

دراسة تحليلية لانعراج الضوء عبر فتحة دائرية باستخدام التوافقيات الكروية من أجل $n \leq 2$

الدكتور محمود أحمد*

الدكتورة نجاح قبلان**

سمر فيصل عمران***

(تاريخ الإيداع 11 / 11 / 2019. قُبِلَ للنشر في 12 / 7 / 2020)

□ ملخص □

نظراً لأهمية التوافقيات الكروية (Spherical Harmonics) وقابليتها للتطبيق على العديد من المسائل الفيزيائية، تمّ في هذا البحث دراسة نمط انعراج الضوء من خلال فتحة دائرية انطلاقاً من نظرية فريزل للانعراج وحساب مركبات الشدة الضوئية C_0^0, C_1^0, C_2^0 من أجل $(n = 0, 1, 2, m = 0)$ ، بالإضافة إلى حساب الشدة الضوئية على طول المحور البصري استناداً إلى التحليل التوافقي الكروي، حيث تمّ التعبير عن نصف القطر القطبي لنقطة على سطح الفتحة الدائرية المدروسة من مركز الإحداثيات وفق منشور التوافقيات الكروية في فراغ ثلاثي الأبعاد وذلك من أجل $n \leq 2$. وللتحقّق من صحة هذه الطريقة تمت مقارنة الشدة الضوئية التي حصلنا عليها مع الشدة المحورية (axial intensity) الناتجة سابقاً [10].

الكلمات المفتاحية : الشدة الضوئية، التوافقيات الكروية، فتحة دائرية، معادلة تكامل الانعراج، المحور البصري.

* أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - سورية

** أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - سورية

*** طالبة دراسات عليا (دكتوراه) - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - سورية.

(E-mail: samarfaisalomran@tishreen.edu.sy)

An analytical study of diffraction of light by a circular aperture using spherical harmonics for $n \leq 2$

Dr. Mahmoud Ahmad *

Dr. Najah kablani **

Samar Faisal Omran ***

(Received 11 / 11 / 2019. Accepted 12 / 7 / 2020)

□ ABSTRACT □

Given the importance of Spherical Harmonics and its applicability to many physical problems, in this research, the diffraction pattern of light by a circular aperture has been studied starting from Fresnel diffraction theory and the calculation of light intensity compounds C_2^0, C_1^0, C_0^0 for ($n = 0,1,2$, $m = 0$), in addition to the calculation of light intensity along the optical axis based on spherical harmonic analysis, where the polar radius of a point on the surface of the studied circular aperture from the center of the coordinates was expressed according to the Spherical Harmonic expansion in Three-dimensional space for $n \leq 2$. To validate this method, the light intensity obtained was compared with the previously produced axial intensity [10].

Keywords: Optical Intensity, Spherical Harmonics, Circular Aperture, Diffraction Integral Equation, The Optical Axis.

* Professor - Physics Department - Faculty of Science - Tishreen University - Syria

** Professor - Physics Department - Faculty of Science - Tishreen University - Syria

*** PhD Student - Physics Department - Faculty of Science - Tishreen University – Syria
(E-mail: samarfaisalomran@tishreen.edu.sy).

مقدمة:

عرّف كلٌّ من العالمين يونغ وفرينل في بداية القرن التاسع عشر الانعراج على أنه ظاهرة تداخل الضوء مع نفسه، حيث تمّ تفسير هذه الظاهرة بطرق مختلفة وكانت ظاهرة التداخل هي النقطة المشتركة .

قدّم فرينل [1] تفسيراً لظاهرة الانعراج وفقاً لمبدأ هاينغز بمقاربة مستندة على الموجة، وينص مبدأ هاينغز - فرينل [2,3,4,5] (Huygens-Fresnel principle) على أن: كل نقطة من صدر الموجة تُعد منبع ثانوي جديد يُصدر أمواجاً كروية، تتداخل الأمواج الصادرة من هذه المنابع الثانوية والمتناظرة بالنسبة لمركز الثقب النقطة لتشكّل أهداف الانعراج (Diffraction Fringes) التي نشاهدها على شاشة المراقبة، وتطبيق هذا المبدأ يمكننا القول بأن كل نقطة من الفتحة تمثّل مصدر نقطي، وبناءً على ذلك يكون نمط الانعراج هو نتيجة للتداخل البناء والهدّام للموجات المختلفة المتولدة عن هذه المصادر النقطية.

