعقدة كالمنشآت المثنية المستوية التي تحتوي على حروف منكسرة . إن استخدام مبدأ الطاقة المتممة المعدل يتطلب اختيار توابع اجهادات تقريبية ضمن العنصر محققة لشروط التوازن . وبالتالي كان على المذكور أن يختار توابع اجهادات تقريبية مرتبطة بالحمولات الخارجية الموزعة على العنصر. ولكن رغم هذا لم يحصل في حله ربط مباشر بين الحمولات الموزعة ضمن العنصر وحالة الانتقالات الحاصلة ، وإنما ظهرت هذه العلاقة بشكل غير مباشر ونقطي – بعد حذف المعاملات β– في جملة المعادلات الجبرية الخطية النهائية لانتقالات العقد.

الربط المباشر بين حمولات العنصر وتوابع الانتقالات فيه ظهر في أعمال JIROUSEK[2]، الذي طور زمرة عناصر محددة جديدة من نموذج Trefftz على أساس أحد مبادئ حساب المتغيرات واستخدم لهذا الغرض توابع انتقالات تقريبية تحقق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المعتبرة.

في كل الاستخدامات السابقة لطريقة العناصر المحددة يتم اختيار توابع الانتقالات التقريبية بناء على عدد درجات الحرية لعقد العنصر المحدد المعتبر وشروط استمرارية توابع الانتقالات بغض النظر عن حمولات العنصر المحدد . وحتى في النموذج الأخير المقترح من Jirousek اختيرت حدود في توابع الانتقالات تعتبر حمولات العنصر ، لكن بشكل عشوائي دون ادخالها في عملية اشتقاق التوابع التقريبية. كما لم يتم اقتراح أية طريقة نظامية لإيجاد الربط المباشر بين حمولات العنصر وانتقالاته.

توابع الانتقالات التقريبية التي تحقق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة يمكن استخدامها في طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات وطريقة العناصر المحددة نموذج الاجهادات ، إذ أن توابع الاجهادات المشتقة من توابع الانتقالات هذه تحقق بشكل آلي معادلات التوازن ضمن العنصر المحدد.

في نطاق هذا البحث سوف يتم اقتراح طريقة منظمة للربط المباشر بين حمولات العنصر المحدد وانتقالاته من أجل الإيجاد المنظم لتوابع انتقالات تقريبية تحقق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المطروحة. وسوف تستخدم مثل هذه التوابع لتطبيق طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات مع تعديل في بعض خطوات هذه الطريقة. إذ لن يتم اختيار حدود توابع الانتقالات في العنصر بغض النظر عن حمولاته كما هو شائع سابقاً وإنما سيتم إدخالها في أسس اشتقاق التوابع التقريبية.

2– عموميات معدلة لاختيار التوابع التقريبية:

في البدء نختار توابع الانتقالات التقريبية بالشكل المألوف:

$$\underline{V} = \underline{M}_D . \underline{\beta}_D \quad (1)$$

حيث:

$\underline{V}$ شعاع توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر المحدد.

$\underline{M}_D$ مصفوفة التوابع التقريبية.

$\underline{\beta}_D$ شعاع معاملات أو ثوابت اختيارية يجب تعيينها.

جرت العادة بان يؤخذ عدد الثوابت الاختيارية مساوياً لعدد درجات الحرية لعقد العنصر المعتبرة مضروباً بعدد هذه العقد.

خلافاً للمعتاد ينصح بأخذ عدد من الثوابت الاختيارية أكبر من العدد المعتاد السابق بحيث نستطيع تمثيل حمولات العنصر بشرط أن نستطيع تعيين الثوابت الزائدة عن عدد درجات الحرية لعقد العنصر مضروباً بعدد العقد من تطبيق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة التي تحكم المسألة المطروحة . بعد تطبيق المعادلة التفاضلية وتعيين الثوابت الزائدة تنقسم توابع الانتقالات إلى جزء متجانس $\underline{M}$ وجزء آخر غير متجانس $\bar{\underline{M}}$ ويتقلص عدد الثوابت الاختيارية إلى العدد المعتاد وتصبح هذه التوابع متعلقة بحمولات العنصر.

$$\underline{V} = \underline{M}.\underline{\beta} + \bar{\underline{M}}.\underline{q} \quad (2)$$

حيث:

$\underline{q}$ شعاع حمولات العنصر المحدد.

نعوض الآن إحداثيات عقد العنصر في العلاقات (2) فنحصل على انتقالات العقد :

$$\underline{V}(e) = \underline{A}.\underline{\beta} + \bar{\underline{A}}.\underline{q} \quad (3)$$

حيث:

$\underline{A}$ و $\bar{\underline{A}}$ مصفوفتان تحويان على قيم معلومة فقط وتنتجان عن $\underline{M}$ و $\bar{\underline{M}}$ بعد التعويض.

يمكن الآن تعيين الثوابت الاختيارية بدلالة انتقالات العقد وحمولات العنصر بنقل الحد الثاني من الطرف اليميني للعلاقة (3) إلى الطرف اليساري وإيجاد مقلوب العلاقة الناتجة.

$$\underline{\beta} = \underline{A}^{-1}(\underline{V}(e) - \bar{\underline{A}}.\underline{q}) \quad (4)$$

بتعويض الثوابت الاختيارية من العلاقة السابقة في العلاقة (2) نحصل على توابع انتقالات تقريبية ضمن العنصر مرتبطة بحمولات العنصر بالاضافة إلى ارتباطها بانتقالات العقد.

