The effectiveness of Gamma Distribution compared to Exponential Distribution In estimating the death and survival probabilities for two genders

Hala Mohammed Ntefeh*

(Received 28 / 7 / 2025. Accepted 2 / 3 / 2026)

□ ABSTRACT □

The article aims to compare the effectiveness of Exponential Distribution (with one parameter) and Gamma Distribution (with two parameters) in estimating the death and survival probabilities for two gender (male and female),and it determines probability Cumulative Functions for both distributions, and estimates its parameters by using The Moments Method, It evaluates the suitability for both distributions by using (Kolmogorov-Smirnov) test , PPplots, and the Sum of Square Errors (SSE).

To compare the Models, Akaike Information Criterion (AIC) and corrected Akaike Information Criterion (AICc) has been used. The study was concluded that Gamma Distribution is the best of this estimation process and more suitable for modeling death and survival probabilities, according to the models used in this study

Key words: Exponential Distribution, Gamma distribution, the Probability Density function for Death, Survival function.

Copyright **:**Latakia University journal (formerly tishreen) -Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

*Lecturer in Alsham Private University, Syria. h.n.fod.lat@.aspu.edu.sy

فعالية توزيع جاما مقارنة بالتوزيع الأسي في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء للنوعين معاً

هلا محمد نتيفة*

(تاريخ الإيداع 28 / 7 / 2025. قبل للنشر في 2 / 3 / 2026)

□ ملخّص □

تهدف المقالة إلى مقارنة فعالية التوزيع الأسي (بمعلمة واحدة) وتوزيع جاما (بمعلمتين) في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء على قيد الحياة لنوعي السكان (الذكور والإناث)، وهي تحدد دوال كثافة الاحتمال لكلا التوزيعين، وتقدر معلماتهما باستخدام طريقة العزوم، وتقيم مدى ملاءمتهما باستخدام اختبار كولموجوروف–سميرنوف، ومخططات PP، ومجموع مربع الخطأ (SSE).

لمقارنة النماذج، تم استخدام معيار المعلومات لأكايكي (AIC) ومعيار المعلومات المصحح لأكايكي (AICc). وخلصت الدراسة إلى أن توزيع جاما هو الأفضل لعملية التقدير هذه، وهو أكثر ملاءمة لنمذجة احتمالات الوفاة والبقاء على قيد الحياة بناءً على النماذج المستخدمة في هذه الدراسة.

الكلمات المفتاحية: التوزيع الأسي، توزيع جاما، دالة الكثافة الاحتمالية للوفاة، دالة البقاء.

حقوق النشر : مجلة جامعة اللاذقية (تشرين سابقاً)– سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص CC BY–NC–SA 04

* مدرس، جامعة الشام الخاصة , سوريا.
h.n.fod.lat@.aspu.edu.sy

مقدمة:

يحظى التوزيع الأسي وتوزيع جاما كتوزيعين احتماليين مستمرين، ينتميان إلى عائلة التوزيعات الاحتمالية الأسية بفرصة كبيرة في دراسات البقاء على قيد الحياة، إضافة إلى دورهما بالغ الأهمية في مختلف المجالات الإحصائية، حيث يستخدم التوزيع الأسي في تقدير الزمن العشوائي لمدة بقاء طالب ما في كلية ما للدراسة، وتقدير المدة الزمنية لصلاحية مصباحاً كهربائياً، وتقدير مدة استشفاء مريض من مرض معين، وإعداد نماذج البقاء والفشل وتحليل الطوابير ونظرية الانتظار، فضلاً عن استخدامه في تحليل فترات الوقت بين الفحوص الطبية، في حين يستخدم توزيع جاما في تحديد الوقت الذي يستغرقه مشروع للانتهاء، أو الفهم الأمثل للمواعيد النهائية، أو في دراسة طوابير الانتظار، ويستخدم أيضاً لتحليل أوقات الإنتاج، ويمكن استخدامه في دراسة المدة التي يستغرقها المرضى للشفاء من مرض معين، أو في النماذج الاحتمالية لتمثيل الوقت اللازم لحدوث حدث معين، ويمكن استخدام التوزيعين المذكورين في تقدير احتمالات البقاء واحتمالات الوفاة للسكان حسب فئاتهم العمرية، حيث من الملاحظ تشابه ميادين تطبيق كل من التوزيعين المذكورين، السبب الذي شجع دراسة كل من التوزيعين، حيث لم يتم تحديد سكان بلد معين، لأن جوهر هذا البحث هو إبراز طريقة التقدير لاحتمالات البقاء والوفاة عبر معالم التوزيعين المستخدمين، وفي حال توفر بيانات حقيقية عن سكان بلد ما كسورية مثلاً، يتم استخدامها بدل البيانات التي تم توليدها عشوائياً في هذه الدراسة.

مشكلة البحث:

تتبلور مشكلة الدراسة في التساؤلات التالية:

1- هل يلائم التوزيع الأسي وتوزيع جاما احتمالات الوفاة والبقاء للفئات العمرية الخماسية.

2- هل يستطيع كل من التوزيعين تقدير احتمالات الوفاة والبقاء للفئات العمرية.

3- أي من التوزيعين الاحتماليين المذكورين أكثر فعّالية في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء للفئات العمرية في حال امتلاكهما قدرة التقدير؟

الدراسات السابقة:

لقد تناولت دراسات عديدة تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية بشكل عام، وتقدير معلمة التوزيع الأسي ومعلمتي توزيع جاما بشكل خاص:

1-دراسة محمود عام 2024 [1] بعنوان " استخدام المحاكاة في تقدير معلمة القياس لتوزيع جاما المستمر" حيث جرت هذه الدراسة في مركز أحياء تراث الأمن الغذائي بجامعة بغداد في العراق، وتناولت تقدير معلمة الشكل لتوزيع جاما ذي المعلمتين، باستخدام طريقة العزوم، وتقدير معلمة القياس بطريقة العزوم والإمكان الأعظم ومقدر بيزي(MVUE) ومقدر بيزي خليط من (MVUE) والإمكان الأعظم، ومقدر بيزي مقترح ومقدر غير متحيز يملك أقل تباين، تم اجراء تجارب محاكاة على حجوم عينات مختلفة لمقارنة المقدرات بواسطة متوسط مربعات الخطأ، وأعطى مقدر "أقل تباين" أقل قيمة لمتوسط مربعات الأخطاء لحجوم عينات مختلفة، يلية المقدر البيزي والعزوم ثم مقدر الإمكان الأعظم،

2-دراسة نتيفة [2] بعنوان " استخدام التوزيعات الاحتمالية في بناء جداول الحياة في سورية"، وهي دراسة أجريت لنيل درجة الدكتوراه في الاحصاء بجامعة اللاذقية في سورية، هدفت الى إعداد جداول الحياة لسكان سورية بالاعتماد على

التوزيع الاحتمالي الأكثر ملائمة عبر تقدير معلمات التوزيعات بطريقتي العزوم والمربعات الصغرى اللاخطية لست توزيعات احتمالية من ضمنها التوزيع الأسي بمعلمة واحدة، ووقع الاختيار على توزيع جومبيرتز، لأنه أعطى أفضل تقديرات لاحتمالات الوفاة للفئات العمرية الصغيرة لسكان سورية، بينما أعطى توزيع بيتا أفضل تقديرات لاحتمالات الوفاة للفئات العمرية الشابة والكبيرة لسكان سورية بناءاً على نموذج الوفاة المقترح، وتم التأكد من ذلك بإجراء اختبارات حسن المطابقة ومعياري أكايكي وشوارز كوسيلة للمقارنة بين التوزيعات الاحتمالية المدروسة،

3-دراسة Shukla [3] عام2019 بعنوان " A comparative study of one parameter lifetime distribution" أي " دراسة مقارنة بين توزيعات الأعمار ذات المعلمة الواحدة" التي أجريت في أريتيريا، تناولت الدراسة مقارنة الخصائص المهمة لعدة توزيعات احتمالية ذات المعلمة الواحدة من ضمنها التوزيع الأسي باستخدام بيانات العمر الافتراضي من مجالات دراسية مختلفة، تم تقدير معلمة كل توزيع من التوزيعات باستخدام طريقة الإمكان الأعظم، كما تم تطبيق معيار أكايكي ومعيار بايزي واختبار كولموجورف سميرنوف للتأكد من حسن المطابقة والمقارنة بين التوزيعات الاحتمالية لثماني عشرة مجموعة من بيانات الأعمار الحقيقة، وكان من أهم نتائج الدراسة ملائمة التوزيع الأسي لتقدير بيانات الأعمار لست مجموعات، في حين أن ثلاث مجموعات مرتبطة بالمجالات البيولوجية وأخرى مرتبطة بالمجالات الكيميائية والهندسية أعطت ملائمة أفضل لتوزيع ليندلي، واعتبرت الدراسة أن التوزيع الأسي وتوزيع ليندلي نموذجين جيدين للدراسات البيولوجية والهندسية.

4-دراسة Sultana وآخرون [4] بعنوان "Estimation of Parameters for the Lifetime Distributions" أي "تقدير معلمات توزيعات العمر"، هدفت الدراسة الى استخدام طرقاً مختلفة لتقدير معلمات توزيعات العمر لعدة توزيعات احتمالية من بينهم توزيع جاما والتوزيع الأسي، كطريقة العزوم والإمكان الأعظم والعزوم المرجحة الاحتمالية والمربعات الصغرى والمربعات الصغرى الاحتمالية، وتمت مقارنة الطرق باستخدام الانحراف الكلي ومتوسط خطأ القياس ومعامل التحديد، وتبين أن طريقة العزوم المرجحة الاحتمالية هي أفضل طريقة لتقدير معلمات التوزيعات في حالة العينات الصغيرة وطريقة الامكان الأعظم في حالة العينات الكبيرة.

تتشابه الدراسة الحالية مع الدراسة الأولى في استخدام توزيع جاما الاحتمالي لتقدير وقت الفشل، ويماثل احتمالات الوفاة في الدراسة الحالية باستخدام طريقة العزوم فقط، لكنها تختلف معها في الهدف ومعايير المقارنة، أما الدراسة الثانية فتشابهت مع دراستنا في استخدام التوزيع الأسي وطريقة العزوم ومعايير الاختبار والمقارنة لاختيار أفضل توزيع احتمالي لتقدير احتمالات الوفاة، واختلفت معها في عدم دراسة نموذج البقاء وعدم استخدام توزيع جاما الاحتمالي، أما الدراستين الثالثة والرابعة فتناولتا تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية واستخدام أفضلها في تقدير توزيعات الأعمار، وبذلك اختلفتا مع دراستنا الحالية في الهدف، وهو معرفة أي من التوزيعين المذكورين أكثر فعالية في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء.