تمّ تصنيف ظاهرة الانعراج في أحد نوعين إمّا انعراج فرينل (Fresnel diffraction) أو انعراج فرانهورفر (Fraunhofer diffraction)، اقتصر اهتمام انعراج فرينل على ما يحدث للضوء في الجوار المباشر لفتحة الانعراج أو العائق ويُعرف ذلك باسم المجال القريب (near-field) أي مصدر الضوء قريب من فتحة الانعراج وبالتالي يُعدّ انعراج فرينل مفيداً في تطبيقات عديدة منها البصريات الرقمية (digital optics)، البصريات الليفية (fiber optics)، المجاهر ذات المجال القريب (near-field microscopy)، من جهة أخرى يختص انعراج فرانهورفر بدراسة نمط انعراج الحقل البعيد (far-field diffraction) وذلك لأنّ شاشة المراقبة والمصدر يقعان على مسافات كبيرة جداً (غير محددة) من عنصر الانعراج ولديه الكثير من التطبيقات المستخدمة في تصميم الأجهزة البصرية.

حُسبت الشدة الضوئية من قبل العديد من الباحثين من أجل فتحات بأشكال مختلفة، حيث قدّم Saad, et al [6] تحليلاً نظرياً للحل العام لمعادلة الموجة المحورية المنعرجة بواسطة محور حلزوني وذلك باشتقاق عبارات السعة وتوزعات الشدة لمجال الموجة المنعرجة تحليلاً باستخدام طريقة الطور الثابت بالإضافة إلى إجراء حسابات عددية لإظهار تغيرات الشدة في الاتجاهات الطولية والعرضية.

أجرى KRAUS [7] مقارنة بين صيغتي انعراج كيرشوف وهاينغز - فرينل من أجل الموجات الكروية الواردة على فتحة دائرية وذلك باستخدام مستوي الفتحة كسطح تكامل لأحدهما واستخدام صدر الموجة المارة من الفتحة كسطح تكامل للآخر وتركز الاهتمام الرئيسي على منطقة الانعراج القريبة جداً من الفتحة الدائرية، تبيّن أنّ العلاقات المستخدمة لتحديد عدد فرينل (Fresnel number)، الذي يعتبر معياراً للتمييز بين مناطق انعراج فرينل وفرانهورفر، مهمة في هذه المنطقة القريبة، كما قام باستنتاج صيغة تكامل انعراج هاينغز - فرينل من أجل موجات كروية واردة باستخدام عامل انحراف كيرشوف، الناتج عن اشتقاق صيغة انعراج كيرشوف - فرينل للأمواج الكروية، بالإضافة إلى اعتبار صدر الموجة كسطح للتكامل بدلاً من مستوي الفتحة، وأنجز حسابات التكامل العددية الدقيقة لدراسة حالة الانعراج عن فتحة دائرية وذلك في المجال القريب جداً من الفتحة .

كما قدم ACOSTA & REINO [8] طريقة لدراسة توزع الشدة للحزمة الغاوصية (Gaussian beam) المنعرجة عن فتحة دائرية وذلك في وسط غير متجانس للحصول على العبارة التحليلية لمجال الانعراج في شروط توابع ببسل (Bessel functions) .

درس UMUL [9] آلية انتشار موجة مستوية بطريقة كيرشوف (Method of Kirchhoff) وأخذ مشتق تابع غرين الكروي (the Spherical Green's Function) دون أي تقريب بالحساب، وقام بتطبيق ذلك على فتحة عبارة عن نصفين: نصف يمرر الضوء ونصف أسود لا يمرره، فتوصل إلى نتيجة مفادها أن استخدام تابع غرين الكروي يمنع حدوث موجات وهمية .

استناداً إلى الدراسات المرجعية السابقة، قمنا في هذا البحث بحساب الشدة الضوئية الناتجة عن انعراج موجة صادرة عن فتحة دائرية باستخدام التحليل التوافقي الكروي من أجل $n \leq 2$ ثم مقارنة مع الشدة المحسوبة سابقاً [10] وذلك بعد التصحيح الذي أجريناه على الإحداثي البصري u والذي نتج عنه توسيع نطاق تطبيق تقريب فرينل (Fresnel Approximation) (FA) المقترح من قبل Rutt & Steane [11] اللذان قاما بدراسة النظرية العامة لانعراج وانتشار الضوء واهتما بشكل خاص بالفتحات الدائرية والمستطيلة المضاء بانتظام.