(5)

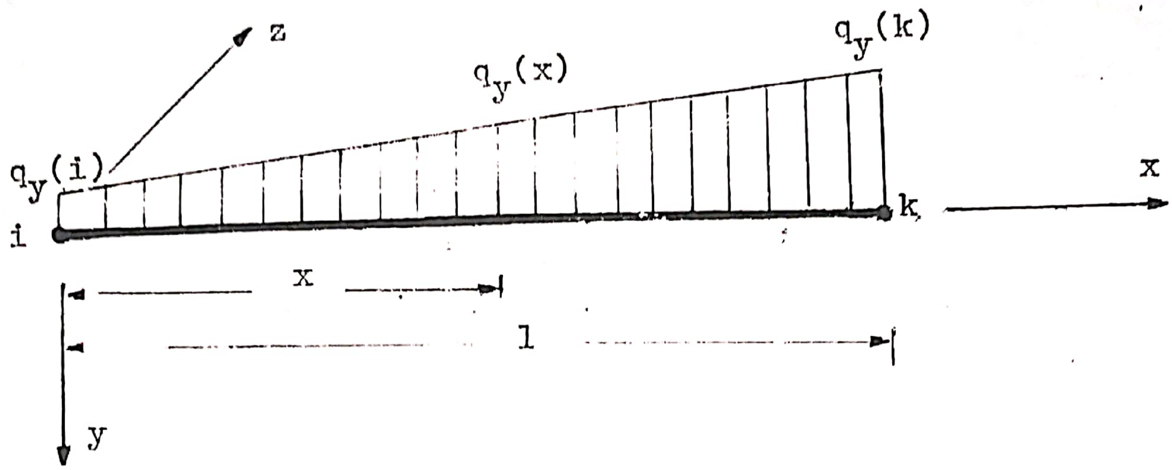
$$+\bar{\underline{M}}.\underline{q} = \underline{N}.\underline{V}(e) + \bar{\underline{N}}.\underline{q}$$

حيث:

$$\bar{\underline{N}} = -\underline{M}.\underline{A}^{-1}.\bar{\underline{A}} + \bar{\underline{M}} \quad (6)$$

$$\underline{N} = \underline{M}.\underline{A}^{-1} \ ,$$

وبذلك نكون قد حصلنا على علاقة تربط بين توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر من جهة وبين انتقالات عقد العنصر بالاضافة إلى الحمولات المطبقة على العنصر من جهة أخرى. في الفقرات اللاحقة سيتم إعطاء أمثلة لتوضيح كيفية الحصول على مثل هذه التوابع وذلك لعناصر محددة قضبانية اطارية، وعنصر محدد مساحي مستخدم في حل البلاطات.



شكل (1): عنصر قضباني محدد بحمولة على شكل شبه منحرف

3– عنصر محدد قضباني للمنشآت الاطارية مع اعتبار حالة تحميله:

باعتبار عنصر محدد قضباني محمل بحمولة على شكل شبه منحرف قيمتها الطرفية اليسارية $q_y(i)$ واليمينية $q_y(k)$ ومنسوب إلى جملة محاور إحداثية يمينية (الشكل 1)، نجد أن الحمولة على بعد X من الطرف اليساري مساوية لـ:

$$q_y(x) = q_y(i) + \frac{q_y(k) - q_y(i)}{l}.x$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} q_y(i) \\ q_y(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

والمعادلة التفاضلية التي تحكم هذا العنصر هي:

$$EI_Z \frac{d^4 V_y}{dx^4} = q_y(x) \quad (8)$$

نختار الآن التابع التقريبي للانتقالات $V_y(x)$ على غرار النسخة الكاملة لمقال المؤلف 3) المرسل إلى مجلة مهندس البناء الألمانية (Bauingenieur):

$$V_y(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} \quad (9)$$

بتطبيق المعادلة التفاضلية (8) على هذا التابع، نجد أن:

$$EI_Z \begin{bmatrix} 24 & 120x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_y(i) \\ q_y(k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

بمطابقة الحدود الثابتة مع بعضها البعض والحدود التي تحوي على المتحول المستقل x، ينتج :

$$\begin{bmatrix} \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_Z} \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & 0 \\ -\frac{1}{120l} & \frac{1}{120l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_y(i) \\ q_y(k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

بالعودة إلى التابع التقريبي للانتقالات (9)

بعد حساب الثوابت الاختيارية β_6 وβ_5 يتجزأ هذا التابع إلى جزء متجانس وآخر غير متجانس:

$$V_y(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \quad (12)$$

$$\frac{1}{EI_z} \begin{bmatrix} \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120l} & \frac{x^5}{120l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_y(i) \\ q_y(k) \end{bmatrix}$$

الآن يكفي عدد درجات الحرية المفترضة على عقد العنصر المحدد لتعيين الثوابت الاختيارية المتبقية، ودرجات الحرية هذه هي انتقالات العقد (I) و(k) باتجاه y أي $V_y(i)$ و$V_y(k)$ ودورانات هذه العقد حول المحور Z أي $\varphi_Z(i)$ و$\varphi_Z(k)$، بتعويض إحداثيات العقدتين (I) و(k) في علاقة الانتقالات التقريبية (12) ومشتقها الأول الممثل للدوران التقريبي وعكس العلاقة الناتجة نحصل على الثوابت الاختيارية المتبقية ومن ثم تعويض قيم الثوابت الاختيارية في العلاقة (12) ، نحصل على التابع التقريبي للانتقال $V_y(x)$ بدلالة انتقالات العقدتين (I) و(k) للعنصر المحدد وحمولاته، بغية الاختصار سوف تعطى نتيجة الخطوات الأخيرة المذكورة ، إذ لا مجال هنا لكتابة تفاصيل هذه الإجراءات.

