

## Nonlinear Analysis of Multilayered Composite Plates Using Modified Finite Elements

Dr. Sulaiman Abo Diab\*

Dr. Bassam Hwaija\*\*

Ibraheem Hssn\*\*\*

(Received 31 / 8 / 2021. Accepted 18 / 4 / 2022)

### □ ABSTRACT □

In this study, multilayered composite plates will be analyzed (Plates which consists of many layers with one or more materials ) using multilayered modified finite element displacement approach in the nonlinear case (Large displacements , small rotations). Using incremental iterative approach, stiffness matrix, external equivalent loading vector and new terms resulting from the application of the modified finite element approach will be concluded.

This study uses a Matlab code for the analysis of composite plates, some examples will be computed and plotted. The results of the displacements, stresses, strains and internal forces will be computed and plotted for a number of homogeneous isotropic or orthotropic multilayered composite plates. Finally results will be compared in order to check the validity of our method.

**Keywords :** Composite plates , Multilayered plates , Nonlinear analysis , FEM.

---

\* Associate Professor, Department of Structural Engineering, Faculty of Civil engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria, Email : sabodiab@tishreen.edu.sy.

\*\* Professor, Department of Structural Engineering, Faculty of Civil engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria, Email : bassamhasanhwaija@tishreen.edu.sy

\*\*\* Postgraduate Student (PhD), Department of Structural Engineering, Faculty of civil Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria, Email : ibhassan@tishreen.edu.sy

## التحليل اللاخطي للبلاطات المركبة متعددة الطبقات باستخدام عناصر منتهية معدلة

د. سليمان أبو دياب \*

د. بسام حويجة \*\*

ابراهيم حسن \*\*\*

(تاريخ الإيداع 31 / 8 / 2021. قُبِلَ للنشر في 18 / 4 / 2022)

### □ ملخص □

يندرج البحث الحالي ضمن إطار البحوث النظرية في العلوم الأساسية . سيتم في هذا البحث نمذجة البلاطات المركبة المتعددة الطبقات (المؤلفة من عدة مواد أو مادة واحدة متوضعة على شكل طبقات) وتحليلها عبر اعتماد عناصر منتهية معدلة وذلك ضمن المجال اللاخطي (انتقالات كبيرة و دروانات صغيرة). عبر تطبيق المنهج التزايدى التكرارى اعتماداً على مبدأ الانتقالات الوهمية سنقوم باستنتاج مصفوفات الصلابة، شعاع القوى الخارجية والحدود الإضافية الناتجة عن الطريقة المعتمدة. كما سنقوم باستخدام كود برمجي لتحليل البلاطات المركبة المتعددة الطبقات في البيئة البرمجية لبرنامج الماتلاب (MATLAB)، حيث سيتم حساب ورسم مخططات الانتقالات، الإجهادات، التشوهات وقوى المقطع لعدد من الأمثلة لبلاطات متعددة الطبقات مؤلفة من مواد متجانسة متخاصة (Isotropic) أو متخاصة عمودياً (Orthotropic) وأخيراً مقارنة النتائج مع بعضها و التحقق من فعالية الطريقة المتبعة في الحل.

الكلمات المفتاحية : بلاطات مركبة، بلاطات متعددة الطبقات، تحليل لا خطي، طريقة العناصر المنتهية.

\* أستاذ مساعد، قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية. [sabodiab@tishreen.edu.sy](mailto:sabodiab@tishreen.edu.sy)  
\*\* أستاذ، قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية [bassamhasanhwaija@tishreen.edu.sy](mailto:bassamhasanhwaija@tishreen.edu.sy)  
\*\*\* طالب دراسات عليا (دكتوراه) ، قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.  
[ibhassan@tishreen.edu.sy](mailto:ibhassan@tishreen.edu.sy)

**مقدمة:**

البلطة المركبة المتعددة الطبقات (Laminated Composite Plate) هي بلطة مصنوعة من مواد مركبة متوضعة على شكل طبقات متتالية و مترابطة مع بعضها بحيث تعطي خواص هندسية أفضل من البلطات العادية المؤلفة من مادة واحدة. و يبين الشكل (1) عينة من بلطة مؤلفة من عدة طبقات من ألياف الكربون بحيث اتجاه الألياف مختلف بين الطبقات مما يؤمن خواص هندسية أفضل للبلطة في كافة الاتجاهات و هذه الطبقات مترابطة مع بعضها باستخدام لاصق إيبوكسي.



الشكل (1) . عينة مأخوذة من بلطة متعددة الطبقات مكونة من ألياف الكربون

تم دراسة سلوك البلطات المركبة المتعددة الطبقات في حالة الانتقالات الكبيرة من قبل عدة باحثين و بطرائق مختلفة و نظراً للصعوبة الرياضية في حل المعادلات التفاضلية الحاكمة للسلوك استخدمت الطرائق العددية كحل بديل يؤمن نتائج تقريبية مقبولة. و يشمل تحليل البلطات المركبة المتعددة الطبقات باستخدام طريقة العناصر المنتهية اعتماد إما نموذج الانتقالات أو النموذج الهجين أو مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري الذي يعتبر الأقل انتشاراً. يمكن العودة إلى مراجع ريدي [1,2] حيث ذكر بالتفصيل الباحثين الأوائل الذين درسوا البلطات المتعددة الطبقات ضمن المجال اللاخطي و قدم مراجعة تاريخية لهذا المجال، كما يمكن الإطلاع على المراجع [20-3] التي تمثل محطات هامة ساهمت بشكل كبير في تطوير التحليل اللاخطي للبلطات المركبة المتعددة الطبقات. وتم اختيار الدراسات التالية التي تناولت دراسة البلطات متعددة الطبقات ضمن المجال اللاخطي وفق طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات و ذلك بهدف مقارنة النتائج :

الدراسة الأولى : قام الباحثين زهانغ و كيم [21] بدراسة البلطات المركبة متعددة الطبقات الرقيقة والمتوسطة السماكة في المجال اللاخطي الهندسي باستخدام طريقة العناصر المنتهية نموذج الانتقالات، عبر اعتماد مبدأ الانتقالات الوهمية واتباع منهج تزايدى تكراري (طريقة نيوتن رافسون)، وأخذاً بعين الاعتبار التشوهات العرضية القصية وفق نظرية تشوهات القص من المرتبة الأولى (FSDT)، تم الحصول على توابع السهم والدورانات على أطراف العنصر المنتهي من خلال توابع تيموشينكو للجوائز المركبة متعددة الطبقات أما توابع الانتقالات ضمن المستوي فتم اعتماد توابع الانتقالات الخطية للعنصر الرباعي النظامي وفق حالتين الأولى 5 درجات حرية في كل عقدة و الثانية 6 درجات حرية في كل عقدة بحيث توافق الحالة الأولى عنصر منتهي (RDKQ-NL20) والحالة الثانية عنصر منتهي آخر (RDKQ-NL24) .