أهمية البحث وأهدافه:

أهمية البحث:

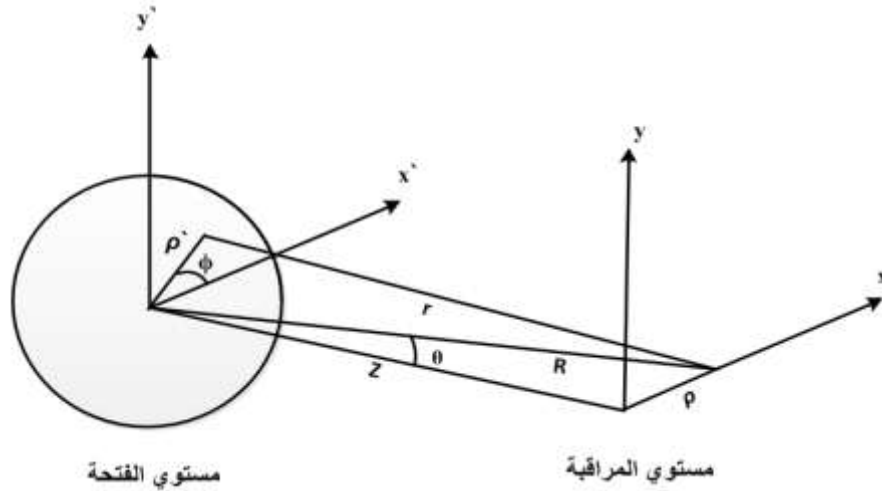
تكمن أهمية البحث في اعتباره طريقة جديدة لدراسة مسائل الانعراج الأكثر تعقيداً وحساب الشدة الضوئية باستخدام التوافقيات الكروية (Spherical Harmonic (SH)، بالإضافة إلى إمكانية تطبيق الطريقة المدروسة هنا من أجل مراتب أعلى $n \geq 3$ ، وهذا يفيد في تحسين أداء عمل الأجهزة البصرية في التطبيقات المختلفة .

أهداف البحث: يهدف هذا البحث إلى ما يلي:

1. دراسة انعراج الضوء عبر فتحة دائرية انطلاقاً من نظرية فرينل .
2. حساب مركبات الشدة الضوئية C_0^0, C_1^0, C_2^0 من أجل $(n = 0, 1, 2, m = 0)$.
3. حساب الشدة الضوئية على طول المحور البصري باستخدام التحليل التوافقي الكروي .
4. مقارنة النتائج التي توصلنا إليها مع النتائج الموجودة في دراسات مرجعية سابقة .

طرائق البحث ومواده:

تُعد معادلة انعراج سمر فيلد- رايلي الأولى [4,3] نقطة الانطلاق الأساسية لهذا العمل، من خلال كتابة صيغة هذه المعادلة من أجل فتحة دائرية مضاءة بموجة مستوية، ثم ننشر الحد r في معادلة تقريب فرينل (FA) Fresnel Approximation على شكل سلسلة قوى للحصول على الإحداثيات البصرية u, v, w ومن ثم حساب التكاملات في العلاقة الناتجة للحصول على الشدة المحورية.



الشكل (1): الشكل الهندسي لانعراج موجة مستوية عن فتحة دائرية.

هندسة التجربة لها أهمية كبيرة في دراستنا، حيث يمثل الشكل (1) هندسة الانعراج لموجة ضوئية وحيدة اللون منعرجة عن فتحة دائرية. يوجد علاقة وثيقة بين بارامترات هذا الشكل وظاهرة الانعراج. البارامتر الأكثر أهمية هو حجم الفتحة الدائرية، حيث تصبح الحدود العظمى للشدة أضيق وأحدّ مع زيادة حجم الفتحة. كما تعتبر المسافة Z بين الفتحة الدائرية وشاشة المراقبة بارامتر هام جداً لأنه يحدّد شروط الانتقال بين أنماط الانعراج المختلفة. بالإضافة إلى ذلك تمثل (ρ, ρ) : إحداثيات شعاعية اسطوانية (cylindrical radial coordinates) في مستوي الفتحة ومستوي المراقبة على التوالي، r : البعد بين النقطة المدروسة في الفتحة ومستوي المراقبة، ϕ : زاوية محصورة بين المحور x' والإحداثي الشعاعي ρ ، θ : زاوية الانعراج، $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$: الإحداثيات الديكارتية في مستوي الفتحة ومستوي المراقبة على التوالي.