$$V_y(x) = \begin{bmatrix} h1(\frac{x}{l}) & h2(\frac{x}{l}) & h3(\frac{x}{l}) & h4(\frac{x}{l}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_y(i) \\ \varphi_y(i) \\ V_y(k) \\ \varphi_Z(k) \end{bmatrix} + \quad (13)$$

$$+\frac{1}{EI_Z} \begin{bmatrix} \frac{l^2x^2}{40} - \frac{7lx^3}{120} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120l} & \frac{l^2x^2}{60} - \frac{lx^3}{40} + \frac{x^5}{120l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_y(i) \\ q_y(k) \end{bmatrix}$$

حيث:

$$h1(\frac{x}{l}) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \quad ; \quad h3(\frac{x}{l}) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \quad (14)$$

$$h2(\frac{x}{l}) = l(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}) \quad ; \quad h4(\frac{x}{l}) = l(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3})$$

من العلاقة (13) يمكن استنتاج التابع التقريبي للانتقال في حالة الحمولة المثلثية بإعطاء $q_y(i)$ القيمة الصفرية أو $q_y(k)$ حسب وضعية تحميل العنصر المحدد، ويمكن استنتاجها أيضاً لحالة الحمولة الموزعة بانتظام أي عندما يكون: $q_y(i)=q_y(k)=q$ ففي الحالة الأخيرة يكون الجزء غير المتجانس من التابع التقريبي مكافئاً لـ:

$$\overline{N} = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{l^2x^2}{24} - \frac{lx^3}{12} + \frac{x^4}{24}\right) \quad (15)$$

4- اختبار عددي لنتائج العنصر المحدد في الفقرة 3:

لتوضيح الفارق النوعي في صحة نتائج العنصر المحدد المطور هنا بالنسبة إلى العنصر المحدد العادي بتابع تقريبي للانتقالات غير متعلق بالحمولات، نأخذ مثالاً بسيطاً يمكن إجراء الحسابات عليه دون الاستعانة بالحاسب الآلي، وهو عبارة عن جائز صلابته ثابتة وموثوق من الطرفين، معرض لحمولة خارجية موزعة بانتظام (شكل 2).

يقسم هذا الجائز إلى أربعة عناصر محددة متساوية الطول (شكل 3)، ويجري حساب مصفوفات القساوة للعناصر هذه كما هو مألوف بعد تقييم تعبير الطاقة الكامنة.

مصفوفات القساوة الناتجة عن هذا التقييم مطابقة لتلك الناتجة عن استخدام العنصر المحدد المعروف كما أن خطوات الحل مشابهة للشكل المعتاد مع اختلاف في التفاصيل ناتج عن زيادة حد متعلق بالحمولة على التابع التقريبي المعتاد. لا مجال هنا لذكر تفاصيل الحساب ويكتفى بإعطاء النتائج التي مثلت في الأشكال 3، 4، 5 والممثلة على التوالي لتوابع الانتقالات والعزوم والقوى القاصة. من الواضح أن الحل المقدم هنا (ممثل على الأشكال السابقة بنقاط) مطابق للحل الدقيق بينما تصل أخطاء الحل العادي إلى 12٪ في حسابات العزوم وحتى 50٪ في حسابات القوى القاصة ويمكن الاطلاع على نتائج الحل العادي في المصدر[4] لمقارنته بالحل المعطى.

5- عنصر محدد للبلاطات مع اعتبار حالة تحميله:

سوف يقتصر الآن لإيضاح كيفية إيجاد توابع انتقالات تقريبية متعلقة بالحمولات لعناصر بلاطات على عنصر محدد محمل بحمولة موزعة بانتظام وذلك لتوفر المثال العددي له علماً أن المؤلف قد أنهى الصياغة النظرية لاعتبار حالات تحميل لا على التعيين. وإن التطبيق العددي لهذه الصياغة النظرية هو قيد الانجاز.

للتمكن من اعتبار حالة تحميل موزعة بانتظام لعنصر بلاطات محدد مستطيل بأربع عقد طرفية وثلاث درجات حرية لكل عقدة، نضيف إلى الجزء المتجانس لتابع الانتقالات التقريبي المؤلف من اثني عشر حداً الوارد في المصدر[5]، (انظر المصدر[6] صفحة 227) حداً ثالث عشر من الدرجة الرابعة فيصبح التابع التقريبي مكافئاً لـ:

$$\begin{aligned} w(x,y) = {} & \beta_1 + \beta_2.x + \beta_3.y + \beta_4.x^2 + \beta_5.xy + \beta_6.y^2 + \beta_7.x^3 + \beta_8.x^2y + \\ & + \beta_9.xy^2 + \beta_{10}.y^3 + \beta_{11}.x^3y + \beta_{12}.xy^3 + \beta_{13}.x^2y^2 \end{aligned} \quad (16)$$

بتطبيق المعادلة التفاضلية للبلاطة مع استخدام طرقة الكتابة بالدالات:

$$w_{,ikki} = q_z/8k \quad ; \quad i,k = x,y \quad (17)$$

حيث:

k: ثابت الصلابة للبلاطة.

q_z: الحمولة الموزعة بانتظام.