بينت النتائج أن العنصرين (RDKQ-NL20) و (RDKQ-NL24) يعطيان نتائج مقبولة و بسرعة دون الحاجة لعدد خطوات كبير أو تعميم الشبكة عند التحليل في المجال اللاخطي الهندسي (انتقالات كبيرة، دورانات صغيرة). من سليات البحث أن عدد الأمثلة قليل نسبياً، كما أنه لا يغطي كافة الحالات الممكنة من شروط طرفية وحمولات. إضافة إلى أن العنصر المنتهي (RDKQ-NL24) يتطلب إجراء المزيد من الحسابات المعقدة ولا يعتبر بسيطاً. الدراسة الثانية : قام الباحثين ريدي وآرثر [22] بدراسة البلاطات المركبة متعددة الطبقات باستخدام طريقة العناصر المنتهية نموذج هجين في المجال الخطي واللاخطي الهندسي، يملك العنصر المنتهي الذي اقترحوه 8 درجات حرية في كل عقدة (ثلاث انتقالات ودورانين وثلاث عزوم انعطاف)، مادة البلاطة مرنة خطية (لكنها ليست متخاصة Isotropic وإنما تم أخذ تأثير تغير خواص المادة في مختلف الاتجاهات Anisotropic). وهي خاضعة لحمولات ستاتيكية فقط. تم اعتماد طريقة نيوتن رافسون لإجراء التكرارات كما في الدراسة الأولى، وأخذ تأثير تشوهات القص العرضية وفق نظرية تشوهات القص من المرتبة الأولى (FSDT) .

تم التوصل إلى أن زيادة عدد الطبقات يساهم في تخفيف الأثر اللاخطي الذي يسبب انحناء منحنى السهم مع تزايد الحمولة. كما لوحظ أن الأثر اللاخطي في البلاطات السميكة يظهر بشكل أكثر وضوحاً منه في البلاطات الرقيقة و ذلك يعود إلى وجود تشوهات القص العرضية .

الدراسة الثالثة : قام مجموعة من الباحثين [23] بدراسة البلاطات و القشريات المركبة متعددة الطبقات في المجال اللاخطي الهندسي باستخدام عنصر منتهي مستوي (MISQ20) بأربع عقد و 20 درجة حرية حيث لكل عقدة خمس درجات حرية (ثلاث انتقالات و دورانين). اعتمدوا طريقة طول القوس (Arc-Length Method) لإجراء التكرارات، و أخذ تأثير تشوهات القص العرضية وفق نظرية تشوهات القص من المرتبة الأولى (FSDT) . تم حساب مصفوفات الصلابة (الهندسية و مصفوفة العمل المشترك الانعطافي-الغشائي) عبر إجراء التكاملات على حواف العنصر المنتهي المنعم مما أعطى نتائج جيدة حتى عند القيام بتقسيم عشوائي خشن للبلاطة.

بينت النتائج أن العنصر المعتمد في هذه الدراسة (MISQ20) يعطي نتائج أقرب للحل التجريبي و أكثر دقة من النتائج التي يعطيها العنصرين (RDKQ-NL20) و (RDKQ-NL24). حيث حافظ هذا العنصر (MISQ20) على دقة الحلول التي يعطيها حتى في الحالات التي اعتمدت فيها شبكة خشنة أو بلاطات ذات أشكال هندسية غير منتظمة بالإضافة إلى أن العنصر يعتبر بسيطاً و لا يحتاج حسابات معقدة .

### أهمية البحث و أهدافه:

يتطلب الانتشار الواسع و الاستخدام المتزايد للبلاطات المركبة متعددة الطبقات إجراء تحليل أكثر تعقيداً (لاخطي) لفهم سلوك هذه العناصر و استخدامها بالشكل الصحيح و الفعال. تساهم طريقة العناصر المنتهية المتبعة في هذا البحث في توفير الوقت اللازم لحل مسائل البلاطات في الحالة اللاخطية بشكل كبير.

و يمكن تلخيص أهداف البحث بالنقاط التالية :

- البحث عن الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية في المجال الهندسي اللاخطي و استخدامها كتتابع تقريبية في التطبيق
- اختيار التتابع التقريبية للانتقالات و استنباط توابع الشكل و مصفوفات الصلابة و أشعة القوى الخارجية من مبدأ الانتقالات الوهمية.

- برمجة الطريقة بالكامل باستخدام Matlab.
- دراسة عدد من الأمثلة وفق البرنامج المعد.
- البحث عن الحلول التحليلية المتوفرة و مقارنة النتائج للتحقق من فعالية الطريقة المتبعة.

### طرائق البحث ومواده :

بني البحث على الأسس النظرية و البرمجية الواردة في المراجع [24-28] بحيث أصبح بالإمكان إنجاز تحليل لا خطي للبلطات المركبة متعددة الطبقات حيث جمعت مصفوفات الصلابة الخطية و الهندسية و أشعة القوى الخارجية للعنصر المنتهي المعدل بحيث أصبح متعدد الطبقات. كما درس عدد من الأمثلة العملية و قورنت نتائجها مع نتائج مماثلة من الأدبيات العالمية بهدف اختبار فاعلية العنصر المنتهي المعدل متعدد الطبقات المعتمد.

### التحليل اللاخطي للبلطات المركبة متعددة الطبقات :

باعتبار لدينا طبقة ( $k$ ) ذات السماكة ( $h_k$ ) من البلاطة متعددة الطبقات ذات السماكة الكلية ( $h$ ) و باعتماد فرضيات نظرية تشوهات القص من المرتبة الأولى بالإضافة إلى أننا نعتبر الترابط بين طبقات البلاطة ترابط تام و مادة الطبقة الواحدة مرنة خطية سنوضح العلاقات اللازمة لحساب القوى و العزوم ضمن الطبقة الواحدة ثم لكامل البلاطة.

بفرض السطح الوسطي للبلطة واقع ضمن المستوي ( $x, y$ ) و المحور ( $z$ ) يعامد السطح الوسطي و يتجه نحو الأسفل و باعتبار أن مركبات شعاع الانتقال لنقطة ما من السطح الوسطي للبلطة هي ( $u, v, w$ ) و فق المحاور ( $x, y, z$ ) على التوالي. يمكن التعبير عن انتقالات أي نقطة من السطح الوسطي للبلطة بخمس درجات حرية هي ثلاث انتقالات وفق المحاور ( $x, y, z$ ) و دورانين حول المحورين ( $x$ ) و ( $y$ ).

$$\{\delta_i\} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T \quad (1)$$

و يتم التعبير عن حقل الانتقالات ضمن البلاطة كما يلي :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \cdot \theta_x(x, y) \quad ; \quad \theta_x(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \cdot \theta_y(x, y) \quad ; \quad \theta_y(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

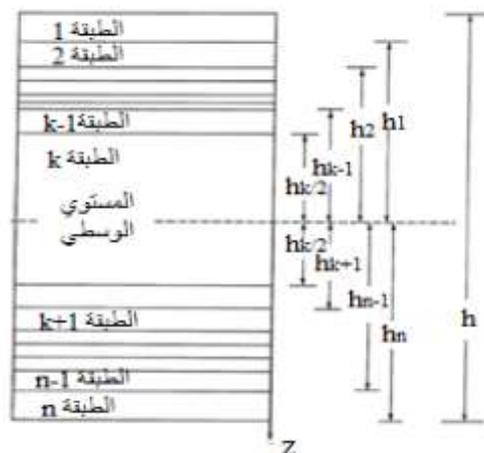
$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (4)$$

( $u_0, v_0, w_0$ ) : الانتقالات عند المستوي الوسطي للبلطة وفق المحاور ( $x, y, z$ ) على التوالي .