إذا افترضنا أنّ لدينا موجات ضوئية تصطدم بشاشة تحتوي فتحة دائرية. نلاحظ أنّ الضوء ينتشر فقط من المقطع الدائري للفتحة، ومن الواضح أنّ نفس العملية تحدث في العين، المجهر، التيلسكوب، عدسات الكاميرا وغيرها. ننطلق من معادلة انعراج سمر فيلد- رايلي الأولى من أجل حساب الشدة الضوئية التي تُعطى بالصيغة الآتية [4,3]:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint U(\dot{x}, \dot{y}, 0) \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{z}{r}\right) \left(ik + \frac{1}{r}\right) d\dot{x}d\dot{y} \quad (1)$$

حيث k : العدد الموجي (wave number) $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ ، λ : الطول الموجي (wave length)، $U(x, y, z)$: تُعبّر عن المجال المنعرج، $U(\dot{x}, \dot{y}, 0)$: تمثل سعة الموجة الضوئية المنعرجة عن الفتحة الدائرية.

$$r = [z^2 + (x - \dot{x})^2 + (y - \dot{y})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

تُعطى الصيغة السابقة من أجل فتحة دائرية مُضاءة بموجة مستوية بالصيغة الرياضية الآتية:

$$U(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 A^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{z}{r}\right) \left(ik + \frac{1}{r}\right) d\phi \rho d\rho \quad (3)$$

حيث A : سعة الحقل الكهربائي المُعبّر عن الموجة الضوئية المستوية الساقطة على الفتحة الدائرية.

يُعبّر عن r (البعد بين النقطة المدروسة في الفتحة ومستوي المراقبة) بالشكل:

$$r = [z^2 + A^2\rho^2 + A^2\dot{\rho}^2 - 2A^2\rho\dot{\rho} \cos \phi]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

نشر r في حدّ الأس على شكل سلسلة قوى مع الاحتفاظ بالحددين الأول والثاني فقط، نحصل على العلاقة الآتية:

$$r = \left[z^2 \left(1 + \frac{A^2 \rho^2}{z^2} + \frac{A^2 \dot{\rho}^2}{z^2} - \frac{2A^2 \rho \dot{\rho} \cos \phi}{z^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= z \left(1 + \frac{A^2 \rho^2}{2z^2} + \frac{A^2 \dot{\rho}^2}{2z^2} - \frac{A^2 \rho \dot{\rho} \cos \phi}{z^2} \right) \quad (5)$$

تمّ اختيار R من الشكل الهندسي (1) كما يلي:

$$R^2 = z^2 + A^2 \rho^2 \quad (6)$$

نعوض العلاقة (6) في العلاقة (4) نحصل على العبارة الآتية:

$$r = R \left(1 + \frac{A^2 \dot{\rho}^2}{2R^2} - \frac{A^2 \rho \dot{\rho} \cos \phi}{R^2} \right) \quad (7)$$

نحصل بعد ضرب طرفي العلاقة (7) بـ k (العدد الموجي) على العبارة الآتية:

$$kr = kR \left(1 + \frac{A^2 \dot{\rho}^2}{2R^2} - \frac{A^2 \rho \dot{\rho} \cos \phi}{R^2} \right) = kR + \frac{k A^2 \dot{\rho}^2}{2R} - \frac{k A^2 \rho \dot{\rho} \cos \phi}{R}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k A^2}{R} \dot{\rho}^2 - \frac{k A^2 \rho}{R} \dot{\rho} \cos \phi + kR$$

$$\Rightarrow kr = \frac{1}{2} u \dot{\rho}^2 - v \dot{\rho} \cos \phi + w \quad (8)$$

حيث: u, v, w إحداثيات بصرية (Optical Coordinates) وتُعطى بالشكل:

$$u = \frac{kA^2}{R}, \quad v = \frac{kA^2 \rho}{R}, \quad w = kR \quad (9)$$

تُكتب صيغة المجال المنعرج (the diffracted field) بالصيغة الآتية (علماً أنّه من أجل أبعاد كبيرة عن الفتحة تصبح $R \cong z$):

$$U(\rho, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} A^2 \frac{e^{i(\frac{1}{2}u\dot{\rho}^2 - v\dot{\rho} \cos \phi + w)}}{R} \left(\frac{z}{R}\right) \left(ik + \frac{1}{R}\right) d\phi \dot{\rho} d\rho$$

$$= A^2 \frac{e^{iw}}{R} \left(\frac{z}{R}\right) \left(ik + \frac{1}{R}\right) \int_0^1 e^{\frac{i}{2}u\dot{\rho}^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iv\dot{\rho} \cos \phi} d\phi \dot{\rho} d\rho \quad (10)$$

يمثل التكامل $\int_0^{2\pi} e^{-iv\dot{\rho} \cos \phi} d\phi$ تابع بييسل من المرتبة صفر مضروباً بـ 2π [12-13].