أهمية البحث وأهدافه :

تتبع أهمية البحث في محاولة الوصول الى تقديرات لاحتمالات الوفاة والبقاءعبر التوزيع الأسي وتوزيع جاما، في ظل عدم توفر بيانات فعلية عنهما، حيث يمكن الاعتماد على احتمالات الوفاة والبقاء كأساس للتقدير من قبل الجهات المهتمة، وشركات التأمين، ووفق نموذجي الوفاة والبقاء المستخدمين في الدراسة، حيث يعتبر كل من التوزيعين المذكورين من التوزيعات الاحتمالية الهامة التي تستخدم في دراسات البقاء، لذلك هدف البحث إلى إبراز إمكانية كل منهما في عملية التقدير، ومعرفة أي منهما أكثر تمثيلاً لاحتمالات البقاء والوفاة الفعلية.

فرضيات البحث:

-يوجد أثر ذو دلالة احصائية لنوع التوزيع الاحتمالي على فعاليته في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء في جميع الفئات العمرية الخماسية

-يوجد أثر ذو دلالة احصائية لطبيعة التوزيعين المدروسين وشكلهما على فعاليته في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء في الفئات العمرية الأخيرة

طرائق البحث ومواده:

فيما يلي سرد لدوال الوفاة والوفاة التراكمية والبقاء لكل من التوزيع الأسي وتوزيع جاما، وتقدير معلمة القياس للتوزيع الأسي، ومعلمتي الشكل والقياس لتوزيع جاما بتطبيق طريقة العزوم، ونموذجي الوفاة والبقاء للدراسة، واختبارات ملائمة التوزيعين لاحتمالات الوفاة والبقاء المقدرة عبر معلماتهم، باستخدام اختبار كولموجورف سميرنوف، ومخططات(PP)، ومعياري أكايكي وأكايكي المعدل، وتمت الحسابات والرسومات بمساعدة برنامج(R.4.2.2) [6],[5] وبرنامج إكسل المتقدم.

1- التوزيع الأسي (Exponential Distribution):

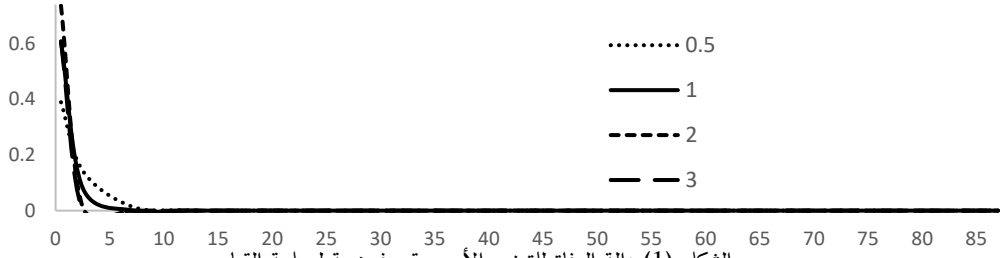
يتم الحصول على احتمال الوفاة للأشخاص خلال الفترة $(t, t+\Delta t)$ للمتغير العشوائي t الخاضع للتوزيع الأسي، عن طريق دالة كثافة الوفاة الاحتمالية التالية: [7]

$$f(t) = \theta\, e^{-\theta t} \quad \theta > 0 \quad t \geq 0 \qquad (1)$$

حيث: θ تمثل معلمة القياس للتوزيع الأسي، t العمر أو زمن البقاء

من أهم خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للوفاة أنها دالة موجبة دوماً، وأن المساحة تحت منحني $f(t)$ مساوية للواحد الصحيح $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$ ، وهذا ينطبق على دالة الكثافة للوفاة لأي توزيع احتمالي غير التوزيع الأسي.

يوضح الشكل (1) دالة كثافة الوفاة للتوزيع الأسي، للأعمار من أقل من عام حتى أكثر من 85 عام، وقيم فرضية لمعلمة القياس، يلاحظ أنّه كلّما زادت قيمة (θ)، ازداد احتمال الوفاة للفئة العمرية الأولى، وحتى القيمة (2) لمعلمة القياس، ويبدأ احتمال الوفاة بالتناقص كلَما أخذت (θ) قيم أعلى من (2)، ولكن منحني الدالة يتناقص تناقصاً كبيراً كلّما تزايدت الأعمار، وخاصة عند الأعمار الصغيرة جداً والصغيرة، ويستمر بالتناقص التدريجي مع تقدم العمر.



الشكل (1) دالة الوفاة للتوزيع الأسي بقيم فرضية لمعلمة القياس

المصدر: تم الرسم من قبل الباحثة بالإستعانة ببرنامج Excel

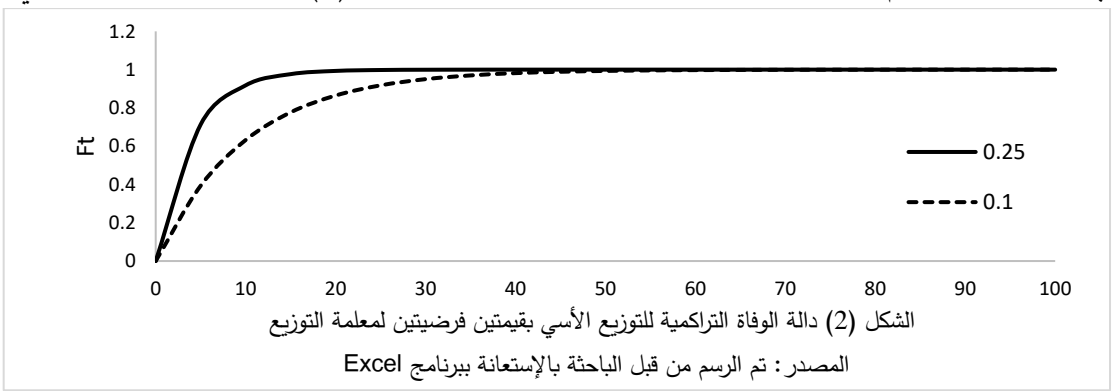
ونحصل على احتمال الوفاة قبل عمر معين t من دالة الوفاة التراكمية للتوزيع الأسي الآتية:

$$P(T < t) = F(t) = 1 - e^{-\theta t} \qquad (2)$$

ولدالة الوفاة التراكمية $F(t)$ الخصائص التالية: [7]

- دالة غير متناقصة
- نهاية دالة الوفاة التراكمية عند اللحظة $t \to 0$ هي الصفر أي أن $\lim_{t\to 0} F(t) = 0$
- نهاية دالة الوفاة التراكمية عندما $t \to \infty$ هي الواحد أي أن $\lim_{t\to +\infty} F(t) = 1$

يوضّح الشكل (2) دالة الوفاة التراكمية للتوزيع الأسي، وبقيم فرضية لمعلمة القياس، ويبيّن أنّها دالة متزايدة، أي أنّه كلّما ازداد العمر، ازداد احتمال الوفاة التراكمي، وبخاصة عند الأعمار الصغيرة جداً والصغيرة، ثم يزداد بعدها تدريجياً مقترباً من الواحد كلَما تقدم العمر، كما نلاحظ أنّه كلما زادت قيمة معلمة القياس (θ)، ازداد احتمال الوفاة التراكمي.



الشكل (2) دالة الوفاة التراكمية للتوزيع الأسي بقيمتين فرضيتين لمعلمة التوزيع

المصدر: تم الرسم من قبل الباحثة بالإستعانة ببرنامج Excel

ونحصل على احتمال بقاء شخص على قيد الحياة بعد بلوغه العمر t عن طريق دالة البقاء للتوزيع الأسي الآتية:

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\theta t} \qquad (3)$$

ولدالة البقاء على قيد الحياة $S(t)$ الخصائص الآتية:

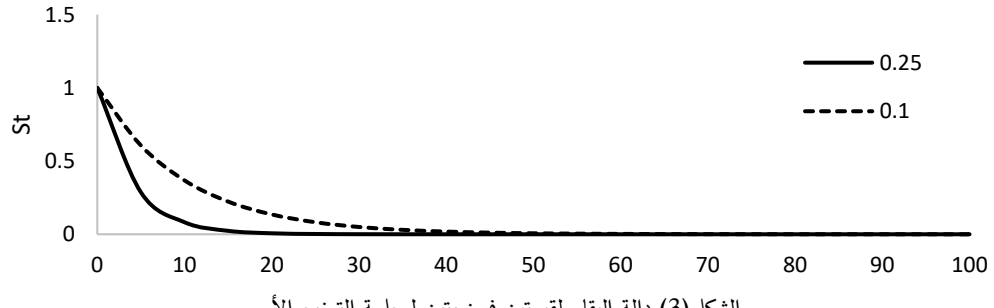
1- دالة معرفة ومستمرة ولجميع قيم t الموجبة، أي من أجل $t > 0$

2- دالة متناقصة مع الزمن، أي تتناسب عكسياً مع الزمن بمعنى $S(t=0) = 1$ و $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$

3- قيمها محصورة بين الصفر والواحد، أي أنّ: $0 \le S(t) \le 1$

يوضح الشكل (3) دالة البقاء للتوزيع الأسي بقيم فرضية لمعلمة القياس، يلاحظ أنها دالة متناقصة مع تزايد العمر، وتتناقص بشدة عند الأعمار الصغيرة جداً والصغيرة، وتتناقص تدريجياً مقتربة من الصفر كلَما تقدم العمر، وكلَما زادت

قيمة معلمة القياس، انخفض احتمال البقاء. يلاحظ أنّ سلوك $(S(t))$ معاكس تماماً لسلوك $(F(t))$، لأنّهما دالتان متتامتان، وهذا السلوك موجود في أنواع التوزيعات الاحتمالية كلّها، لأنّ ذلك راجع لطبيعتهما.