( $\theta_x, \theta_y$ ) : دورانات المستوي الوسطي للبلطة وفق المحاور ( $x, y$ ) على التوالي .

### قوى المقطع :

يخضع الجزء التفاضلي لعزوم انعطاف ( $M_x, M_y$ ) و عزم فتل ( $M_{xy}$ ) و قوى قص شاقولية تؤثر على جانبي الجزء المقطع ( $Q_x, Q_y$ ) و كذلك يخضع لقوى ضمن المستوي ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ). يتم الحصول على قوى المقطع هذه ضمن الطبقة ( $k$ ) من خلال تحصيل الإجهادات على السطوح المؤثرة عليها هذه القوى كما يلي :



الشكل (2) . مقطع عرضي في بلاطة مركبة متعددة الطبقات مؤلفة من n طبقة

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \cdot \int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (5)$$

حيث :  $K$  هو عامل تصحيح القص .

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h_k/2}^{h_k/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h_k/2}^{h_k/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (7)$$

للحصول على قوى المقطع لكامل البلاطة تجري عملية تجميع على كافة الطبقات :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \cdot \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (10)$$

علاقات التشوهات - الانتقالات و تكتب بالشكل المصفوفي كما يلي :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} - z \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} - z \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

حيث :  $\varepsilon^{(0)}$  : شعاع يمثل التشوهات العشوائية،  $\varepsilon^{(1)}$  : شعاع يعبر عن التشوهات الانعطافية (الانحناءات).

يلاحظ استناداً لنظرية تشوهات القص من المرتبة الأولى أن التشوهات  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$  تتغير بشكل خطي عبر سماكة البلاطة بينما تشوهات القص العرضانية  $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  ثابتة عبر هذه السماكة.

قانون السلوك :

تكون العلاقات بين الإجهادات و التشوهات لمادة مرنة خطية متجانسة متخاصة عمودياً (Linear elastic homogenous orthotropic material) و باعتبار حالة الإجهادات المستوية للطبقة (k) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (12)$$

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}} ; \quad Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}} \quad (13)$$

$$Q_{12}^{(k)} = Q_{21}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)}E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}} \quad (14)$$

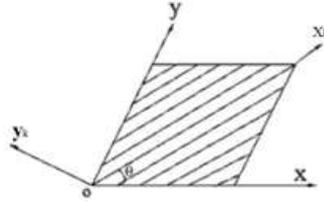
$$Q_{33}^{(k)} = G_{12}^{(k)} ; \quad Q_{44}^{(k)} = G_{13}^{(k)} ; \quad Q_{55}^{(k)} = G_{23}^{(k)} \quad (15)$$

$E_1^{(k)}, E_2^{(k)}$  : عامل يونغ لمادة الطبقة (k) وفق الاتجاهين (x,y) على التوالي.

$G_{12}^{(k)}, G_{13}^{(k)}, G_{23}^{(k)}$  : عامل القص لمادة الطبقة (k) وفق المستويات (xy,xz,yz) على التوالي.

$\nu_{21}^{(k)}$  : عامل بواسون للطبقة (k) .

عندما تكون المحاور الخاصة بالطبقة (k) أي  $(x_k, y_k)$  لا تتطبق على المحاور العامة للبلطة  $(x, y)$  و إنما تصنع معها زاوية  $(\theta_k)$  مقاسة عكس عقارب الساعة تصبح العلاقات السابقة :



الشكل (3) . المحاور الخاصة بالطبقة (k)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (16)$$

$$[\bar{Q}^{(k)}] = [T] \cdot [Q^{(k)}] \cdot [T]^T \quad (17)$$

$[T]$  : هي مصفوفة التحويل من الإحداثيات الخاصة بالطبقة (k) إلى الإحداثيات العامة للبلطة و تعطى كما يلي

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2m.n & 0 & 0 \\ n^2 & m^2 & 2m.n & 0 & 0 \\ m.n & -m.n & m^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & n & m \end{bmatrix} \quad (18)$$

حيث :  $m = \cos(\theta_k)$  ;  $n = \sin(\theta_k)$

و تصبح علاقات قوى المقطع بعد تعويض العلاقة (17) في العلاقات (8) و (9) و (10) كما يلي :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} - z \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \right) \cdot dz \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} - z \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \right) \cdot z \cdot dz \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \cdot \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (21)$$

### النتائج والمناقشة:

#### تطبيق مبدأ الانتقالات الوهمية و استنتاج الحدود الجديدة :

تم اعتماد مبدأ الانتقالات الوهمية لتحليل البلاطات المركبة متعددة الطبقات في حالة الانتقالات الكبيرة (الهندسية اللاخطية و الفيزيائية الخطية) حيث تم الانطلاق من وضعية بدائية معلومة (الحالة الخطية) إلى وضعية مجاورة مجهولة (مبدأ التشويش) ليكون متغير تزايد الطاقة الكلية للوسط المنشوه مساوياً للصفر:

$$\delta\Delta\pi = 0 \quad (22)$$

و هذه الصيغة مكافئة وفق المقولة الأولى لحساب المتغيرات لتحقيق معادلات التوازن ضمن عنصر تفاضلي من الوسط الإنشائي و تحقق معادلات التوازن على أطراف هذا الوسط و ذلك بالشكل التكاملي.

باعتتماد المنهج التزايدى لتحويل المسألة اللاخطية إلى مسألة خطية نعطي انتقالات حالة مستقرة أساسية (متوازنة) معلومة  $u_i^0$  تزايداً بمقدار  $u_i$  فينتقل الجسم إلى وضعية غير مستقرة (مجاورة) انتقالاتها  $\tilde{u}_i$  (مبدأ التشويش) و يكون :

$$\tilde{u}_i = u_i^0 + u_i \quad (23)$$

$u_i$  : تصف ما يسمى تزايد (increment) .

بحسب مبدأ الانتقالات الوهمية لدينا متغير الطاقة الكلية للحالة الأساسية كما يأتي :

$$\delta\pi^0 = \int_V \varepsilon_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 dV - \int_V \delta u_i \tilde{f}_i dV - \int_{S_\sigma} \delta u_i \tilde{T}_i dS = 0 \quad (24)$$

حيث :  $\varepsilon_{ij}^0$  :  $\sigma_{ij}^0$  متوتر الإجهادات و التشوهات في الحالة الأساسية (المتوازنة) على التوالي.

$\tilde{T}_i$  ,  $\tilde{f}_i$  : القوى الخارجية الحجمية و السطحية على التوالي ،  $S_\sigma$  : جزء من سطح الجسم خاضع للإجهادات.

و لأن  $\tilde{u}_i$  هي حالة انتقالات غير معلومة و كذلك حالة الإجهادات الموافقة لها فيجب في البدء أن ننطلق من حالة توازن أساسية معلومة و نعطي تزايداً لحالة الانتقالات بمقدار صغير جداً.

$$\tilde{u}_{i+1} = \tilde{u}_i + \Delta u_{i+1} \quad (25)$$

و هذا ما يؤدي إلى تزايد في التشوهات و الإجهادات كما يأتي :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \Delta\varepsilon_{ij} ; \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij} \quad (26)$$

$\varepsilon_{ij}^0$  ,  $\sigma_{ij}^0$  : تنسوري الإجهاد و التشوه على التوالي للحالة البدائية (الحالة الخطية) .