تُصبح العلاقة (10) بالصيغة الآتية:

$$U(\rho, R) = A^2 \frac{e^{iw}}{R} \left(\frac{z}{R}\right) \left(ik + \frac{1}{R}\right) \int_0^1 e^{\frac{i}{2}u\dot{\rho}^2} J_0(v\dot{\rho}) \dot{\rho} d\rho \quad (11)$$

حيث R ثابتة .

يتمثل الهدف الرئيسي للتحليل التوافقي الكروي في نشر نصف القطر القطبي لنقطة على سطح الفتحة الدائرية وحساب المعاملات التوافقية الكروية في السلسلة:

$$\dot{\rho}(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m Y_n^m(\theta, \phi) \quad (12)$$

حيث :

. نصف القطر القطبي لنقطة على سطح الفتحة الدائرية المدروسة من مركزها . $\rho(\theta, \phi)$. $\theta \in [0, \pi]$: الإحداثي القطبي (العرضاني) Polar (Colatitudinal) Coordinate، ويمثل زاوية الانعراج .. $\phi \in [0, 2\pi]$: الإحداثي السمتي (الطولاني) Azimuthal (Longitudinal) Coordinate، ويمثل الزاوية المحصورة بين المحور x ونصف قطر الفتحة المدروسة .. C_n^m : المعاملات التوافقية الكروية المرتبطة المطلوب تحديدها من أجل ($n = 0, 1, 2$, $m = 0$).. $Y_n^m(\theta, \phi)$: التوابع التوافقية الكروية وهي سلسلة من التوابع الخاصة المعروفة على سطح كرة وتُعطى بالعلاقة التالية [13]:

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (13)$$

حيث : $P_n^m(\cos\theta)$: توابع ليجندر Legendre Functions .. n, m : رتبة ودرجة تابع ليجندر الذي يُعبر عنه وفق صيغة رودريغ Rodrigues's formula بالشكل الآتي :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} \left[\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right] \quad (14)$$

يُمثل الجدول (1) عبارات $Y_n^m(\theta, \phi)$ من أجل ($n = 0, 1, 2$, $m = 0$) :

الجدول (1) : جدول التابع التوافقي الكروي المعياري [13]

$Y_n^m(\theta, \phi)$	$(Y_n^m)^*(\theta, \phi) = \frac{1}{(-1)^m} Y_n^{-m}(\theta, \phi)$
$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$(Y_0^0)^*(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$	$(Y_1^0)^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
$Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2(\theta) - 1)$	$(Y_2^0)^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2(\theta) - 1)$

نحصل من أجل ($n = 0, m = 0$) على :

$$\rho_0 = C_0^0 Y_0^0(\theta, \phi) \quad (15)$$

نحصل على المعاملات C_2^0, C_1^0, C_0^0 والتي تمثل مركبات الشدة الضوئية من أجل ($n = 0, 1, 2$, $m = 0$) من العلاقة الآتية:

$$C_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m(\cos^{-n}(\theta)) Y_n^m(\theta, \phi) \right] (Y_n^m(\theta, \phi))^* \sin\theta d\theta d\phi \quad (16)$$

$$C_0^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} C_1^0 - \sqrt{5} C_2^0 \quad (17)$$

$$C_1^0 = -\sqrt{3} C_0^0 + \frac{\sqrt{15} \ln(2)}{4} C_2^0 \quad (18)$$

$$C_2^0 = \frac{2\sqrt{5}}{4} C_0^0 - \frac{\sqrt{15} (\ln(2) - 2)}{16} C_1^0 \quad (19)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل (17), (18), (19)، نحلها بطريقة الحذف بالتعويض [15] فنحصل على العبارات الآتية:

$$\begin{aligned} C_1^0 &= \frac{56}{\sqrt{75}(\ln(2) - 2) - 8\sqrt{3}} C_0^0 \\ \Rightarrow C_1^0 &= M C_0^0 \\ C_2^0 &= \frac{4}{8\sqrt{5} + \sqrt{45}\ln(2)} C_0^0 \\ \Rightarrow C_2^0 &= N C_0^0 \end{aligned} \quad (20) \quad (21)$$