الشكل(3) دالة البقاء لقيمتين فرضيتين لمعلمة التوزيع الأسي

المصدر: تم الرسم من قبل الباحثة بالاستعانة ببرنامج Excel

2- توزيع جاما (Gamma distribution): يتم الحصول على احتمالات وفاة الأشخاص بين فترتين زمنيتين عبر دالة الكثافة الاحتمالية للوفاة لتوزيع جاما والتي تعطى بالعلاقة التالية [7]:

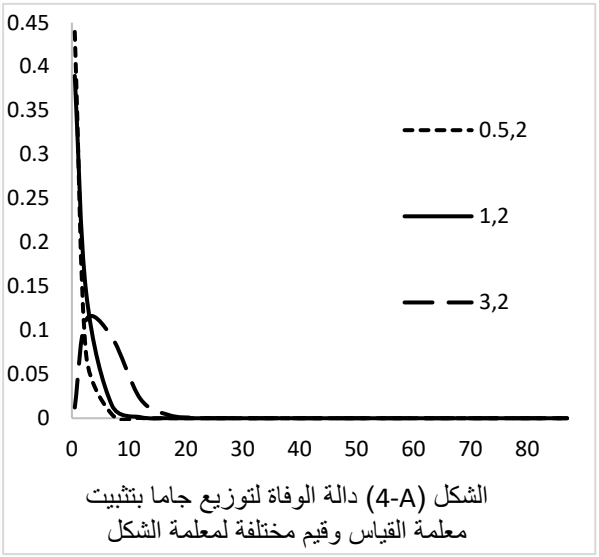
$$f(t) = \frac{\theta^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\theta t} \quad t \geq 0 \ r > 0 \ \theta > 0 \ (4)$$

حيث: r معلمة الشكل لتوزيع جاما، θ معلمة القياس لتوزيع جاما.

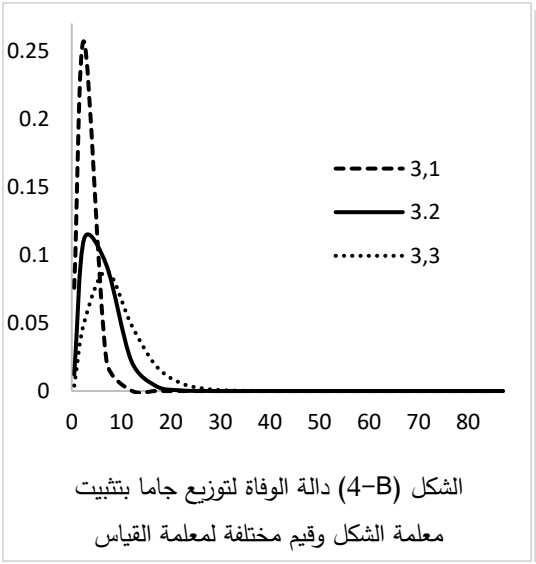
$\Gamma(r) = (r-1)!$ دالة جاما والتي يمكن تعريفها أيضاً وفقاً لمجموع تركيبين $\Gamma(r) = \gamma(r,x) + \Gamma(r,x)$،

الأول $\gamma(r,x)$ دالة جاما غير التامة، والثاني $\Gamma(r,x)$ مكمل دالة جاما

يوضح الشكلين (4-A) و (4-B) دالة كثافة الوفاة لتوزيع جاما، مع قيم فرضية مختلفة لمعلمة الشكل وتثبيت معلمة القياس في الشكل (4-A)، وقيم مختلفة لمعلمة القياس وتثبيت معلمة الشكل في الشكل (4-B)، يلاحظ من الشكل (4-A) أنه عندما تكون قيمة معلمة الشكل أقل أو تساوي الواحد يقترب شكل توزيع جاما من التوزيع الأسي، أما في حالة قيمة معلمة الشكل أكبر من الواحد، فيأخذ منحني جاما شكلاً ملتوياً، حيث يتزايد احتمال الوفاة عند الفئات العمرية الصغيرة والقريبة من خمس سنوات، ثم يبدأ بالانخفاض التدريجي مع تقدم العمر، ويبين الشكل (4-B) أنه كلما زادت قيمة معلمة القياس تطاول منحني دالة الوفاة للتوزيع ، وتزايد العمر الذي يبدأ عنده منحني الدالة بالانخفاض التدريجي.



الشكل (4-A) دالة الوفاة لتوزيع جاما بتثبيت معلمة القياس وقيم مختلفة لمعلمة الشكل



الشكل (4–B) دالة الوفاة لتوزيع جاما بتثبيت معلمة الشكل وقيم مختلفة لمعلمة القياس

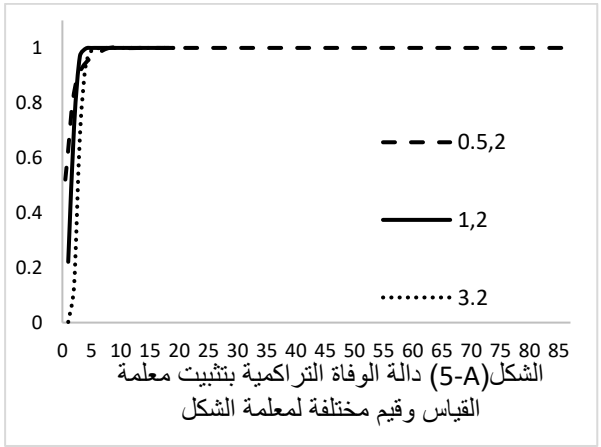
المصدر: تم الرسم من قبل الباحثة بالإستعانة ببرنامج Excel

ونحصل على احتمال الوفاة قبل عمر معين t من دالة الوفاة التراكمية التالية لتوزيع جاما :

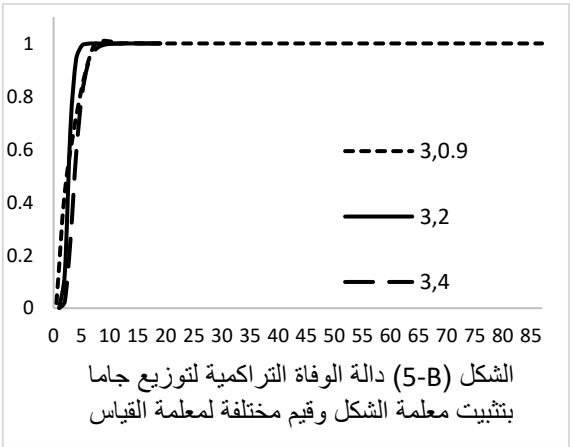
$$F(t)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\theta t}x^{r-1}e^{-x}dx=\frac{\gamma(r,\theta t)}{\Gamma(r)} \quad (5)$$

حيث:$\gamma(r,\theta t)$ هي دالة توزيع جاما غير التامة بمعلمة شكل r ومعلمة قياس θt

يوضح الشكل (5-A) دالة الوفاة التراكمية لتوزيع جاما بقيم مختلفة لمعلمة الشكل وتثبيت معلمة القياس، والشكل (5-B) بقيم مختلفة لمعلمة القياس وتثبيت معلمة الشكل، يبين الشكل (5-A) أنه كلما ازدادت قيمة معلمة الشكل انخفض احتمال الوفاة التراكمي للفئة العمرية الأولى، وتتبع هذه الدالة سلوك متزايد في احتمالات الوفاة التراكمية حتى عمر معين، يبدو في الرسم أقل من خمس سنوات للمنحني ذي معلمة الشكل $r=0.5$ ، وأكثر من خمس سنوات للمنحنيين الباقيين، ثم يتزايد بشكل متقارب جداً وصولاً الى أعلى قيمة له وهي الواحد الصحيح، كما يبين الشكل (5-B) أن احتمالات الوفاة تبدأ بقيم قريبة من الصفر مهما زادت قيمة معلمة القياس، ثم يتزايد تدريجياً وصولاً الى الواحد الصحيح أو أقل منه، كما يُلاحظ أنه كلما زادت قيمة معلمة القياس انخفض احتمال الوفاة التراكمي للفئات العمرية.



الشكل(5-A) دالة الوفاة التراكمية بتثبيت معلمة القياس وقيم مختلفة لمعلمة الشكل



الشكل (5-B) دالة الوفاة التراكمية لتوزيع جاما بتثبيت معلمة الشكل وقيم مختلفة لمعلمة القياس

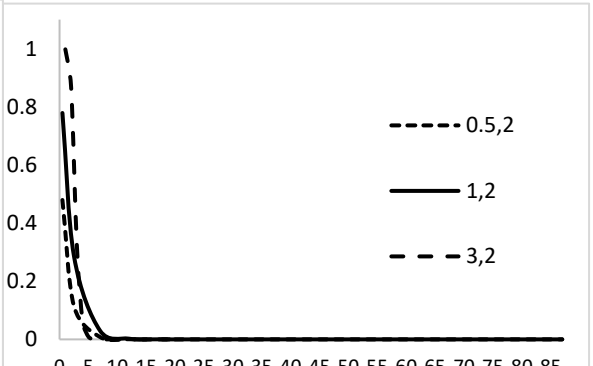
المصدر: تم الرسم من قبل الباحثة بالإستعانة ببرنامج Excel

ونحصل على احتمال بقاء شخص على قيد الحياة بعد بلوغه العمر t عن طريق دالة البقاء لتوزيع جاما الآتية:

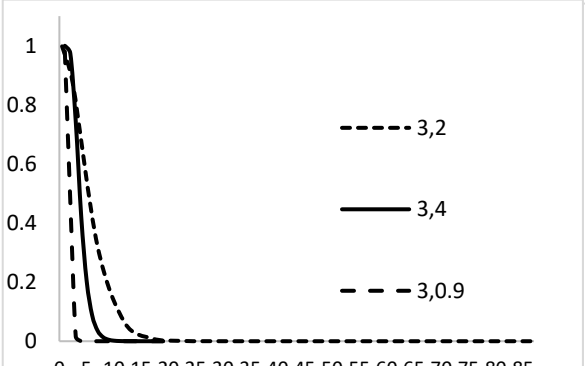
$$S(t) = 1 - F(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{\theta t}^{\infty} x^{r-1}\, e^{-x} dx = \frac{\Gamma(r, \theta t)}{\Gamma(r)} \quad (6)$$

حيث: $\Gamma(r, \theta t)$ مكمل دالة جاما بمعلمة شكل r ومعلمة قياس θt.