$\Delta\sigma_{ij}$  ,  $\Delta\varepsilon_{ij}$  : تزايد صغير في تنسوري الإجهاد و التشوه على التوالي ناتج عن تطبيق تزايد صغير في الانتقال .

و باعتبار أن هذا التزايد صغير يمكن معالجة المسألة على غرار الحالة الخطية إذا بدأنا من حالة التوازن الأساسية و نصل إلى ما يسمى المنهج التكراري التزايدي. بحساب المتغير الأول للطاقة الكلية في الحالة المجاورة و اعتبار أن المقادير التي تخضع للتغيير هي  $\Delta u_i$  و ليس نفسها نحصل على :

$$\int_V \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) c^{ijkl} (\varepsilon_{kl}^0 + \Delta \varepsilon_{kl}) dV - \int_V \tilde{f}_i \delta(\Delta u_i) dV - \int_{S_\sigma} \delta(\Delta u_i) \tilde{T}_i dS = 0 \quad (27)$$

$$\int_V \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) c^{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 dV + \int_V \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) c^{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} dV - \int_V \tilde{f}_i \delta(\Delta u_i) dV - \int_{S_\sigma} \tilde{T}_i \delta(\Delta u_i) dS = 0 \quad (28)$$

حيث :  $C_{ijkl}$  : تتسور ثوابت المرنة.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (29)$$

و بالانتقال من الحالة الثلاثية الأبعاد للوسط الإنشائي (التكامل على حجم) إلى الحالة الثنائية الأبعاد لحالة للبلطات (التكامل على مساحة) و تعويض تابع الانتقال في مبدأ الانتقالات الوهمية، و أخذ المتغير الأول، و من ثم استخدام مبدأ التشويش (أخذ حالة توازن مجاورة للحالة الأساسية) نحصل على صيغ مصفوفات الصلابة و أشعة القوى المركزة في العقد و المكافئة للحمولات الموزعة.

$$[K_T] \cdot \delta \bar{w} = R_1 + R_2 ; [K_E + K_S + K_G] = [K_T] \quad (30)$$

$$[K_T] \cdot \delta \bar{w} = R_1 + R_2 \quad (31)$$

$K_E$  : مصفوفة الصلابة الخطية للبلطة المركبة متعددة الطبقات و المعبرة عن السلوك الانعطافي.

$K_S$  : مصفوفة الصلابة الخطية للبلطة المركبة متعددة الطبقات و المعبرة عن السلوك القصي.

$K_G$  : مصفوفة الصلابة الهندسية.

$R_1$  : شعاع القوى الخارجية المؤثر على البلطة،  $R_2$  : الحد الجديد الناتج عن استخدام العنصر المنتهي المعدل.

باعتماد توابع الشكل للعنصر الرباعي النظامي فإنه يمكننا التعبير عن الانتقالات كما يلي :

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot u_i ; v = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot v_i ; w = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot w_i \quad (32)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \theta_{xi} ; \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \theta_{yi} \quad (33)$$

$$N_1(\theta^1, \theta^2) = \frac{1}{4}(1 - \theta^1)(1 - \theta^2) ; N_2(\theta^1, \theta^2) = \frac{1}{4}(1 + \theta^1)(1 - \theta^2) \quad (34)$$

$$N_3(\theta^1, \theta^2) = \frac{1}{4}(1 + \theta^1)(1 + \theta^2) ; N_4(\theta^1, \theta^2) = \frac{1}{4}(1 - \theta^1)(1 + \theta^2) \quad (35)$$

و هي تمثل الجزء المتجانس فقط من توابع الشكل.

باستخدام الطريقة المعدلة يفترض أن تحقق التوابع التقريبية المعادلة التفاضلية بالشكل الدقيق لكن لصعوبة إيجاد حلول لمعادلة فون كارمن (التي تعبر عن السلوك اللاخطي للبلطات) و باعتبار أننا ندرس السلوك اللاخطي كسلسلة من الخطوات الخطية الصغيرة سنكتفي باستخدام توابع تقريبية تحقق المعادلة التفاضلية لبلطة كيرشوف.

يمكننا اعتماد تابع الانتقال للعنصر المنتهي (ACM) و مطابقة طرفي المعادلة التفاضلية الحاكمة لسلوك البلطة في الحالة الخطية بعد اختيار تابع الحمولة ككثير حدود ثم تطبيق خوارزمية طريقة العناصر المنتهية، هذه الخطوات موضحة بالتفصيل في المراجع [24-28] لينتج لدينا الجزء غير المتجانس من توابع الشكل. بعد تحديد توابع الشكل جزأها المتجانس و غير المتجانس أصبح بإمكاننا تحديد مصفوفات الصلابة السابقة و أشعة القوى الخارجية.

مصفوفة الصلابة الخطية  $K_E$  و يمكن تفصيلها إلى جزأين :

• مصفوفة الصلابة الخطية الناتجة عن السلوك الغشائي للبلطة  $K_{Em}$  :

$$K_{Em} = \int_A (B_m)^T \cdot Q_m \cdot B_m \cdot dA \quad (36)$$

$B_m$  : المشتقات الجزئية لتتابع الشكل الجزء المتجانس من المرتبة الأولى بالنسبة إلى  $(x, y)$  على التوالي و تعبر عن السلوك الغشائي للبلاطة.

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$Q_m$  : مصفوفة ثوابت المرونة المعبرة عن السلوك الغشائي لكافة طبقات البلاطة.

$$Q_m = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot (z_{k+1} - z_k) \quad (38)$$

و باعتماد التكامل العددي و الانتقال إلى جملة الإحداثيات الطبيعية يصبح بإمكاننا استنتاج مصفوفة الصلابة الناتجة عن السلوك الغشائي كما يلي :

$$K_{Em} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_m)^T \cdot Q_m \cdot B_m \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (39)$$

• مصفوفة الصلابة الخطية الناتجة عن السلوك الانعطافي للبلاطة  $K_{Eb}$  :

$$K_{Eb} = \int_A (B_b)^T \cdot Q_b \cdot B_b \cdot dA \quad (40)$$

$B_b$  : المشتقات الجزئية لتتابع الشكل الجزء المتجانس من المرتبة الأولى بالنسبة إلى  $(x, y)$  على التوالي و تعبر عن السلوك الانعطافي للبلاطة.

$$B_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$Q_b$  : مصفوفة ثوابت المرونة المعبرة عن السلوك الانعطافي لكافة طبقات البلاطة.

$$Q_b = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (42)$$

$$K_{Eb} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_b)^T \cdot Q_b \cdot B_b \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (43)$$

مصفوفة الصلابة القصية  $K_S$  :

$$K_S = \int_A (B_s)^T \cdot Q_s \cdot B_s \cdot dA \quad (44)$$

$B_s$  : توابع الشكل الجزء المتجانس و مشتقاتها من المرتبة الأولى بالنسبة إلى  $(x, y)$  على التوالي و تعبر عن السلوك القصي للبلاطة.