تُعطى الثوابت N, M بالعلاقتين الآتيتين:

$$M = \frac{56}{\sqrt{75}(\ln(2) - 2) - 8\sqrt{3}} \quad (22)$$

$$N = \frac{4}{8\sqrt{5} + \sqrt{45}\ln(2)} \quad (23)$$

تُنشر العلاقة (12) من أجل (n = 0,1,2 , m = 0) بالصيغة الآتية:

$$\rho(\theta, \phi) = C_0^0 Y_0^0 + C_1^0 Y_1^0 + C_2^0 Y_2^0 \quad (24)$$

نحصل بتعويض العلاقات (17) و(20) و(21) في الصيغة السابقة (24) على العلاقة الآتية:

$$\rho(\theta, \phi) = C_0^0 \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} N + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} M \cos(\theta) + 3 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} N \cos^2(\theta) \right] \quad (25)$$

نحصل باشتقاق ρ على العلاقة الآتية:

$$d\rho = C_0^0 \left[-\sqrt{\frac{3}{4\pi}} M \sin(\theta) - 6 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} N \sin(\theta) \cos(\theta) \right] d\theta \quad (26)$$

يُحسب تابع بيسل $J_0(v\rho)$ في العلاقة (11) اعتماداً على القاعدة الآتية (بافتراض أن $x = v\rho$):

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} d\theta \quad (27)$$

$$\Rightarrow J_0(v\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iv\rho \sin \theta} d\theta \quad (28)$$

يُنشر التابع الأسّي $e^{iv\rho \sin \theta}$ في العلاقة (28) حسب متسلسلة القوى الآتية، بافتراض أن $(a = iv\rho \sin \theta)$:

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots \dots \dots \quad (29)$$

$$\begin{aligned} e^{iv\rho \sin \theta} &= 1 + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) - iN \sqrt{\frac{5}{16\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) + iM \sqrt{\frac{3}{4\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad + iN3 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) \cos^2(\theta) \end{aligned} \quad (30)$$

نعوض المنشور (30) في العلاقة (28) ونجري التكامل اللازم، نحصل على تابع بيسل من المرتبة صفر:

$$J_0(v\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) - iN \sqrt{\frac{5}{16\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) + iM \sqrt{\frac{3}{4\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) \cos(\theta) + iN3 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} C_0^0 v \sin(\theta) \cos^2(\theta) \right] d\theta = 1 \quad (31)$$

أيضاً بتطبيق المنشور (29) على الحدّ الأسّي في العلاقة (11) ، نحصل على الناتج التالي:

$$e^{i2u\rho^2} = 1 + i \frac{u}{8\pi} (C_0^0)^2 + i \frac{5u}{32\pi} (C_0^0)^2 N^2 + i \frac{3u}{8\pi} (C_0^0)^2 M^2 \cos^2(\theta) + i \frac{45u}{32\pi} (C_0^0)^2 N^2 \cos^4(\theta) \quad (32)$$

نعوض العلاقات (25) و(26) و(31) و(32) في العلاقة (11)، نحصل على العبارة الآتية:

$$U(\rho, R) = A^2 \frac{e^{iw}}{R} \left(\frac{z}{R} \right) \left(ik + \frac{1}{R} \int_0^\pi \left[1 + i \frac{u}{8\pi} (C_0^0)^2 + i \frac{5u}{32\pi} (C_0^0)^2 N^2 + i \frac{3u}{8\pi} (C_0^0)^2 M^2 \cos^2(\theta) + i \frac{45u}{32\pi} (C_0^0)^2 N^2 \cos^4(\theta) \right] \cdot \left[\frac{C_0^0}{\sqrt{4\pi}} - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} N C_0^0 + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} M C_0^0 \cos(\theta) + 3 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} N C_0^0 \cos^2(\theta) \right] \cdot \left[-\sqrt{\frac{3}{4\pi}} M C_0^0 \sin(\theta) - 6 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} N C_0^0 \sin(\theta) \cos(\theta) \right] d\theta \right) \quad (33)$$

نفك الأقواس في العلاقة (33) ونكامل الحدود على المجال من $(0 \rightarrow \pi)$ ، نحصل على سعة الموجة الضوئية $U(\rho, R)$ الآتية:

$$U(\rho, R) = A^2 \frac{e^{iw}}{R} \left(\frac{z}{R} \right) \left(ik + \frac{1}{R} \right) \left[-\frac{\sqrt{3}}{2\pi} (C_0^0)^2 M - \frac{\sqrt{15}}{2\pi} (C_0^0)^2 MN - i \frac{\sqrt{3}u}{16\pi^2} (C_0^0)^4 M - i \frac{\sqrt{3}u}{16\pi^2} (C_0^0)^4 M^3 - i \frac{14\sqrt{3}u}{64\pi^2} (C_0^0)^4 MN^2 - i \frac{11\sqrt{15}u}{80\pi^2} (C_0^0)^4 M^3 N - i \frac{103\sqrt{15}u}{224\pi^2} (C_0^0)^4 MN^3 - i \frac{\sqrt{15}u}{16\pi^2} (C_0^0)^4 MN \right] \quad (34)$$

نلاحظ في عبارة السعة وجود حدود تخيلية تعبر عن توهين شدة الإضاءة ضمن مجالات محددة وهو ما يظهر على الرسم البياني بشكل واضح.