يوضح الشكل (6-A) دالة البقاء لتوزيع جاما بقيم مختلفة لمعلمة الشكل وتثبيت معلمة القياس، ويوضح الشكل دالة البقاء لتوزيع جاما بقيم مختلفة لمعلمة القياس وتثبيت معلمة الشكل (6-B)، يلاحظ من الشكل (6-A)أنه كلما ازدادت قيمة معلمة الشكل انخفض احتمال البقاء للفئة العمرية الأولى، ولكن سلوك دالة البقاء متناقص حتى عمر معين، ثم يتناقص بشكل متقارب جداً مقترباً من الصفر، كما يلاحظ من الشكل (6-B) أن احتمالات البقاء للمنحنيات الثلاثة تبدأ بقيم قريبة من الواحد مهما زادت قيمة معلمة القياس، ثم يتناقص تدريجياً مقترباً من الصفر.



الشكل(6-A) دالة البقاء لتوزيع جاما بقيم مختلفة لمعلمة الشكل وتثبيت معلمة القياس



الشكل(6-B) دالة البقاء لتوزيع جاما بقيم مختلفة لمعلمة القياس وتثبيت معلمة الشكل

3- تقدير معالم التوزيعين باستخدام طريقة العزوم:

تم استخدام طريقة العزوم في تقدير معلمة التوزيع الأسي ومعلمتي توزيع جاما كون هذه الطريقة بسيطة وسهلة في التقدير، والتي تتم عبر استخدام المتوسط بالنسبة للتوزيع الأسي والمتوسط والتباين الاحتمالي بالنسبة لتوزيع جاما.

3-1 تقدير معلمة التوزيع الأسي:

يعطى العزم الأول (التوقع الرياضي) للتوزيع الأسي بالعلاقة التالية:

$$E(t) = \frac{1}{\theta} \quad (7)$$

$$E(t) = \bar{t} \Rightarrow \bar{t} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{t}} \quad (8)$$

بعد ذلك يتم تقدير احتمالات الوفاة من دالة الوفاة للتوزيع الأسي باستخدام معلمة التوزيع الأسي المقدرة، وتقدير احتمالات البقاء من دالة البقاء للتوزيع الأسي بنفس الطريقة.

3-2 تقدير معلمتي توزيع جاما:

يعطى العزم الأول (التوقع الرياضي) والعزم الثاني (التباين) لتوزيع جاما بالعلاقتين التاليتين:

$$E(t) = r.\theta \qquad (9)$$
$$var(t) = r.\theta^2 \qquad (10)$$

وبتعويض $E(t) = \bar{t},\ \ S^2 = var(t)$ في العلاقتين (9) (10)

$$\bar{t} = r.\theta \implies r = \frac{\bar{t}}{\theta} \quad (11)$$

$$S^2 = r.\theta^2 \Longrightarrow S^2 = \frac{\bar{t}.\theta^2}{\theta} \Longrightarrow S^2 = \bar{t}\,.\theta \Longrightarrow \hat{\theta} = \frac{S^2}{\bar{t}} \quad (12)$$

وبتعويض (12) في (11):

$$\hat{r} = \frac{\bar{t}}{\frac{S^2}{\bar{t}}} = \frac{\bar{t}^{\,2}}{S^2} \qquad (13)$$

بعد ذلك يتم تقدير احتمالات الوفاة بتعويض قيمتي معلمتي الشكل والقياس في دالة الوفاة لتوزيع جاما، وتقدير احتمالات البقاء من دالة البقاء لتوزيع جاما بنفس الطريقة.

4- كيفية استخدام التوزيع الأسي وتوزيع جاما في تقدير احتمالات الوفاة واحتمالات البقاء:

تحتوي الدراسة على نموذجين ، الأول وهو نموذج الوفاة، والثاني وهو نموذج البقاء، وفق الصيغتين التاليتين:

$$Q_{t_i} = \widehat{Q_{t_i}} + \varepsilon_{t_i} \qquad (14)$$
$$S_{t_i} = \widehat{S_{t_i}} + \varepsilon_{t_i} \qquad (15)$$

Q_{t_i} احتمال الوفاة الفعلي المعدل للفرد i عند العمر t، ويتم حسابه بقسمة عدد الوفيات الفعلي الذي تم توليده عشوائياً على عدد سكان افتراضي (يساوي 100000في هذه الدراسة) في حال عدم توفر عدد السكان الكلي

$\widehat{Q_{t_i}}$ احتمال وفاة الفرد i عند العمر t ، ويحسب من دالة كثافة الوفاة للتوزيع الأسي وتوزيع جاما الاحتماليين

S_{t_i} احتمالات البقاء الفعلية المعدلة للفرد i عند العمر t، وهي حاصل طرح احتمالات الوفاة المعدلة لكل فئة عمرية من الواحد.

$\widehat{S(t_i)}$ احتمالات بقاء الفرد i عند العمر t على قيد الحياة، ويحسب من دالة البقاء للتوزيع الأسي وتوزيع جاما

ε_{t_i} الخطأ العشوائي بوسط حسابي يساوي الصفر وتباين يساوي الواحد

إنّ مقدرات المربعات الصغرى اللاخطية لنموذج الوفاة هي قيم معلمات دالة الوفاة التي تقلل المقدار إلى أقلّ ما يمكن:

$$SSE_{Q_{t_i}} = \ minimize \sum_{i=1}^{i=n} \left[Q_{t_i} - \widehat{Q_{t_i}}\right]^2 \qquad (16)$$

n عدد الفئات العمرية، SSE مجموع مربعات الأخطاء للنموذج في العلاقة (13) (Sum of Square Error)

إنّ مقدرات المربعات الصغرى اللاخطية لنموذج البقاء هي قيم معلمات دالة البقاء التي تقلل المقدار إلى أقلّ ما يمكن:

$$SSE_{S_{t_i}} = \ minimize \sum_{i=1}^{i=n} \left[S_{t_i} - \widehat{S_{t_i}}\right]^2 \qquad (17)$$

لتتم الاستفادة من دالة الوفاة ودالة البقاء للتوزيع الأسي وتوزيع جاما الاحتماليين، يمكن اتباع الخطوات التالية [2]:

1- تعريف وحساب دالة كثافة الوفاة الفعلية (Q_t)، وذلك بحساب احتمالات الوفاة الفعلية لكل فئة عمرية كما يلي:

$$Q_t = \frac{D_t}{l_0} \qquad (18)$$

D_t عدد الوفيات المقابل لكل فئة عمرية (t)، l_0 عدد سكان افتراضي (100000)

وبذلك نحصل على التوزيع الاحتمالي الفعلي المعدل Q_t لوفيات الفئات العمرية، والذي يتميز بأنه يحقق الشرطين:

$$Q_t \geq 0 \ , \quad \sum Q_t = 1$$

2-تقدير معلمة التوزيع الأسي ومعلمتي توزيع جاما، وفق ما تم شرحه في الفقرة (4)، لاستخدامه في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء عبر دالتيهما المذكورتين في الفقرتين (1) و (2).

3-حساب احتمالات الوفاة المقدرة والمقابلة لكل فئة عمرية t، ليتم الحصول على التوزيع المقدر لاحتمالات الوفاة $\widehat{Q_t}$، كذلك حساب احتمالات البقاء المقدرة $\widehat{S(t)}$ عبر احتمالات الوفاة التراكمية المقدرة وبطرح كل قيمة منها من الواحد

4-مقارنة التوزيع المقدر للوفاة والبقاء مع التوزيع الفعلي للوفاة والبقاء، ودراسة مدى ملائمتهما باستخدام اختبار كولموجورف سميرنوف، ومخطط PP، فإذا كان التوزيع المقدر ملائماً لتوزيع الاحتمالات الفعلية، يتخذ القرار باستخدامه في حساب وتقدير الاحتمالات الإحصائية q_t المنسوبة إلى عدد الباقين على قيد الحياة l_t .

5-حساب احتمالات الوفاة الإحصائية من العلاقة:

$$q_t = \frac{D_t}{l_t} \qquad (19)$$

حيث: l_t عدد السكان الباقين على قيد الحياة

6-يتم الانتقال من الاحتمالات الفعلية Q_t إلى الاحتمالات الإحصائية q_t،حيث يلاحظ من مقارنة العلاقتين (18) و(19) أن البسط مشترك بينهما، لذلك يؤخذ مقلوبيهما ثم الفرق بين المقلوبين:

$$\frac{1}{Q_t} - \frac{1}{q_t} = \frac{l_0}{D_t} - \frac{l_t}{D_t} = \frac{l_0 - l_t}{D_t}$$

ويتضح أنه من الممكن أخذ تقدير الطرفين ليتم الحصول بعد المعالجة على:

$$\frac{1}{\widehat{q_t}} = \frac{1}{\widehat{Q_t}} - \frac{l_0 - l_t}{D_t} \qquad (20)$$

7-أخذ مقلوب العلاقة (20) للوصول إلى الاحتمال الاحصائي المقدر $\widehat{q_t}$ ، ويمثل $\widehat{q_t}$ احتمالات الوفاة المعدلة والمقدرة.

8-طرح كل قيمة في عمود احتمالات الوفاة المعدلة والمقدرة من الواحد للحصول على احتمالات البقاء المعدلة والمقدرة.

5- معيار معلومات أكايكي (AIC) وأكايكي المصحح للمفاضلة بين التوزيع الأسي وتوزيع جاما:

يعدّ معيار أكايكي مقياساً يعكس الجودة النسبية للنماذج الإحصائية لمجموعة معينة من البيانات، حيث يقدر AIC نوعية كل نموذج نسبة إلى كلّ من النماذج الأخرى، ويعتبر أداة مهّمة لاختيار النموذج بناءً على كفاءته أو دقته التنبؤية [8]، لأنّه يفاضل بين النماذج العشوائية للبيانات بين حسن المطابقة وقليل المطابقة تفاضلاً مثالياً، على الرغم

من أنّه يُستخدم للمقارنة بين النماذج المعقدة [9]، لكنّه لا يرجّح النماذج ذات المعالم الكثيرة، التي تنتج فرط مطابقة (overfitting)، حيث يعتمد معيار AIC على النموذج الذي يفسر أكبر قدر ممكن من التباين باستخدام أقلّ عدد ممكن من المتغيرات المستقلة، ويكون النموذج الأفضل حسب معيار AIC هو النموذج الذي يملك أدنى قيمة لهذا المعيار، ويعطى معيار AIC بالعلاقة:

$$AIC = nln(\sigma_e^2) + n + nln(2\pi) + 2K \qquad (21)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y})^2 = \frac{SSE}{n}$$

حيث: n حجم العينة، K عدد معلمات النموذج + (1)، σ_e^2 التباين لبواقي النموذج المحدد

يستخدم معيار معلومات أكايكي المصحح$AICc$ في حالة العينات الصغيرة الحجم كمايلي:

$$AICc = AIC + \frac{2k^2 + 2k}{n - k - 1} \qquad (21)$$

النتائج والمناقشة:

يبين الجدول (1) احتمالات الوفاة الفعلية ضمن فئات عمرية خماسية التي تم توليدها عشوائياً، أما احتمالات البقاء الفعلية فهي ناتجة عن طرح احتمالات الوفاة من الرقم 1 كون أن الاحتمالين متتامين.