نستطيع تحديد الثابت الاختياري الزائد عن عدد العقد مضروباً بعدد درجات الحرية لكل عقدة ومقداره:

$$\beta_{13} = q_z/8k \quad (18)$$

باتباع خطوات مشابهة لتلك التي وردت في الفقرة 3 نحصل بعد الانتقال إلى الاحداثيات الطبيعية واتباع طريقة الكتابة باستخدام الدالات (المصدر 7) على تابع الانتقالات التقريبي:

$$W = N^{\rho}.V_{\rho} + \overline{N}\overline{q}(z) \quad ; \quad V_{\rho} = w_1(1) \quad \varphi_1(1) \quad \varphi_2(1) \quad \ldots \quad \varphi_2(4) \tag{19}$$

حيث: e دالة تأخذ أرقام عقد العنصر، V_ρ تمثل شعاع انتقالات ودورانات عقد العنصر. يحتوي هذا التابع التقريبي على جزء متجانس $\underline{N}$ مطابق لمماثله في المصدر[6] ولا داعي لذكره هنا إذ من الممكن الحصول عليه من المصدر السابق وآخر غير متجانس وهو:

$$\overline{N} = (1-(\theta^1)^2-(\theta^2)^2 + \\ +(\theta^1)^2.(\theta^2)^2/k \tag{20}$$

حيث: θ^1, θ^2 الاحداثيات الطبيعية للعنصر المحدد. و k تعني الآن ثابت صلابة البلاطة في الاحداثيات الطبيعية.

بتقييم تعبير الطاقة الكامنة لمبدأ الطاقة الكامنة الأصغري مع اعتبار التابع التقريبي للانتقالات (18) نحصل على :

(21)

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\int_A V_\rho N^\rho_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} N^\eta_{,\gamma\delta} dA - \int_A \overline{q}^2(z)\overline{N}dA - \int_A V_\rho N^\rho \overline{q}(z)dA + \int_A V_\rho N^\rho_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{N}_{,\gamma\delta}\overline{q}(z)dA + \tfrac{1}{2}\int_A \overline{q}^2(z)\overline{N}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{N}_{,\gamma\delta}dA$$

$$\Pi = \frac{1}{2} V_\rho K^{\rho\eta} V_\eta - V_\rho \bar{f}_1^{\,\rho} + V_\rho \bar{f}_2^{\,\rho} + C \tag{22}$$

حيث:

$$K^{\rho\eta} = \int_A N^\rho_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} N^\eta_{,\gamma\delta} dA \tag{23}$$

$$\bar{f}_1^{\,\rho} = \int_A N^\rho \overline{q}(z)dA; \\ \bar{f}_2^{\,\rho} = \int_A N^\rho_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{N}_{,\gamma\delta}\overline{q}(z)dA \tag{24}$$

$$C = \frac{1}{2}\int_A \overline{q}^2(z)\overline{N}_{,\alpha\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{N}_{,\gamma\delta}dA \\ -\int_A \overline{q}^2(z)\overline{N} \quad dA \tag{25}$$

بالتحويل إلى الاحداثيات الديكارتية وبالجمع على عناصر المنشأ كلها وأخذ المتغير الأول لانتقالات العقد نحصل على جملة المعادلات الجبرية الخطية.

$$\underline{K}.\underline{V} = \underline{F} \tag{26}$$

6- اختبار عددي لنتائج العنصر المحدد في الفقرة 5:

بغية الاختبار العددي لنتائج التعديل النظري الوارد في الفقرة تؤخذ بلاطة مربعة مستندة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها ومحملة بحمولة موزعة بانتظام على كامل مساحتها وثوابتها الهندسية معطاة في الشكل 6. الحل الدقيق لهذه البلاطة معروف وممثل إلى جانب الحل الحالي وحلول عناصر محددة اخرى. مأخوذة من المصدرين[8] و[9] وهي العنصر المحدد المعروف بـ(ACM) والعنصر المحدد المعروف بـ(DKQ) على الأشكال من 7 إلى 11. من الواضح أن الحل الحالي المسمى بـ(DE) يمثل تحسيناً نوعياً لنتائج الطاقة الكامنة (الشكل 7) وانتقالات نقطة منتصف البلاطة (شكل 8) وعزوم المقطع للبلاطة (شكل 9 و10) والقوى القاصة فيها (شكل 11). كما يلاحظ أن تقارب الحل الحالي إلى الحل الدقيق أسرع من الحلول الأخرى. وبالتالي يمكن

الحصول على نتائج مقبولة هندسياً باستخدام الحل الحالي دون الحاجة إلى تقسيم شبكي دقيق للمنشأ المراد حلّه.