نربع علاقة السعة السابقة (34)، نحصل على الشدة الضوئية:

$$I(z) = A^4 \left(\frac{z^2}{R^4} \right) \left(k^2 + \frac{1}{R^2} \right) \left[\frac{3}{4\pi^2} (C_0^0)^4 M^2 + \frac{15}{4\pi^2} (C_0^0)^4 M^2 N^2 + \frac{3u^2}{256\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 \right. \\ \left. + \frac{3u^2}{256\pi^4} (C_0^0)^8 M^6 + \frac{588u^2}{4096\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 N^4 + \frac{363u^2}{1280\pi^4} (C_0^0)^8 M^6 N^2 \right. \\ \left. + \frac{3.1715u^2}{\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 N^6 + \frac{15u^2}{256\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 N^2 \right] \quad (35)$$

نحصل على R من الشكل الهندسي (1) :

$$R = \frac{Z}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} \quad (36)$$

تُعطى عبارة الإحداثي البصري u [10] بالشكل الآتي:

$$u = \frac{2kA^2}{Z \left[\left(1 + \frac{A^2}{Z^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]} \quad (37)$$

تُعطى الشدة الضوئية على طول المحور البصري بعد تعويض العلاقاتين (36) و (37) في العلاقة (35) بالصيغة الآتية:

$$I(z) = \left(\frac{k^2 A^4 (1 - \sin^2(\theta))^2}{Z^2} + \frac{A^4 (1 - \sin^2(\theta))^3}{Z^4} \right) \left[F_1 + F_2 \left(\frac{2kA^2}{Z \left[\left(1 + \frac{A^2}{Z^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]} \right)^2 \right] \quad (38)$$

تُعطى علاقة الشدة (38) حسب القاعدة المثلثية الشهيرة $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ بالصيغة الآتية:

$$I(z) = \left(\frac{k^2 A^4 \cos^4(\theta)}{Z^2} + \frac{A^4 \cos^6(\theta)}{Z^4} \right) \left[F_1 + F_2 \left(\frac{2kA^2}{Z \left[\left(1 + \frac{A^2}{Z^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]} \right)^2 \right] \quad (39)$$

تتناسب الشدة الضوئية طردياً مع مربع مساحة الفتحة الدائرية $(\pi A^2)^2$ وعكساً مع مربع بعدها عن مستوى المراقبة Z^2

علماً أنّ الثوابت F_1, F_2 تساوي :

$$F_1 = \frac{3}{4\pi^2} (C_0^0)^4 M^2 + \frac{15}{4\pi^2} (C_0^0)^4 M^2 N^2 \quad (40)$$