جدول (1) احتمالات الوفاة والبقاء الفعلية للنوعين معاً

فئات العمر	احتمالات البقاء للنوعين معاً	احتمالات الوفاة للنوعين معاً
<1	0.978665489	0.021334511
1-4	0.993160698	0.006839302
5-9	0.985549005	0.014450995
10-14	0.981629208	0.018370792
15-19	0.985903915	0.014096085
20-24	0.973784781	0.026215219
25-29	0.977004981	0.022995019
30-34	0.980650221	0.019349779
35-39	0.980726502	0.019273498
40-44	0.978993461	0.021006539
45-49	0.970634285	0.029365715
50-54	0.955009458	0.044990542
55-59	0.932610358	0.067389642
60-64	0.889903251	0.110096749
65-69	0.838741548	0.161258452
70-74	0.763728738	0.236271262
75-79	0.643089586	0.356910414
80-84	0.436594471	0.563405529
85+	0	1

المصدر: تم توليد احتمالات الوفاة عشوائياً باستخدام برنامج R ثم حساب احتمالات البقاء كمتمم لها

تمّ حساب عدد الوفيات في كل فئة عمرية، باعتماد عدد سكان افتراضي (100000)، فلحساب عدد الوفيات للسكان الذين أعمارهم أقل من سنة للنوعين معاً:

$$d < 1 = 100000 * 0.02133451 = 2133.4511$$

ويصبح عدد السكان الباقين على قيد الحياة من عمر سنة حتى أربع سنوات:

$$l_{1-4} = 100000 - 2133.4511 = 97866.5489$$

وسيكون عدد الوفيات للسكان من عمر سنة حتى أربع سنوات للنوعين معاً:

$$d1-4 = 97866.5489 * 0.006839302 = 669.3388836$$

وسيكون عدد الباقين على قيد الحياة من عمر خمس سنوات حتى تسع سنوات

$$l_{5-9} = 97866.5489 - 669.388836 = 97197.21002$$

أما عدد الوفيات من عمر خمس سنوات حتى تسع سنوات

$$d5-9 = 97197.21002 * 0.014450995 = 1404.596396$$

وهكذا حتى نهاية الجدول، كما تم تعديل احتمالات الوفاة الفعلية بقسمة عدد الوفيات التي حصلنا عليها على عدد السكان الافتراضي (100000). كما هو موضح في الجدول رقم (2)

جدول (2) عدد الوفيات الفعلية وعدد الأحياء الفعلي واحتمالات الوفاة الفعلية المعدلة والتراكمية الفعلية المعدلة واحتمالات البقاء الفعلية والمعدلة

الفئات العمرية	D_t عدد الوفيات الفعلية للنوعين معاً	l_t عدد الأحياء الفعلي للنوعين معاً	Q_t احتمالات الوفاة الفعلية بعد التعديل	$F_t = Cum\ P$ احتمالات الوفاة التراكمية الفعلية	S_t احتمالات البقاء على قيد الحياة الفعلية بعد التعديل
<1	2133.4511	100000	0.021334511	0.02133	0.978665489
1-4	669.3388836	97866.55	0.006693389	0.028023	0.9719721
5-9	1404.596396	97197.21	0.014045964	0.042069	0.957926136
10-14	1759.78618	95792.61	0.017597862	0.059667	0.940328274
15-19	1325.494728	94032.83	0.013254947	0.072922	0.927073327
20-24	2430.34303	92707.33	0.02430343	0.097226	0.902769897
25-29	2075.921093	90276.99	0.020759211	0.117985	0.882010686
30-34	1706.671185	88201.07	0.017066712	0.135052	0.864943974
35-39	1667.049595	86494.4	0.016670496	0.151722	0.848273478
40-44	1781.92899	84827.35	0.01781929	0.169541	0.830454188
45-49	2438.688101	83045.42	0.024386881	0.193928	0.806067307
50-54	3626.540504	80606.73	0.036265405	0.230194	0.769801902
55-59	5187.66746	76980.19	0.051876675	0.28207	0.717925228
60-64	7904.123358	71792.52	0.079041234	0.361111	0.638883994
65-69	10302.54439	63888.4	0.103025444	0.464137	0.53585855
70-74	12660.79759	53585.86	0.126607976	0.590745	0.409250574
75-79	14606.57919	40925.06	0.146065792	0.736811	0.263184782
80-84	14827.97615	26318.48	0.148279762	0.88509	0.114905021
85+	11490.50208	11490.5	0.114905021	1	0

المصدر: تمت الحسابات من قبل الباحثة وفق البند (1) من الفقرة (5) في الدراسة

تم التعبير عن العمر (t) بأخذ مراكز الفئات العمرية، وحساب المتوسط والتباين لاحتمالات الوفاة الفعلية بعد التعديل:

$$\bar{t} = \sum Q_t * t = 63.87949, \qquad S^2 = \sum Q_t (t-\bar{t})^2 = 565.6049$$

بعد ذلك جرى تقدير معلمة التوزيع الأسي باستخدام متوسط الأعمار وتعويضه في العلاقة (8)، كما يلي:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{63.87949202} = 0.01565448$$

كما جرى تقدير معلمتي توزيع جاما بتعويض قيمة المتوسط والتباين المقدر، في العلاقتين (12) و(13):

$$\hat{r} = \frac{\bar{t}^{\,2}}{S^2} = \frac{(63.87949202)^2}{565.604938} = 7.21457771$$

$$\hat{\theta} = \frac{S^2}{\bar{t}} = \frac{565.604938}{63.87949202} = 8.854249151$$

يمكن تلخيص قيم تقدير المعالم في الجدول التالي:

جدول (3) قيم المعلمات المقدرة للتوزيع الأسي وتوزيع جاما

المعلمات / التوزيع الاحتمالي	$\hat{\theta}$	$\hat{r}$
التوزيع الأسي	0.01565448	ــــــــــ
توزيع جاما	8.854249151	7.21457771

المصدر: تم الحساب بالاعتماد على العلاقات (8) (12) (13)

تم حساب احتمالات الوفاة والوفاة التراكمية واحتمال البقاء، بتعويض معلمة التوزيع الأسي في العلاقات (1) و(2) و(3)، مع ملاحظة أن احتمالات الوفاة للفئة الأخيرة تم ضربها بالرقم (63) بدلاً من (5)، حتى يصل المجموع الكلي لاحتمالات الوفاة قدر الامكان للواحد، ذلك لأن التوزيع الأسي لم يستطع الوصول بمجموع الاحتمالات التراكمي إلا الى المقدار (0.76)، أي بنقص وقدره (1-0.76=0.24)، هذا النقص ليس بالكبير الا أن طبيعة وشكل التوزيع الأسي الذي يميل الى اقتراب احتمالات الوفاة من الصفر مع تقدم العمر، جعل من الحاجة بمكان أن يتم ضرب الفئة الأخيرة بأكثر من 12 ضعف للاقتراب من الواحد، ليتم تحقيق شرط التوزيع الاحتمالي، كما تم ضرب احتمالات الوفاة التراكمية للفئة الأخيرة بالرقم (1.34) ليصبح مساوياً تقريباً لمجموع احتمالات الوفاة القريبة من الواحد، وهذا يؤثر على فعَالية التوزيع الأسي في الوصول الى احتمالات وفاة وبقاء ملائمة لاحتمالات الوفاة والبقاء الفعلية. وبنفس الأسلوب تم تعويض معلمتي الشكل والقياس لتوزيع جاما في العلاقات(4) و(5) و(6)، وحصلنا على تقدير لاحتمالات الوفاة واحتمالات الوفاة التراكمية واحتمالات البقاء لتوزيع جاما، مع ملاحظة أن احتمالات الوفاة للفئة الأخيرة تم ضربها بالرقم (21) بدلاً من (5) حتى يصل المجموع الكلي لاحتمالات الوفاة للواحد، لأن توزيع جاما لم يستطع الوصول بمجموع الاحتمالات التراكمي إلا للمقدار(0.84)، أي بنقص وقدره (1-0.84=0.16) وهذا راجع لطبيعة وشكل توزيع جاما الذي يميل إلى اقتراب احتمالات الوفاة من الصفر مع تقدم العمر، أدى إلى ضرب احتمالات الوفاة للفئة الأخيرة بأكثر من أربعة أضعاف الرقم الواجب ضربه بها وهو طول الفئة العمرية المساوي للخمسة، وتم ضرب احتمالات الوفاة التراكمية للفئة الأخيرة ب (1.1812) ليصبح مساوياً تقريباً لمجموع احتمالات الوفاة، يتضح مبدئياً أنَ توزيع جاما أكثر فعَالية في تقدير احتمالات البقاء والوفاة من التوزيع الأسي

جدول (4) المتوسط والتباين الاحتمالي لاحتمالات الوفاة الفعلية والمعدلة، واحتمالات الوفاة والوفاة التراكمية والبقاء المقدرة لتوزيع جاما والتوزيع الأسي.