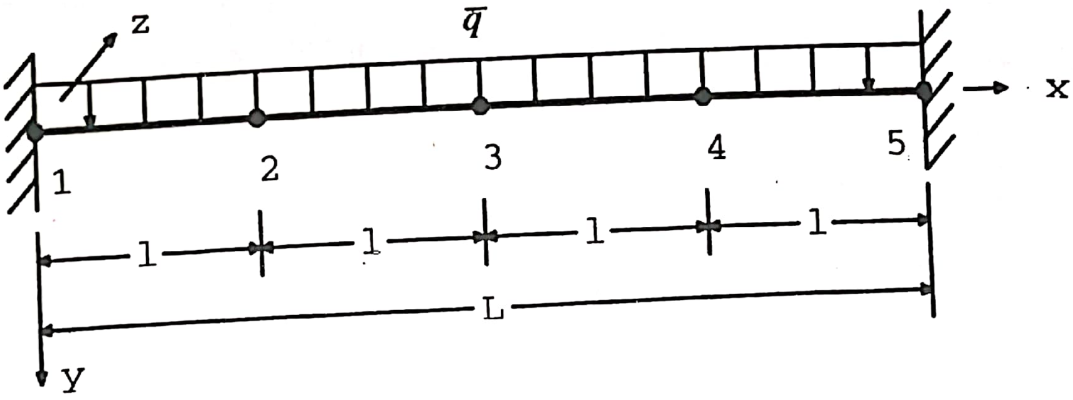
7– ملاحظات ختامية:

إن إدخال التعديل النظري المقترح في الفقرات السابقة على طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات يمثل أماناً نظرياً لنتائج هذه الطريقة ، كما أن إجراء التعديلات الناتجة عن هذا الاقتراح على برامج العناصر المحددة والمنتشرة في كل مكان ليس عملية في غاية الصعوبة ويمكن ضبط هذه التعديلات بحيث يتم تعديل الطرف الثاني للمعادلات الجبرية الخطية النهائية للمنشآت المعالجة. كما يمكن معالجة حالات التحميل العامة بتقريب توابع هذه الحالات وفق خطوط منكسرة متعاقبة للمسائل الوحيدة البعد. وبمساحات مستوية متعاقبة للمسائل الثنائية البعد.

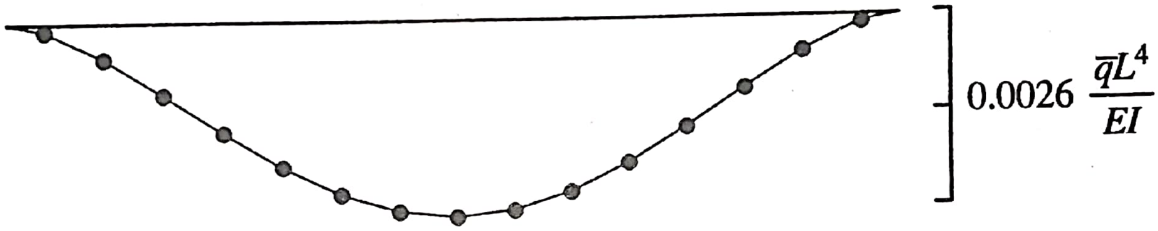
من الواضح أن الحل المقترح يمثل تحسيناً نوعياً لنتائج طريقة العناصر المحددة نموذج الانتقالات، إذ أن التوابع التقريبية للانتقالات المشتقة بهذه الطريقة تحقق معادلات التورازن الداخلية غير المتجانسة للمسألة المعالجة إضافة إلى الشروط المنصوص عنها في طريقة العناصر المحددة العادية نموذج الانتقالات.

وأخطاء الحل في هذه الطريقة تنحصر في الأخطاء الناتجة عن التقسيم إلى عناصر محددة (والتي تنتج عن خرق شروط استمرارية الانتقالات) وخرق الشروط الطرفية الميكانيكية لنظرية المرونة ، بينما كانت الأخطاء في الطريقة العادية تشمل خطأً هاماً ينتج عن خرق شروط التوازن الداخلية .

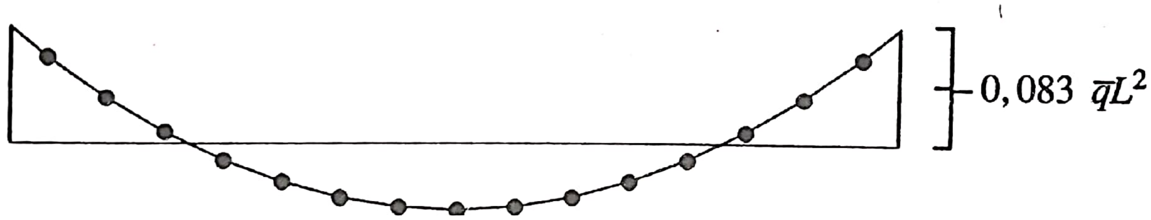
للحصول على حل نظري أمين لمسائل نظرية المرونة في المنشآت الهامة يمكن اللجوء إلى إحدى طرق التخمين اللاحق لأخطاء نظرية العناصر المحددة التي لاقت انتشاراً واسعاً في الحقبة الأخيرة من هذا القرن. من هذه الطرق ما يكتفي بتخمين هذه الأخطاء كالمصدرين[10) و11)] ومنها ما يحاول معالجة هذه الأخطاء وتحويلها إلى حمولات إضافية على المنشآت تؤدي إلى انتقالات وقوى مقطع تصحيحية تضاف إلى انتقالات وقوى المقطع الأساسية المصدر[12)].