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$Q_s$  : مصفوفة ثوابت المرونة المعبرة عن السلوك القصي لكافة طبقات البلاطة.

$$Q_s = K \cdot \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot (z_{k+1} - z_k) \quad (46)$$

$$K_S = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_s)^T \cdot Q_s \cdot B_s \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (47)$$

مصفوفة الصلابة الهندسية  $K_G$  :

$$K_G = \int_A (G)^T \cdot S \cdot G \cdot dA \quad (48)$$

$G$  : المشتقات الجزئية لتتابع الشكل الجزء المتجانس من المرتبة الأولى بالنسبة إلى  $(x, y)$  على التوالي.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$S$  : مصفوفة الإجهادات البدائية و يتم حسابها و تجميعها على كافة طبقات البلاطة.

$$S = \begin{bmatrix} h \cdot S_{11} & h \cdot S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h \cdot S_{21} & h \cdot S_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \cdot S_{33} & h \cdot S_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \cdot S_{43} & h \cdot S_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \cdot S_{55} & h \cdot S_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \cdot S_{65} & h \cdot S_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \cdot S_{77} & \frac{h^3}{12} \cdot S_{78} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \cdot S_{87} & \frac{h^3}{12} \cdot S_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \cdot S_{99} & \frac{h^3}{12} \cdot S_{910} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \cdot S_{109} & \frac{h^3}{12} \cdot S_{1010} & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$K_G = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (G)^T \cdot S \cdot G \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (51)$$

شعاع القوى الخارجية  $R_1$  :

$$R_1 = \int_A (N)^T \cdot q \cdot dA \quad (52)$$

حيث  $N$  : مصفوفة تحوي توابع الشكل الجزء المتجانس ،  $q$  شدة الحمولة الخارجية المؤثرة على البلاطة.

$$R_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (N)^T \cdot q \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (53)$$

الحد الجديد الناتج عن العنصر المنتهي المعدل  $R_2$  :

ينتج من جداء توابع الشكل الجزء المتجانس و توابع الشكل الجزء غير المتجانس مع ملاحظة أن الجزء غير المتجانس يمثل قيمة معلومة أي عند أخذ المتغير يصبح مساوي للصفر بعبارة أدق ينتج هذا الحد من جداء متغير توابع الشكل الجزء المتجانس و توابع الشكل الجزء غير المتجانس. سيشمل هذا الحد أربعة أقسام موافقة للمصفوفات الأربعة الموضحة سابقا مع استبدال توابع الشكل الجزء المتجانس بتوابع الشكل الجزء غير المتجانس.

$$R_2 =$$

$$\int_A (B_m)^T \cdot Q_m \cdot \bar{B}_m \cdot dA + \int_A (B_b)^T \cdot Q_b \cdot \bar{B}_b \cdot dA + \int_A (B_s)^T \cdot Q_s \cdot \bar{B}_s \cdot dA + \int_A (G)^T \cdot S \cdot \bar{G} \cdot dA \quad (54)$$

حيث أن المصفوفات  $(\bar{B}_m, \bar{B}_b, \bar{B}_s, \bar{G})$  مشابهة تماما للمصفوفات السابقة  $(B_m, B_b, B_s, G)$  لكن بدلاً من اشتقاق توابع الشكل الجزء المتجانس نقوم باشتقاق توابع الشكل الجزء غير المتجانس.

$$R_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_m)^T \cdot Q_m \cdot \bar{B}_m \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_b)^T \cdot Q_b \cdot \bar{B}_b \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (B_s)^T \cdot Q_s \cdot \bar{B}_s \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (G)^T \cdot S \cdot \bar{G} \cdot \det J \cdot d\theta^1 \cdot d\theta^2 \quad (55)$$

بعد أن تم استخراج المصفوفات و الحدود السابقة لعنصر منتهي واحد يبقى علينا التجميع على كافة عناصر المسألة المدروسة و استخراج المصفوفات العامة و هذا ما سيقوم به الكود المعد بلغة الماتلاب سنعرض الآن بعض الأمثلة المدروسة باستخدامه.

#### النتائج والأمثلة العددية :

قورنت النتائج الناجمة عن استخدام العنصر الحالي المؤلف من طبقة واحدة مع تلك الواردة في المراجع [30,31] و التي استخدمت فيها طريقة الفروقات المحددة. وتبين أن النتائج مقاربة مما يشير إلى أنه بإمكاننا ان نستخدم الخوارزميات الحالية مبدئياً لأخذ فكرة عن السلوك اللاخطي للبلاطات و نعرض فيما يلي بعض حلول مسائل البلاطات المتعددة الطبقات. في كافة الأمثلة المدروسة اعتمدت سماكة الطبقات ضمن البلاطة الواحدة متساوية، و عامل تصحيح القص  $\left(\frac{5}{6}\right)$ . تم اعتماد طريقة نيوتن رافسون في تطبيق التكرارات و تقسيم الحمولة إلى 10 خطوات تتزايد بدءاً من الصفر حتى القيمة النهائية. تم اعتماد مقدار التقارب (الدقة) مساوي إلى (0.01).

▪ بلاطة مربعة متناظرة و موثوقة من أطرافها الأربعة :

أبعادها في المسقط الأفقي  $(L = 12in = 304.8mm)$  و سماكتها  $(t = 0.096in = 2.438mm)$  مؤلفة من أربع طبقات مرتبة بالاتجاهات  $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$

عوامل المرونة بالاتجاه x :  $(E_1 = 1.8282 \times 10^6 Psi = 1.2605 \times 10^4 MPa)$

بالاتجاه y :  $(E_2 = 1.8315 \times 10^6 Psi = 1.2628 \times 10^4 MPa)$

عوامل القص  $(G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.125 \times 10^5 Psi = 2.1546 \times 10^3 MPa)$

عامل بواسون  $(\nu_{12} = \nu_{21} = 0.23949)$

و البلاطة خاضعة لحمولة موزعة بانتظام شدتها الكلية  $(q = 2Psi = 1.38 \times 10^{-2} MPa)$ .

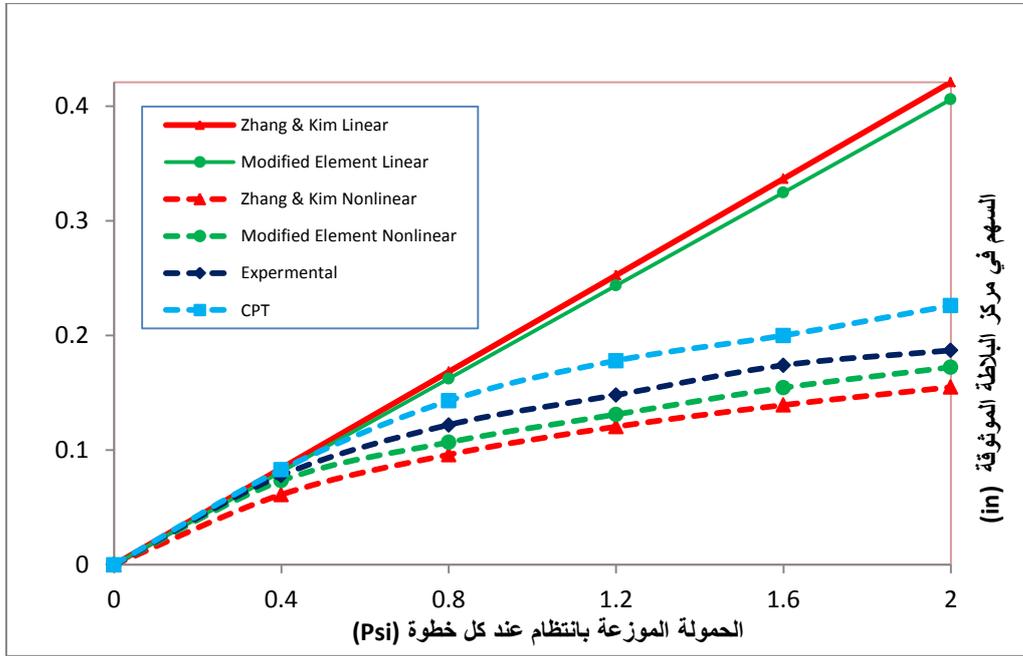
تم حساب السهم في مركز البلاطة المربعة وفق الكود المعد بلغة الماتلاب و الناتج عن العنصر المنتهي المعدل. لراحة القارئ نورد النتائج التي توصل إليها باحثين آخرين مثل زهانغ و كيم [21] و كذلك الحل الناتج عن اعتماد النظرية الكلاسيكية للبلاطات (CPT) و نتائج الاختبارات التجريبية [29] و هي موضحة في الجدول (1).