t	S^2	$\bar{t}$	$\widehat{Q_t}Gamma$	$\widehat{F_t}Gamma = CumPGamma$	$\widehat{S_t}Gamma$	$\widehat{Q_t}Exp$	$\widehat{F_t}Exp = CumPExp$	$\widehat{S_t}Exp$
0.5	108.8068	0.010667	1.73008E-12	1.20732E-13	1	0.015532423	0.007796685	0.992203
2.5	32.25129	0.016733	1.21848E-07	1.093E-08	1	0.060214612	0.038380263	0.96162
7	59.18827	0.098322	5.50675E-05	1.181E-05	0.999988	0.070148433	0.103790729	0.896209
12	63.17198	0.211174	0.000892016	0.000353982	0.999646	0.064867134	0.171264068	0.828736
17	39.97172	0.225334	0.004417617	0.002692795	0.997307	0.059983451	0.233657508	0.766342
22	60.55107	0.534675	0.012468354	0.010717072	0.989283	0.055467448	0.291353504	0.708646
27	41.8779	0.560499	0.025310007	0.029248482	0.970752	0.051291443	0.344705714	0.655294
32	27.19019	0.546135	0.04136134	0.0624192	0.937581	0.04742984	0.39404117	0.605959
37	20.32176	0.616808	0.057967818	0.112156022	0.887844	0.043858967	0.439662284	0.560338
42	15.94613	0.74841	0.072449746	0.177637813	0.822362	0.040556936	0.481848699	0.518151
47	15.13778	1.146183	0.0828634	0.25568739	0.744313	0.037503506	0.520859005	0.479141
52	14.38247	1.885801	0.088301801	0.341695252	0.658305	0.034679962	0.556932324	0.443068
57	11.53964	2.95697	0.088819232	0.430643036	0.569357	0.032068995	0.590289773	0.40971
62	7.769615	4.900556	0.085152347	0.517935075	0.482065	0.029654601	0.621135824	0.378864

67	2.488351	6.902705	0.078392752	0.599916108	0.400084	0.027421981	0.649659553	0.35034
72	0.000925	9.115774	0.069707947	0.674080239	0.32592	0.025357449	0.676035803	0.323964
77	3.777528	11.24707	0.060150802	0.73904371	0.260956	0.02344835	0.700426251	0.299574
82	15.08248	12.15894	0.050558737	0.794372989	0.205627	0.021682983	0.722980404	0.27702
87	26.14904	9.996737	0.174400142	0.993293085	0.006707	0.252636626	0.996740926	0.003259
المجموع	565.6049	63.87949	0.993269246			0.993805138		

المصدر: تمت الحسابات وفق ما تم شرحه في الفقرتين (3) و(4) من الدراسة، وتعويضها في علاقات الدوال المذكورة في الفقرتين (1) و(2)

للتأكد من ملائمة التوزيع الأسي وتوزيع جاما لاحتمالات الوفاة والبقاء المحسوبة عن طريقه، جرى تطبيق اختبار كولموجورف سميرنوف على التوزيع الأسي أولاً وفق الفرضيتين:

الفرضية الصفرية: التوزيع الأسي ملائم لاحتمالات الوفاة والبقاء المقدرة عن طريقه

الفرضية البديلة: التوزيع الأسي غير ملائم لاحتمالات الوفاة والبقاء المقدرة عن طريقه

لدى تطبيق اختبار كولموجورف سميرنوف باستخدام برنامج R.4.4.3 حصلنا على النتائج التالية:

#اختبار كولموجورف لاحتمالات الوفاة المقدرة للتوزيع الأسي

> mean(qtexp) [1] 0.05230553

> sd(qtexp) [1] 0.05104184

> KS. Test (qtexp,"pnorm", mean(qtexp), sd(qtexp)

data: qtexp

D = 0.3107, p-value = 0.039

#اختبار كولموجورف سميرنوف لاحتمالات البقاء للتوزيع الأسي

> mean(estimateStexp) [1] 0.5504441

> sd(estimateStexp) [1] 0.2627181

> ks.test(estimateStexp,"pnorm",mean(estimateStexp),sd(estimateStexp))

data: estimateStexp

D = 0.096364, p-value = 0.9871

أعطى الاختبار P-value=0.03975 لاحتمالات الوفاة، وهي أقل من 0.05، مما يعني عدم ملائمة التوزيع الأسي لاحتمالات الوفاة المقدرة عن طريقه، لذلك يتم تعديل احتمالات الوفاة وفق الخطوتين (5) و(6) في الفقرة (5)، ثم طرح كل قيمة منها من الواحد للوصول على احتمالات البقاء المقدرة فقط، وليس لاستخدامها في التقدير لعدم صلاحيتها لذلك، حسب اختبار كولموجورف سميرنوف، كما تم إجراء نفس الاختبار على احتمالات البقاء للتوزيع الأسي كما هو موضح في النتائج أعلاه، وحصلنا على P-value=0.9871 وهي أكبر من 0.05 بكثير مما يدل على ملائمة التوزيع الأسي لاحتمالات البقاء التي من الممكن أن تقدر عن طريقه.

تم اختبار ملائمة توزيع جاما لاحتمالات الوفاة والبقاءعن طريقه، وفق الفرضيتين التاليتين :

الفرضية الصفرية: توزيع جاما ملائم لاحتمالات الوفاة والبقاء المقدرة عن طريقه

الفرضية البديلة: توزيع جاما غير ملائم لاحتمالات الوفاة والبقاء المقدرة عن طريقه

لدى تطبيق اختبار كولموجورف سميرنوف باستخدام برنامج R.4.4.3 حصلنا على النتائج التالية:

اختبار كولموجورف لاحتمالات الوفاة المقدرة لتوزيع جاما#

> mean(qtGamma) [1] 0.05227733 > sd(qtGamma) [1] 0.04509777

> ks.test(qt,"pnorm",mean(qtGamma),sd(qtGamma))

data: qt

D = 0.15626, p-value = 0.6857

اختبار كولموجورف لاحتمالات البقاء لتوزيع جاما#

> mean(estimateStgamma) [1] 0.6977946 > sd(estimateStgamma) [1] 0.3272566

> ks.test(estimateStgamma,"pnorm",mean(estimateStgamma),sd(estimateStgamma))

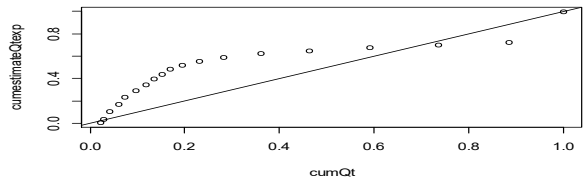
Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: estimateStgamma

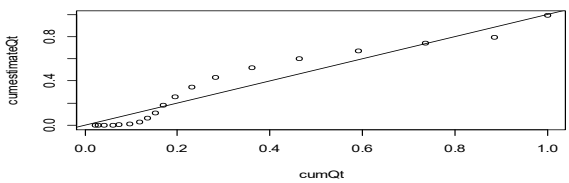
D = 0.19297, p-value = 0.4789

أعطى الاختبار P-value=0.6857 لاحتمالات الوفاة وهي أكبر من 0.05، مما يعني ملائمة توزيع جاما لاحتمالات الوفاة المقدرة عن طريقه، لذلك يمكن تعديله وفق الخطوتين (5) و(6) في الفقرة (5)، كما أعطى P-value=0.4789 لاحتمالات البقاء وهي أكبر من 0.05 ، أي أن توزيع جاما ملائم لاحتمالات البقاء.

تم رسم مخطط PP لاحتمالات الوفاة الفعلية التراكمية بعد التعديل $CumP$ (الموجودة في الجدول 2) ومايقابلها من احتمالات الوفاة المقدرة التراكمية (الموجودة في الجدول 4) لتوزيع جاما$CumPGamma$ والتوزيع الأسي $CumPExp$ ، كما هو موضح في الأشكال التالية:

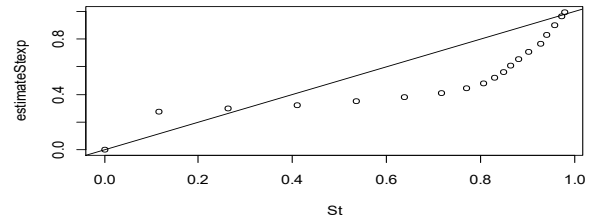


الشكل (A-7) مخطط PP لاحتمالات الوفاة للتوزيع الأسي

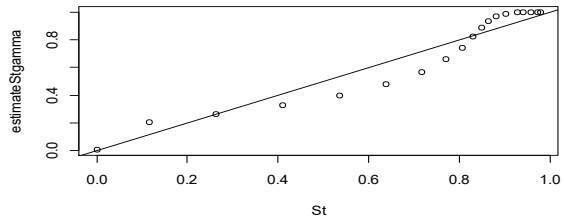


الشكل (B-7)PP مخطط لاحتمالات الوفاة لتوزيع جاما

المصدر: تم الرسم بالاعتماد على احتمالات الوفاة الفعلية التراكمية بعد التعديل من الجدول (2) واحتمالات الوفاة التراكمية المقدرة من التوزيعين المذكورين من الجدول (4) بمساعدة برنامج R.4.2.2



الشكل (A-8) مخطط PP لاحتمالات البقاء للتوزيع الأسي



الشكل (B-8) مخطط PP لاحتمالات البقاء لتوزيع جاما

المصدر: تم الرسم بالاعتماد على احتمالات البقاء على قيد الحياة الفعلية التراكمية بعد التعديل من الجدول (2) واحتمالات البقاء على قيد الحياة المقدرة من التوزيعين المذكورين من الجدول (4) بمساعدة برنامج R.4.2.2

يوضح الشكل (A-7) بُعد نقاط احتمالات الوفاة المقدرة للتوزيع الأسي عن منصف الربع الأول، مما يدل على عدم ملائمة التوزيع الأسي لاحتمالات الوفاة المقدرة، ويلاحظ في مخطط PP لاحتمالات الوفاة بالشكل (B-7) قُرب نقاط احتمالات الوفاة المقدرة لتوزيع جاما من منصف الربع الأول وبعضها يقع عليه، أي أن توزيع جاما يعطي ملائمة أفضل لاحتمالات الوفاة المقدرة، إلا أن هذه الملائمة ليست مثالية في الحقيقة، إذ أن النقاط لا تقع على منصف الربع الأول لكنها قريبة منه

ولكن بشكل غير كبير، مما يعني أن توزيع جاما ملائم لاستخدامه في التعديل وتمثيل احتمالات الوفاة لكنه ليس مثالياً. أما مخططات PP لاحتمالات البقاء الفعلية بعد التعديل S_t (الجدول 2) واحتمالات البقاء المقدرة من توزيع جاما $\widehat{S_t}Gamm$ والتوزيع الأسي $\widehat{S_t}Exp$ (الجدول 4) في الشكلين (A–8) و(B–8)، فيلاحظ فيهما اقتراب توزيع جاما في نقاطه من منصف الربع الاول مقارنة باحتمالات البقاء للتوزيع الأسي رغم صلاحية احتمالات البقاء المقدرة عن طريقه في التمثيل.