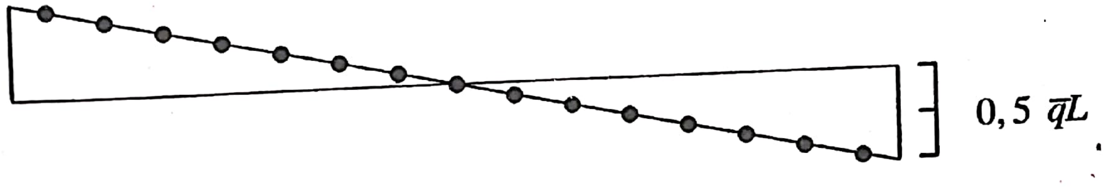
شكل 2: جائز بسيط موثوق من الطرفين تحت تأثير حمولة موزعة بانتظام ثابت الصلابة، التقسيم إلى أربع عناصر محددة.



شكل 3: تابع الانتقالات الحاصلة.



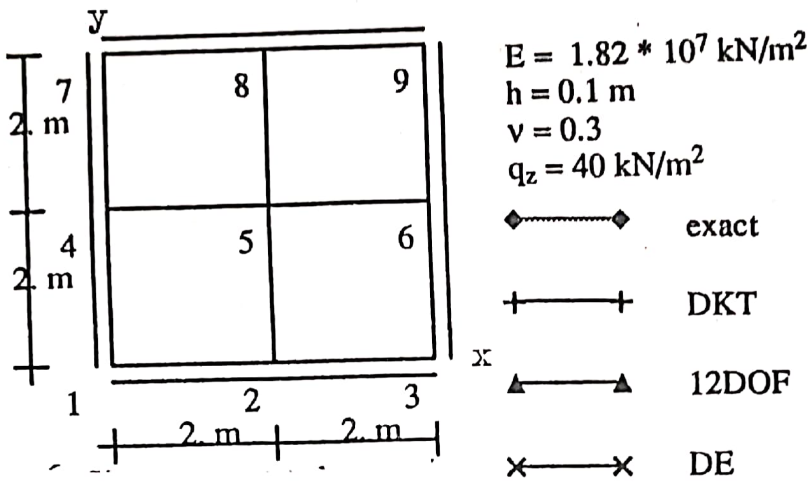
شكل 4: تابع العزوم الحاصلة.



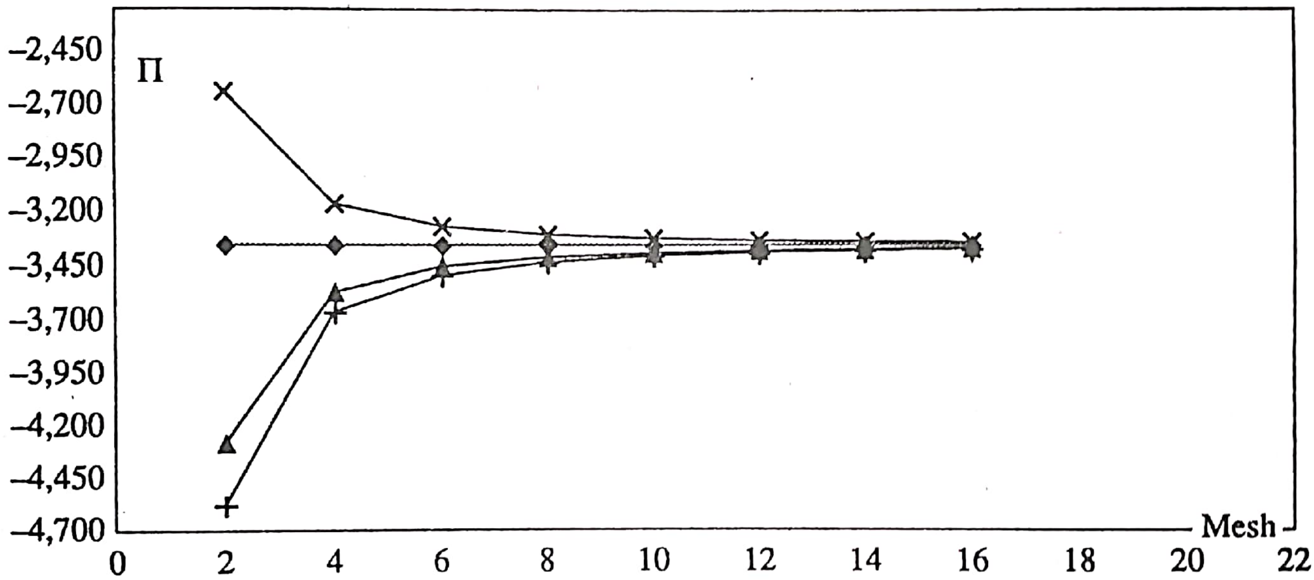
شكل 5: تابع القوى القاصة الحاصلة.

الحل الدقيق: الخط المستمر.