الجدول (1) : السهم في مركز البلاطة الموثوقة

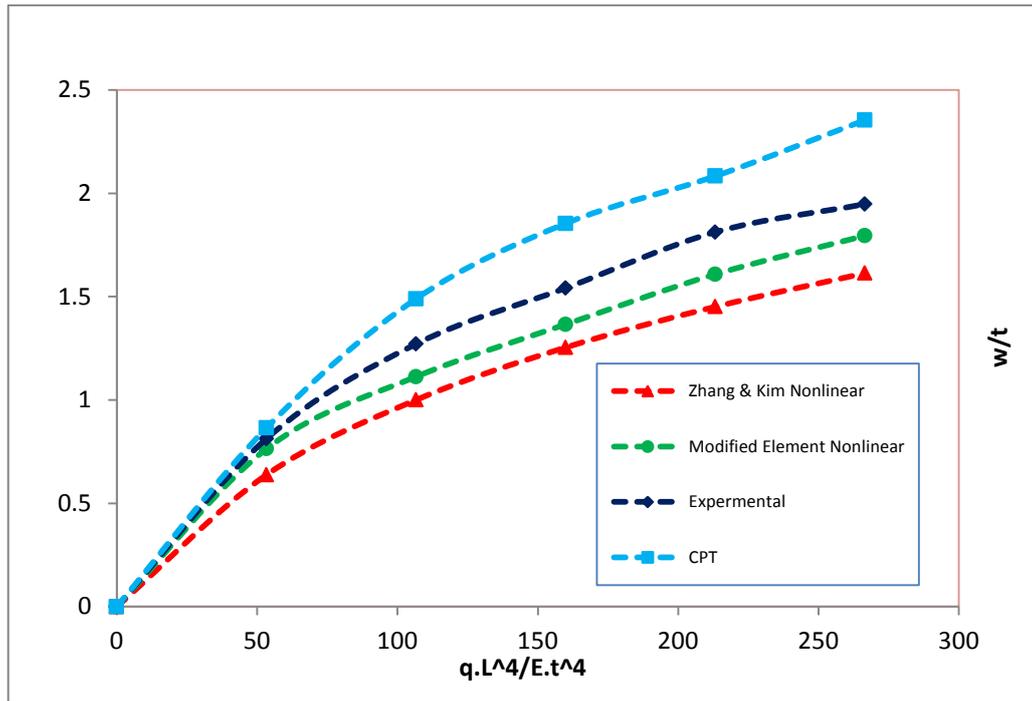
q Psi (MPa)	السهم وفق التحليل الخطي in (mm)		السهم وفق التحليل اللاخطي in (mm)			
	زهانغ و كيم	العنصر المعدل	CPT	التجريبي	زهانغ و كيم	العنصر المعدل
0.4 (0.28x10 <sup>-2</sup> )	0.0842 (2.139)	0.0812 (2.062)	0.083 (2.108)	0.078 (1.981)	0.0612 (1.554)	0.0733 (1.682)
0.8 (0.55x10 <sup>-2</sup> )	0.1684 (4.277)	0.1624 (4.125)	0.143 (3.632)	0.122 (3.099)	0.0960 (2.438)	0.1068 (2.713)

1.2 ( $0.83 \times 10^{-2}$ )	0.2525 (6.413)	0.2436 (6.187)	0.178 (4.521)	0.148 (3.759)	0.1204 (3.058)	0.1311 (3.33)
1.6 ( $1.1 \times 10^{-2}$ )	0.3367 (8.552)	0.3247 (8.247)	0.200 (5.08)	0.174 (4.419)	0.1393 (3.538)	0.1544 (3.922)
2.0 ( $1.38 \times 10^{-2}$ )	0.4209 (11.691)	0.4059 (10.31)	0.226 (5.74)	0.187 (4.75)	0.1549 (3.934)	0.1723 (4.376)

كما تم رسم مخطط تزايد السهم في مركز البلاطة مع تزايد الحمولة في كل خطوة الشكل (4) و كذلك المخطط اللابعدى لتزايد السهم  $\left(\frac{w}{t}\right)$  مع تزايد الحمولة  $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$  الشكل (5) كونه يوضح الاختلافات بين طرق الحل بشكل أكبر.



الشكل (4) : مخطط تزايد السهم مع الحمولة في مركز البلاطة المربعة الموثوقة



الشكل (5) : العلاقة بين السهم اللابعدى  $\left(\frac{w}{t}\right)$  و الحمولة اللابعدية  $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$  في مركز البلاطة المربعة الموثوقة

من الواضح لدينا أن النتائج التي حصلنا عليها (السهم في مركز البلاطة) عند استخدام العنصر المنتهي المعدل المقترح هنا على توافق كبير مع النتائج التي حصل عليها زهانغ و كيم و مع النتائج التجريبية أيضاً في حين أن النتائج التي أعطتها النظرية الكلاسيكية للبلاطات (CPT) كانت كبيرة و مبالغ بها إلى حد ما.

▪ بلاطة مربعة متمفصلة من أطرافها الأربعة :

لدينا بلاطة مربعة ذات استناد بسيط (متمفصلة) من أطرافها الأربعة حيث أن أبعادها في المسقط الأفقي  $(L = 12in = 30.48cm)$  و سماكتها  $(t = 0.138in = 0.35052cm)$  و مؤلفة من ثمانية طبقات مرتبة جميعها

باتجاه واحد  $(0^\circ)$ ، خواص المادة ضمن كل طبقة : عامل بواسون  $(\nu_{12} = \nu_{21} = 0.32)$

عوامل المرونة بالاتجاه x :  $(E_1 = 3.0 \times 10^6 Psi = 2.06843 \times 10^4 MPa)$

الاتجاه الآخر أي y :  $(E_2 = 1.280 \times 10^6 Psi = 0.88253 \times 10^4 MPa)$

عوامل القص كانت كالتالي  $(G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.7 \times 10^5 Psi = 2.55106 \times 10^3 MPa)$