تم حساب احتمالات الوفاة والبقاء المقدرة والمعدلة للتوزيع الأسي ولتوزيع جاما بالجدولين (5) و(6) كما يلي:

الجدول (5) اجراءات حساب احتمالات الوفاة المقدرة والمعدلة واحتمالات البقاء المقدرة والمعدلة للتوزيع الأسي

$\widehat{Q_t}exp$	Dt	lt	$1/\widehat{Q_t}exp$	$i0-lt$	$l0-lt/Dt$	$\widehat{1/q_t}exp$	$\widehat{q_t}exp$	$\widehat{S_t}exp$
0.015532423	1553.242	100000	64.38146	0	0	64.38145556	0.015532	0.984468
0.060214612	6021.461	98446.76	16.60726	1553.242	1.42E-05	16.34931353	0.061165	0.938835
0.070148433	7014.843	92425.3	14.25549	7574.704	0.002213	13.17567521	0.075897	0.924103
0.064867134	6486.713	85410.45	15.41613	14589.55	0.06187	13.16698429	0.075948	0.924052
0.059983451	5998.345	78923.74	16.67126	21076.26	0.214415	13.15758578	0.076002	0.923998
0.055467448	5546.745	72925.39	18.02859	27074.61	0.430275	13.14742207	0.076061	0.923939
0.051291443	5129.144	67378.65	19.49643	32621.35	0.70459	13.13643085	0.076124	0.923876
0.04742984	4742.984	62249.51	21.08377	37750.49	1.04308	13.12454477	0.076193	0.923807
0.043858967	4385.897	57506.52	22.80035	42493.48	1.457783	13.11169095	0.076268	0.923732
0.040556936	4055.694	53120.62	24.6567	46879.38	1.966499	13.09779061	0.076349	0.923651
0.037503506	3750.351	49064.93	26.66417	50935.07	2.593691	13.08275855	0.076436	0.923564
0.034679962	3467.996	45314.58	28.8351	54685.42	3.37236	13.06650262	0.076532	0.923468
0.032068995	3206.899	41846.58	31.18277	58153.42	4.346888	13.04892317	0.076635	0.923365
0.029654601	2965.46	38639.69	33.72158	61360.31	5.57714	13.02991246	0.076746	0.923254
0.027421981	2742.198	35674.23	36.4671	64325.77	7.144268	13.00935394	0.076868	0.923132
0.025357449	2535.745	32932.03	39.43614	67067.97	9.15895	12.98712161	0.076999	0.923001
0.02344835	2344.835	30396.28	42.64692	69603.72	11.77307	12.96307919	0.077142	0.922858
0.021682983	2168.298	28051.45	46.11912	71948.55	15.19639	12.9370793	0.077297	0.922703
0.252636626	25263.66	25883.15	3.958254	74116.85	4.695347	1.02452084	0.976066	0.023934
0.993805138	99380							

المصدر: تمت الحسابات من قبل الباحثة وفق ما تم شرحه في الفقرة (5) من الدراسة وبمساعدة برنامج Excel وR4.2.2

الجدول (6) اجراءات حساب احتمالات الوفاة المقدرة والمعدلة واحتمالات البقاء المقدرة والمعدلة لتوزيع جاما

$\widehat{Q_t}Gamma$	Dt	lt	$1/\widehat{Q_t}Gamma$	$i0-lt$	$l0-lt/Dt$	$\widehat{1/q_t}Gamma$	$\widehat{q_t}Gamma$	$\widehat{S_t}Gamma$
1.73008E-12	1.73E-07	100000	5.78E+11	0	0	5.78E+11	1.73E-12	1
1.21848E-07	0.012185	100000	8206958	1.73E-07	1.42E-05	8206958	1.22E-07	1
5.50675E-05	5.506752	99999.99	18159.53	0.012185	0.002213	18159.52	5.51E-05	0.999945
0.000892016	89.20162	99994.48	1121.056	5.518937	0.06187	1120.994	0.000892	0.999108
0.004417617	441.7617	99905.28	226.3664	94.72056	0.214415	226.152	0.004422	0.995578
0.012468354	1246.835	99463.52	80.20305	536.4823	0.430275	79.77277	0.012536	0.987464
0.025310007	2531.001	98216.68	39.51006	1783.318	0.70459	38.80547	0.02577	0.97423
0.04136134	4136.134	95685.68	24.17717	4314.318	1.04308	23.13409	0.043226	0.956774
0.057967818	5796.782	91549.55	17.25095	8450.452	1.457783	15.79317	0.063319	0.936681
0.072449746	7244.975	85752.77	13.80267	14247.23	1.966499	11.83617	0.084487	0.915513
0.0828634	8286.34	78507.79	12.06805	21492.21	2.593691	9.474363	0.105548	0.894452
0.088301801	8830.18	70221.45	11.3248	29778.55	3.37236	7.952437	0.125748	0.874252
0.088819232	8881.923	61391.27	11.25882	38608.73	4.346888	6.911934	0.144677	0.855323
0.085152347	8515.235	52509.35	11.74366	47490.65	5.57714	6.166518	0.162166	0.837834
0.078392752	7839.275	43994.11	12.75628	56005.89	7.144268	5.612013	0.178189	0.821811
0.069707947	6970.795	36154.84	14.34557	63845.16	9.15895	5.186616	0.192804	0.807196
0.060150802	6015.08	29184.04	16.62488	70815.96	11.77307	4.851813	0.206109	0.793891
0.050558737	5055.874	23168.96	19.77898	76831.04	15.19639	4.582584	0.218218	0.781782
0.174400142	17440.01	18113.09	5.73394	81886.91	4.695347	1.038594	0.96284	0.03716
0.993269246	99326.92							

المصدر: تمت الحسابات من قبل الباحثة وفق ماتم شرحه في الفقرة (5) من الدراسة وبمساعدة برنامج Excel وR4.2.2

تم حساب الخطأ العشوائي لنموذجي الوفاة والبقاء للتوزيع الأسي $SSE\widehat{S_t}exp$ وتوزيع جاما$SSE\widehat{Q_t}Gamma$ كما يلي:

الجدول (7) اجراءات حساب الخطأ العشوائي لنموذجي الوفاة والبقاء للتوزيع الأسي وتوزيع جاما

Q_t	S_t	$\widehat{Q_t}exp$	$\widehat{S_t}exp$	$\widehat{Q_t}Gamma$	$\widehat{S_t}Gamma$	$SSE\widehat{Q_t}exp$	$SSE\widehat{S_t}exp$	$SSE\widehat{Q_t}Gamma$	$SSE\widehat{S_t}Gamma$
0.021334511	0.978665489	0.015532423	0.992203	1.73008E-12	1	**3.36642E-05**	**0.000123**	**0.000455161**	**0.000357**
0.006693389	0.9719721	0.060214612	0.96162	1.21848E-07	1	**0.002864521**	**0.000164**	**4.47998E-05**	**0.000655**
0.014045964	0.957926136	0.070148433	0.896209	5.50675E-05	0.999988	**0.003147487**	**0.004116**	**0.000195745**	**0.001566**
0.017597862	0.940328274	0.064867134	0.828736	0.000892016	0.999646	**0.002234384**	**0.013004**	**0.000279085**	**0.003168**
0.013254947	0.927073327	0.059983451	0.766342	0.004417617	0.997307	**0.002183553**	**0.026625**	**7.80984E-05**	**0.004241**
0.02430343	0.902769897	0.055467448	0.708646	0.012468354	0.989283	**0.000971196**	**0.038638**	**0.000140069**	**0.005922**
0.020759211	0.882010686	0.051291443	0.655294	0.025310007	0.970752	**0.000932217**	**0.052514**	**2.07097E-05**	**0.005242**
0.017066712	0.864943974	0.04742984	0.605959	0.04136134	0.937581	**0.00092192**	**0.068344**	**0.000590229**	**0.002314**
0.016670496	0.848273478	0.043858967	0.560338	0.057967818	0.887844	**0.000739213**	**0.084319**	**0.001705469**	**4.64E-05**
0.01781929	0.830454188	0.040556936	0.518151	0.072449746	0.822362	**0.000517001**	**0.099065**	**0.002984487**	**0.002287**
0.024386881	0.806067307	0.037503506	0.479141	0.0828634	0.744313	**0.000172046**	**0.108484**	**0.003419503**	**0.011299**
0.036265405	0.769801902	0.034679962	0.443068	0.088301801	0.658305	**2.51363E-06**	**0.108357**	**0.002707787**	**0.025069**
0.051876675	0.717925228	0.032068995	0.40971	0.088819232	0.569357	**0.000392344**	**0.096508**	**0.001364753**	**0.038132**
0.079041234	0.638883994	0.029654601	0.378864	0.085152347	0.482065	**0.002439039**	**0.068886**	**3.73457E-05**	**0.040556**
0.103025444	0.53585855	0.027421981	0.35034	0.078392752	0.400084	**0.005715884**	**0.035329**	**0.00060677**	**0.031241**
0.126607976	0.409250574	0.025357449	0.323964	0.069707947	0.32592	**0.010251669**	**0.007696**	**0.003237613**	**0.014365**
0.146065792	0.263184782	0.02344835	0.299574	0.060150802	0.260956	**0.015035037**	**0.001152**	**0.007381385**	**0.001152**
0.148279762	0.114905021	0.021682983	0.27702	0.050558737	0.205627	**0.016026744**	**0.025495**	**0.009549399**	**0.004068**
0.114905021	0	0.252636626	0.003259	0.174400142	0.006707	**0.018969995**	**6.67E-07**	**0.003539669**	**1.84E-05**
						0.083550428	**0.838821**	**0.038338078**	**0.191698**

المصدر: تمت الحسابات من قبل الباحثة بتطبيق العلاقتين (16) و(17) من الفقرة (5) وبمساعدة برنامج Excel

أعطى توزيع جاما قيمة للخطأ العشوائي لكل من نموذج الوفاة $(SSE\widehat{Q_t}Gamma = 0.038338078)$ ونموذج البقاء $SSE\widehat{S_t}Gamma = 0.191698$ أقل بكثير مما أعطاه التوزيع الأسي لنموذج الوفاة $SSE\widehat{Q_t}exp = 0.083550428$ ، ونموذج البقاء $SSE\widehat{S_t}exp = 0.838821$، مما يؤكد فعَالية توزيع جاما في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء بشكل أكبر من فعَالية التوزيع الأسي في التقدير.