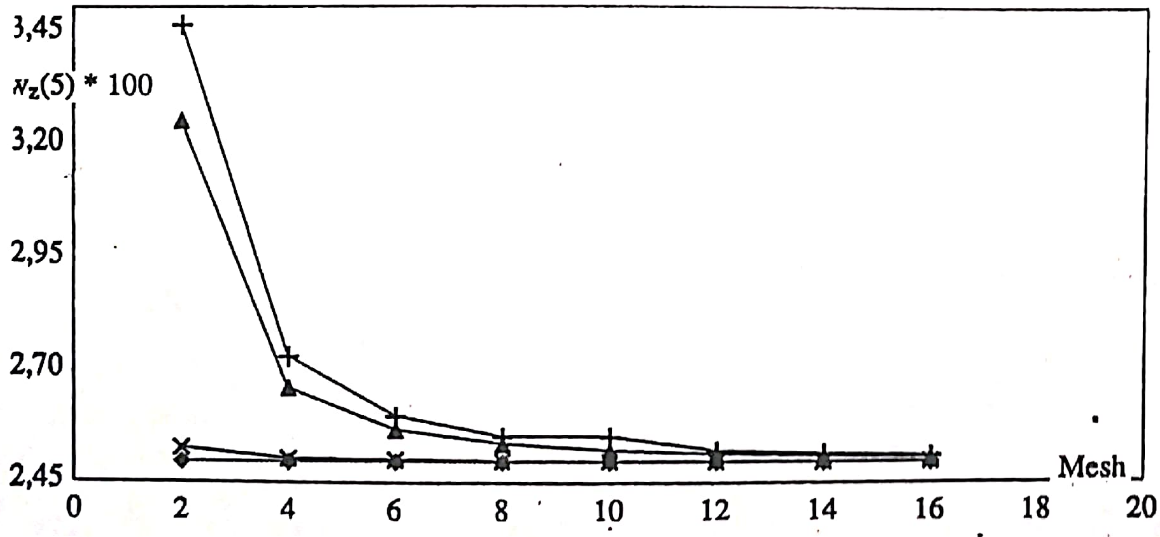
الحل الحالي: الخط المنقط.



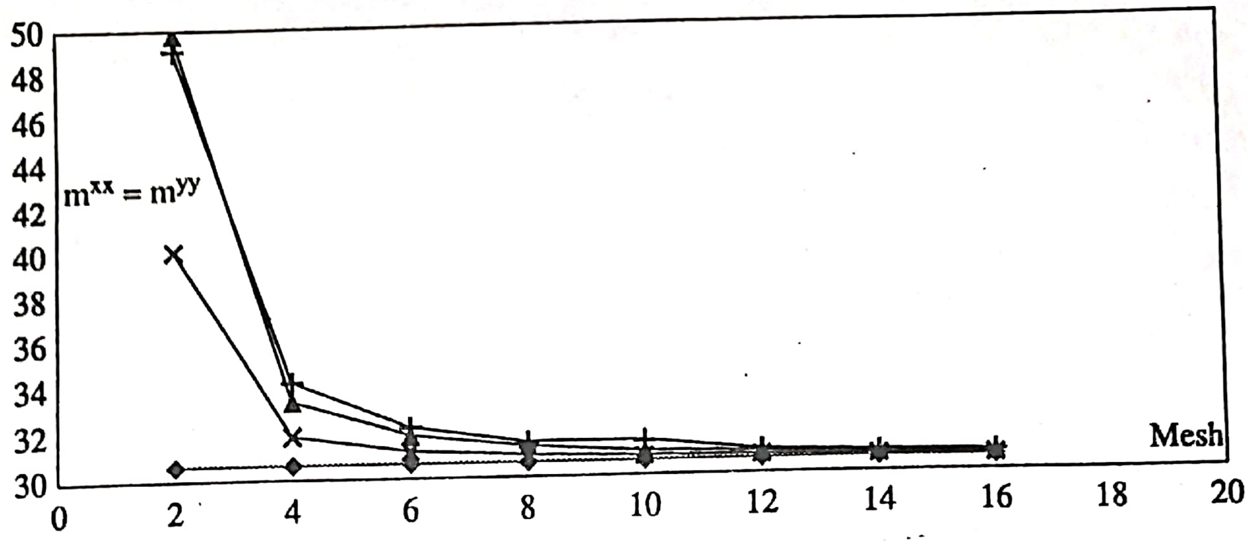
شكل 6: بلاطة مستندة استناداً بسيطاً من جميع أطرافها ومحملة بحمولة موزعة بانتظام.



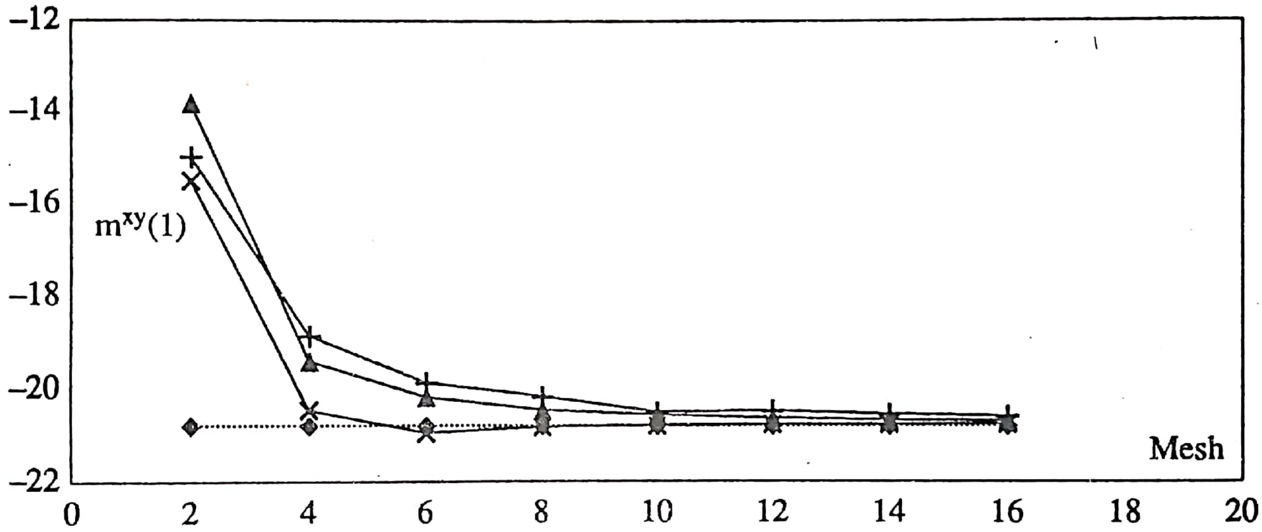
شكل 7: الطاقة الكامنة.