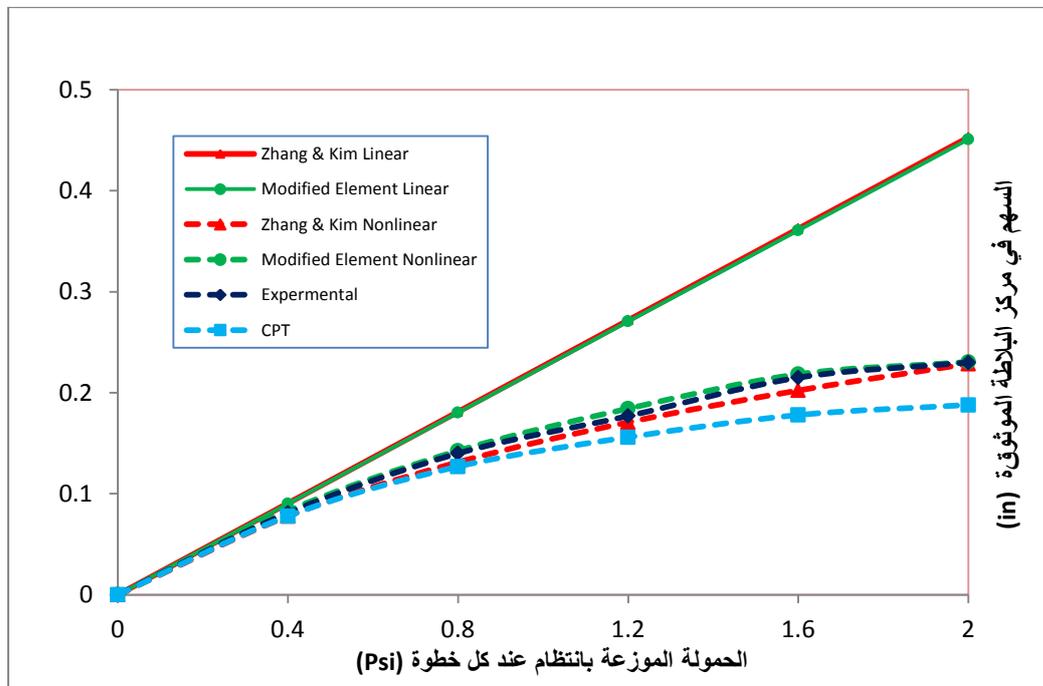
و البلاطة خاضعة لحمولة موزعة بانتظام بشدتها الكلية  $(q = 2Psi = 1.38 \times 10^{-2} MPa)$

تم حساب السهم في مركز البلاطة المربعة وفق الكود المعد بلغة الماتلاب و الناتج عن العنصر المنتهي المعدل المقترح في هذه الدراسة، و لراحة القارئ نورد مجموعة من النتائج لباحثين آخرين قاموا بدراسة المثال السابق مثل زهانغ و كيم [21] كما سنورد الحل الناتج عن اعتماد النظرية الكلاسيكية للبلاطات (CPT) و نتائج الاختبارات التجريبية الواردة في المرجع [29] و هي موضحة في الجدول (2).

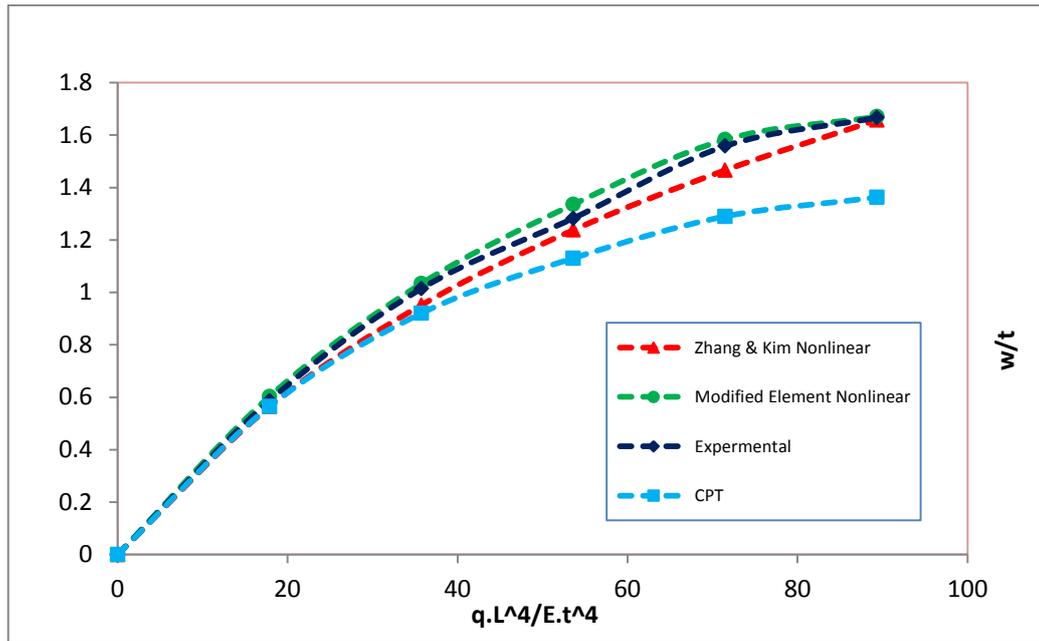
الجدول (2) : السهم في مركز البلاطة ذات الاستناد البسيط

$q$ Psi (MPa)	السهم وفق التحليل الخطي in (mm)		السهم وفق التحليل اللاخطي in (mm)			
	زهانغ و كيم	العنصر المعدل	CPT	التجريبي	زهانغ و كيم	العنصر المعدل
0.4 ( $0.28 \times 10^{-2}$ )	0.0906 (2.301)	0.0902 (2.291)	0.078 (1.981)	0.081 (2.057)	0.0779 (1.979)	0.0832 (2.113)
0.8 ( $0.55 \times 10^{-2}$ )	0.1812 (4.602)	0.1804 (4.582)	0.127 (3.226)	0.140 (3.556)	0.1313 (3.335)	0.1426 (3.622)
1.2 ( $0.83 \times 10^{-2}$ )	0.2718 (6.904)	0.2706 (6.873)	0.156 (3.962)	0.177 (4.496)	0.1708 (4.338)	0.1843 (4.681)
1.6 ( $1.1 \times 10^{-2}$ )	0.3624 (9.205)	0.3608 (9.164)	0.178 (4.521)	0.215 (5.461)	0.2023 (5.138)	0.2184 (5.547)
2.0 ( $1.38 \times 10^{-2}$ )	0.4529 (11.504)	0.4510 (11.455)	0.188 (4.775)	0.230 (5.842)	0.2287 (5.809)	0.2305 (5.855)

كما تم رسم مخطط تزايد السهم في مركز البلاطة مع تزايد الحمل في كل خطوة الشكل (6) و كذلك المخطط اللاخطي لتزايد السهم ( $\frac{w}{t}$ ) مع تزايد الحمل ( $\frac{q.L^4}{E_2.t^4}$ ) الشكل (7) كونه يوضح الاختلافات بين طرق الحل بشكل أكبر.



الشكل (6) : مخطط تزايد السهم مع الحمل في مركز البلاطة المربعة ذات الاستناد البسيط



الشكل (7) : العلاقة بين السهم اللابعدي  $\left(\frac{w}{t}\right)$  والحمولة اللابعديّة  $\left(\frac{q.L^4}{E_2.t^4}\right)$  في مركز البلاطة المربعة ذات الاستناد البسيط

توضح النتائج التي حصلنا عليها (السهم في مركز البلاطة) عند استخدام العنصر المنتهي المعدل المقترح هنا على توافق كبير مع النتائج التي حصل عليها زهانغ و كيم و مع النتائج التجريبية أيضاً في حين أن النتائج التي أعطتها النظرية الكلاسيكية للبلاطات (CPT) كانت صغيرة و أقل من المتوقع.