بتطبيق العلاقتين (20) و(21) نحصل على قيمة معيار أكايكي ومعيار أكايكي المصحح للتوزيعين الاحتماليين المدروسين والنتائج موضحة في الجدول التالي:

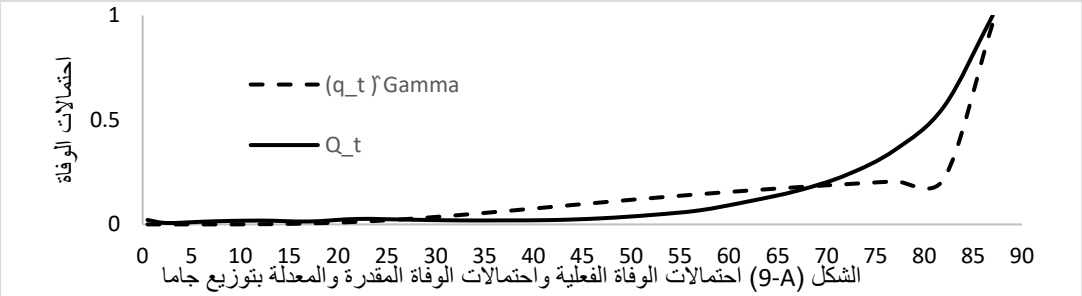
الجدول (8) معيار أكايكي ومعيار أكايكي المصحح لنموذجي الوفاة والبقاء للتوزيع الأسي وتوزيع جاما

التوزيع الاحتمالي / معيار ومعيار أكايكي المصحح	التوزيع الأسي	توزيع جاما
$AIC\widehat{Q_t}$	-45.18846936	-59.9895983
$AICc\widehat{Q_t}$	-44.43846936	-58.3895983
$AIC\widehat{S_t}$	-1.364069819	-29.40953903
$AICc\widehat{S_t}$	-0.614069819	-27.80953903

المصدر: تمت الحسابات من قبل الباحثة بتطبيق العلاقتين (16) و(17) من الفقرة (5) وبمساعدة برنامج Excel

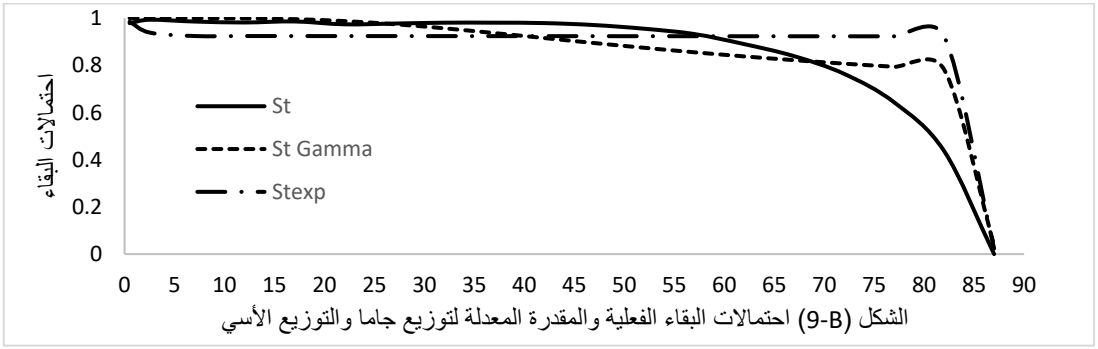
يؤكد معيار أكايكي و أكايكي المصحح فعَالية توزيع جاما في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء مقارنة بالتوزيع الأسي كونهما أعطيا قيم أقل مما أعطاه التوزيع الأسي لاحتمالات الوفاة وأقل بكثير لاحتمالات البقاء

يلاحظ من النظر إلى الشكل (A–9) الذي يوضح احتمالات الوفاة الفعلية واحتمالات الوفاة المقدرة والمعدلة لتوزيع جاما، مدى اقتراب احتمالات الوفاة الفعلية واحتمالات الوفاة المقدرة بشكل كبير حتى العمر 30 عام، واقتراب منطقي حتى عمر 70 عام، وأن الفرق الواضح بين المنحنيين كان بعد العمر 70 حتى 85 عام



الشكل (9-A) احتمالات الوفاة الفعلية واحتمالات الوفاة المقدرة والمعدلة بتوزيع جاما

كما يلاحظ من الشكل (9–B) الذي يوضح احتمالات البقاء الفعلية والمقدرة والمعدلة لتوزيع جاما والتوزيع الأسي، اقتراب احتمالات البقاء المقدرة والمعدلة عبر توزيع جاما من احتمالات الوفاة الفعلية بشكل أكبر مما عليه الحال في احتمالات البقاء المقدرة والمعدلة عبر التوزيع الأسي، كما يتضح تباعد احتمالات البقاء المقدرة في كل من التوزيعين عن احتمالات البقاء الفعلية بعد العمر 70 وحتى 85، مما يؤكد صلاحية كل من التوزيعين في تقدير احتمالات البقاء والوفاة أيضاً حتى العمر 70، وبفعالية أكبر لتوزيع جاما مقارنة بفعالية التوزيع الأسي حسب معيار معلومات أكايكي ومعيار معلومات أكايكي المصحح.



الشكل (9-B) احتمالات البقاء الفعلية والمقدرة المعدلة لتوزيع جاما والتوزيع الأسي

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

1–حقق التوزيع الأسي مجموع لاحتمالات الوفاة التراكمي قدره (0.76)، كما حقق توزيع جاما مجموع لاحتمالات الوفاة التراكمي قدره (0.84)، لذلك لم يستطع كل من التوزيعين الاقتراب من الواحد الصحيح الا بإجراء تعديلات على احتمالات الوفاة للفئة الأخيرة، فيعتبر توزيع جاما أفضل من التوزيع الأسي لكنه ليس مثالياً

2–يوجد أثر ذو دلالة احصائية لطبيعة وشكل التوزيع الاحتمالي على احتمالات الوفاة والبقاء للفئات العمرية الأخيرة، وكان الأثر في التوزيع الأسي أكبر منه في توزيع جاما الاحتمالي.

3–يوجد أثر ذو دلالة احصائية لنوع التوزيع الاحتمالي على القيم التقديرية لاحتمالات البقاء والوفاة للفئات العمرية حيث أعطى توزيع جاما قيم تقديرية أفضل مما أعطاها التوزيع الأسي

4- أعطى التوزيع الأسي عدم ملائمة لاحتمالات الوفاة المقدرة عن طريقه، بالمقابل أعطى ملائمة لاحتمالات البقاء حسب اختبار كولموجورف سميرنوف ومخطط PPplot

5-أعطى توزيع جاما ملائمة لاحتمالات الوفاة والبقاء المقدرة عن طريقه حسب اختبار كولموجورف سميرنوف ومخطط PPplot

6-أظهر توزيع جاما فعَالية كبيرة في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء لسكان سورية لعام 2015، مقارنة بالتوزيع الأسي حسب نموذجي الوفاة والبقاء المقترحين في الدراسة

7-أظهر توزيع جاما فعَالية كبيرة في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء، مقارنة بالتوزيع الأسي حسب معيار أكايكي ومعيار أكايكي المصحح

التوصيات:

1-يمكن استخدام التوزيعات الاحتمالية ومنها توزيع جاما الاحتمالي في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء في سورية لأي عام في حال توفر بيانات فعلية بنفس أسلوب المعالجة، كما يمكن استخدام التوزيع الأسي في تقدير احتمالات البقاء في سورية فيما لم يتم مقارنته بتوزيع جاما

2-يمكن الاستفادة من العمودين الأخيرين في الجدولين (5) و(6) في بناء جداول الحياة لسكان سورية في حال توفر بيانات فعلية ومنه يتم الحصول معدلات الوفيات المركزية للفئات العمرية، وتقدير متوسط العمر المتوقع لكل فئة عمرية

3- يمكن الاستفادة من منهجية الدراسة في تقدير احتمالات الوفاة والبقاء، ولفئات عمرية معينة، ولنوع معين من السكان، أو لتسليط الضوء على جانب معين له أهميته، عند وضع الخطط المستقبلية، لتأمين المستلزمات اللازمة لضمان حالة صحية واجتماعية وتعليمية جيدة لسكان سورية

4-تعتبر طريقة العزوم طريقة سهلة وبسيطة في التقدير وتم استخدامها لتسهيل المعالجة، لكنها ليست بالطريقة المثلى للتقدير، حيث يمكن استخدام طريقة الإمكان الأعظم كونها أدق من طريقة العزوم في عملية تقدير المعلمات.

References:

[1] S.T. Mahmoud, "Using Simulation in Estimating Scale Parameter for Continuous Gamma Distribution", Economic& Administration Journal (in Arabic), Vol. 3, no.12, P:270-285, 2024
[2] H. M. Ntefeh. "Using Probability Distribution in Building Life Table in Syria", (in Arabic), Economic Collage, Lattakia University, Syria,2024.
[3] K. Shukla,. A comparative study of one parameter lifetime distribution " Biometrics & Biostatistics International Journal, Eritrea", Vol. l8, no. 4, P:111-123, 2019
[4] T. Sultana, F. Muhammed and M. Aslam" Estimation of Parameters for the Lifetime Distributions "Journal of Reliability and Statistical Studies", Vol. 12, no. 2, P:77-92,2019
[5] A. H. Hassan, "Programming with R Language" Al-Andalus house for printing and publishing, (in Arabic) Iraq, Bagdad,2019
[6] M.B. Zeina, "Statistical Programming Language R" First Edition, Aleppo University Publications,(in Arabic), Syria, 2017.
[7] A. N. O Connor, M. Modarres and A. Mosleh, "Probability Distribution Used in Reliability Engineering" Center for Risk and Reliability University of Maryland, College Park, Maryland, USA, 2016.
[8] L. Breiman, "Statistical modeling: the two cultures Statistical Science". Vol .16, No. 3, P:199-215, 2001.
[9] K. D. Aho and T. Peterson ”Model selection for ecologists: the worldviews of AIC and BIC ”Ecological Society of America., Vol. 95, No. 3, P: 631-636,2014.