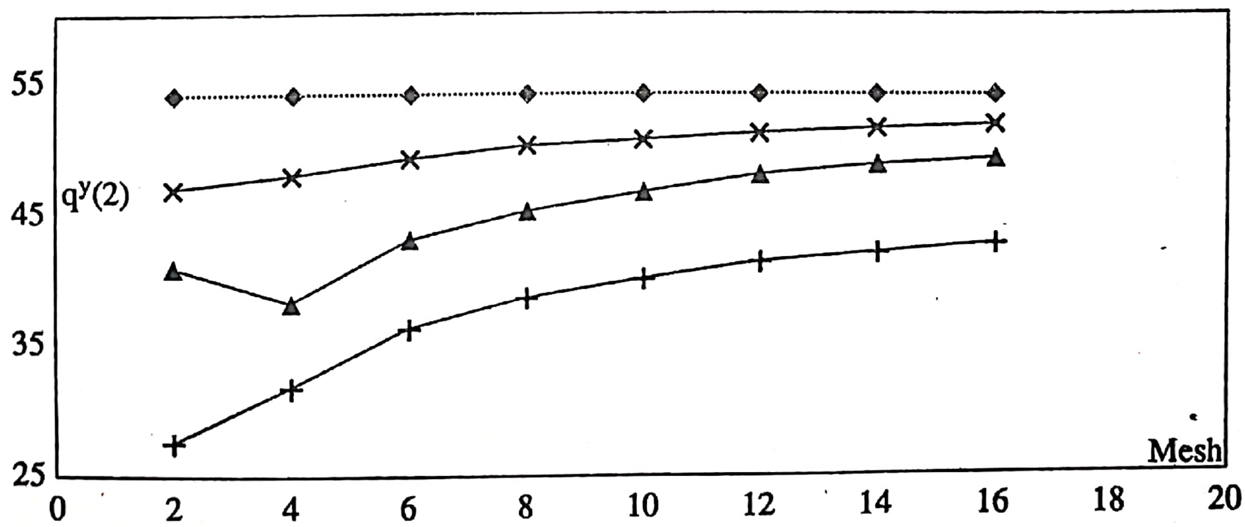
شكل 8: انتقالات نقطة منتصف البلاطة.



شكل 9: عزوم الانعطاف.



شكل 10: عزم الفتل.



شكل 11: القوى القاصة.

❑ ABSTRACT ❑

By finite element methods, the displacement functions within the element are usually not connected directly with the load functions. The relationship between displacements and loading appears only in a discreet way in the final algebraic system of equations for the nodal displacements. The displacements and the loadings within the element would be systematically connected together in such a way, that the governing differential equations of the concerned problems are exactly fulfilled. New aspects of the application of the finite element displacement approach are introduced. The numerical performance of the introduced aspects is examined by the use of a new developed beam element and a new developed plate bending element.

المصادر العلمية

1. T. H. H Pian, "Finite element methods by variational principles with relaxed continuity requirement in Engineering vol. 1-3, Southampton England, Southampton Uni. Press, 1973.
2. J. Jirousek and L. Guex, "The hybrid Trefftz finite element model and its application to plate bending", Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 13, 651-93, 1986.
3. S. Abo Diab, "Entwicklung und Einsatz hybrid finiter Stabelement für Aufgaben der linearen Kinetik und Statik von räumlichen Stabtragwerke - Kompakte gerade Stäbe", Bauingenieur 66, 437-440, 1991.
4. V. Kolar, J. Kratochvil, F. Leitner, A. Zinesek, "Berechnung von Flächen-und Raumtragwerken nach der Methode der finiten Elemente", Springer-Verlag, Wien, New York, 1975.
5. O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, "The finite element method for analysis of elastic and orthotropic slabs", Proc. Inst. Civ. Eng., 28, 471-88, 1964.
6. O. C. Zienkiewicz, "Methode der finiten Elemente", VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1987.
7. E. Kliingbeil, "Tensorrechnung für Ingenieure", Bd. 197, Wissenschftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1989.
8. O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, "The finite element method", Vol. 2, Solid and Fluidemchanics Dynamics and Nonlinearity, McGraw-Hill Book Company, London, 1991.
9. J. L. Batoz, M. Ben Tahhar, "Evalution of a new quadrilateral thin plate bending element, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 18 1655-77, 1982.
10. I. Babuska, C. W, rheinboldt, "A-posteriori error estimates for the finite elemnet method", Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 12, 1597-1615, 1978.
11. O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu, "A simple error estimate and adaptive procedure for practical engineering analysis", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 24, 337-57, 1987.
12. U. Meißner, H. Wibbler, "A least square principle for the aposteriori computation of the finite element approximation errors", Comp. Meth. Appl. Eng. 85, 89-108, 1991.