### الاستنتاجات والتوصيات:

- تم استخدام طريقة العناصر المنتهية المعدلة في إيجاد الحل العددي لمعادلة Von Karman في المجال الهندسي اللاخطي للبلاطات المتعددة الطبقات اعتماداً على الشكل التزايدى لمبدأ الانتقالات الوهمية.
- مقارنة الحل الناتجة مع حلول أخرى معروفة في الأدبيات العالمية استخدمت طريقة العناصر المنتهية وطريقة الفروقات المحددة في حل معادلة Von Karman للبلاطات الوحيدة الطبقة.
- تشير النتائج الأولية إلى قدرة الطريقة المعدلة على التعامل مع الشكل التزايدى لحالات الهندسية اللاخطية والفيزيائية اللاخطية بالرغم من اشتراط الطريقة المعدلة استخدام توابع تقريبية محققة للمعادلة التفاضلية على مستوى العنصر إذ يمكن بشكل تقريبي استخدام حل المعادلة التفاضلية للحالة الخطية كتقريب أولي للحالة اللاخطية.
- تقدم الطريقة المعدلة نتائج سريعة و قيماً مبدئية لما يمكن توقعه من نتائج عند سلوك طرق جديدة للحل.

### References:

- 1- Reddy, J. N. *A simple higher-order theory for laminated composite plates*. Journal of Applied Mechanics, Vol (51) 1984, 745–752.
- 2- Reddy, J. N. *Refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation*. International Journal of Solids and Structures, Vol (20) 1984, 881–896.

- 3- Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N. *A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol (21) 1985, 367–383.
- 4- Kant, T. and Kommineni J. R.  *$C^0$  finite element geometrically nonlinear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory*. Comput Struct, Vol (45) 1992, 511–20.
- 5- Putcha, N. S. *A mixed shear flexible finite element for geometrically nonlinear analysis of laminated plates*. PhD Dissertation, Texas AM University, 1984.
- 6- Chattopadhyay, B., Sinha, P. K. and Mukhopadhyay M. *Geometrically nonlinear analysis of composite stiffened plates using finite elements*. Compos Struct, Vol (31) 1995, 107–18.
- 7- Ganapathi, M., Polit, O. and Touratier M. A.  *$C^0$  eight-node membrane– shear– bending element for geometrically non-linear (static and dynamic) analysis of laminates*, Int J Numer Meth Eng, Vol (39:34) 1996, 53–74.
- 8- Thankam, V. S., Singh, G., Rao, G. V. and Rath, A. K. *Shear flexible element based on coupled displacement field for large deflection analysis of laminated plates*, Comput Struct, Vol (81.30) 2003, 9–20.
- 9- Srinivas, S. and Rao, A. K. *Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates*. International Journal of Solids and Structures, Vol (6) 1970, 1463–1481.
- 10- Pagano, N. J. and Hatfield, S. J. *Elastic behavior of multilayered bidirectional composites*. AIAA Journal, Vol (10) 1972, 931–933.
- 11- Reddy, J. N. and Chao, W. C. *A comparison of closed form and finite element solutions of thick laminated rectangular plates using first-order shear deformation theory*. Nuclear Engineering and Design, Vol (64) 1997, 153–167.
- 12- Khdeir, A., Reddy, J. N. and Librescu, L. *Analytical solution of a refined shear deformation theory for rectangular composite plates*. International Journal of Solids and Structures, Vol (23) 1987, 1447–1463.
- 13- Auricchio, F. and Sacco, E. *Partial-mixed formulation and refined models for the analysis of composite laminates within an FSĐT*. Composite Structures, Vol (46) 1999, 103–113.
- 14- Fares, M. E. *Non-linear bending analysis of composite laminated plates using a refined first-order theory*. Composite Structures, Vol (46) 1999, 257–266.
- 15- Reddy, J. N. and Sandidge, D. *Mixed finite element models for laminated composite plates*. Journal of Engineering for Industry, Vol (109) 1986, 39-45.
- 16- Putcha, N. S. and Reddy, J. N. *A refined mixed shear flexible finite element for the non-linear analysis of laminated plates*. Comput Struct, Vol (22) 1986, 9–38.
- 17- Carrera, E.  *$C^0$  Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zigzag and interlaminar stress continuity*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol (39) 1996, 1797–1820.
- 18- Auricchio, F. and Sacco, E. *A mixed-enhanced finite element for the analysis of laminated composite plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol (44) 1999, 1481–1504.
- 19- Pontaza, J. P. and Reddy, J. N. *Mixed plate bending elements based on least-squares formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol (60) 2004, 891–922.

- 20- Auricchio, F., Sacco, E. and Vairo, G. *A mixed FSDT finite element for monoclinic laminated plates*. Computers and Structures, Vol (84) 2006, 624–639.
- 21- Zhang, Y. X. and Kim, K. S. *Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements*. ELSEVIER, Composite Structures, Vol (72) 2006, 301–310.
- 22- Reddy J. N. and Urthaler, Y. *A Mixed Finite Element for the Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol (15) 2008, 335–354.
- 23- Nguyen-Van, H., Nguyen-Hoai, N., Chau-Dinh, T. and Nguyen-Thoi T. *Geometrically nonlinear analysis of composite plates and shells via a quadrilateral element with good coarse-mesh accuracy*. Composite Structures, Vol (112) 2014, 327–338.
- 24- Abo Diab, S. "*Generalization of a reduced Trefftz type approach –some numerical results*". sixth U.S. National congress on Computational Mechanics, Dearborn Michigan, USA, 01-04, August 2001, pp.595.
- 25- Abo Diab, S. "*Formatting of Quadrilateral Finite element*", Fifth World congress on Computational Mechanics (WCCMV), Vienna, Austria, (Editors: Mang H.A, Rammer stoffer, F.G, Eberhardsteinerm J. publisher Vienna University of Technology ,Austria, ISBN 3-9501554-06; <http://wccm.tuwien.ac.at>, ,July 2002.
- 26- Abo Diab, S. "*The natural boundary conditions as a variational basis for finite element methods – quadrilateral plate bending elements*". In CD-ROM: Numerical Methods in Continums Mechanics 2000 Eds. V. Kompis, M. Zmindak, E. W. A. Maunder, Liptovsky Jan, Slovakia, 2000, Paper No. 083.
- 27- Abo Diab, S. "*Quadrilateral folded plate structure elements of reduced Trefftz Type*". CAMES, Vol(10) 2003, 391-406.
- 28- Abo Diab, S. "*Finite Element based on Reduced Trefftz Type Concepts*", Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI), Beijing, China, Tsinghua University Press & Springer-Verlag, <http://www.wccm6-apcom04.org.cn>
- 29- Zaghoul, S. A. and Kennedy J. B. "*Nonlinear behavior of symmetrically laminated plates*", J Appl Mech Vol(42), 1975, 234–250.
- 30- Gabbasov , R., Filatov, V. and Dao, N. K. " Numerical Research of Bending Flexible Plates ". IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 661 012006, 2019.
- 31- Uvarova, N. and Turbinov, A. "A numerical method for calculating round slabs based on generalized equations of the finite difference method". IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 869 052050, 2020.