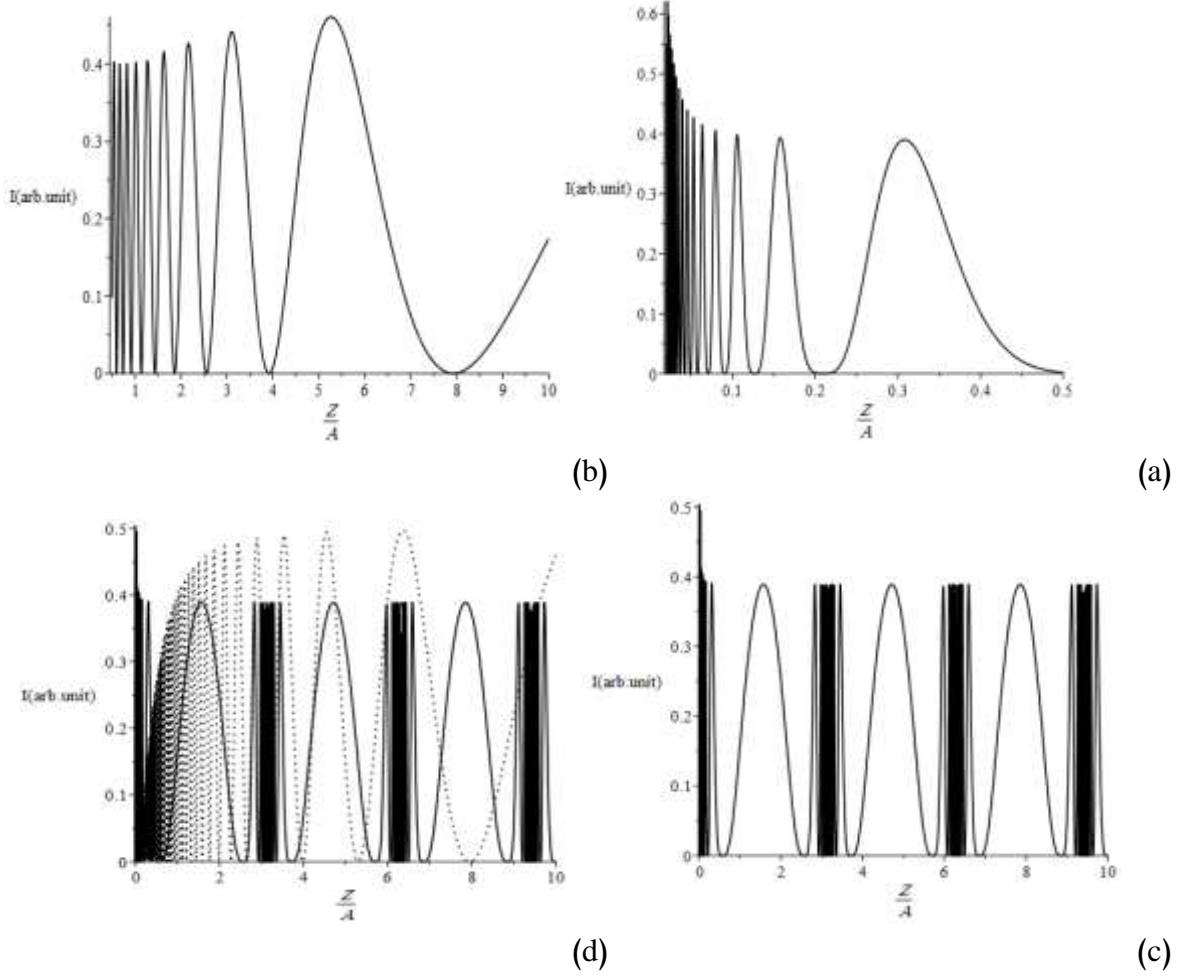
$$F_2 = + \frac{3}{256\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 + \frac{3}{256\pi^4} (C_0^0)^8 M^6 + \frac{588}{4096\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 N^4 \\ + \frac{363}{1280\pi^4} (C_0^0)^8 M^6 N^2 + \frac{3.1715}{\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 N^6 \\ + \frac{15}{256\pi^4} (C_0^0)^8 M^2 N^2 \quad (41)$$

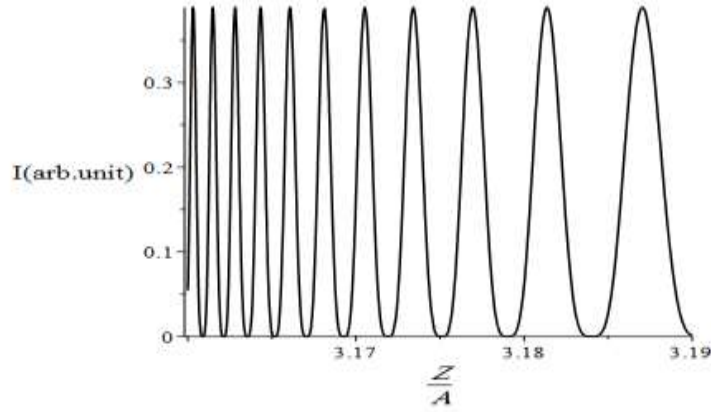
يبين الشكل (2) المقارنة بين الشدة الضوئية على طول المحور البصري (العلاقة (39)) الناتجة عن انعراج موجة مستوية صادرة عن فتحة دائرية باستخدام التوافقيات الكروية من أجل $n \leq 2$ والشدة المحورية الناتجة عن تقريب فريبل [10] من أجل فتحة دائرية مُضاءة بموجة مستوية والمُعطاة بالعلاقة التالية (42) :

$$I(z) = \frac{1}{4} \left[\frac{\left(1 + \frac{A^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}{1 + \frac{A^2}{2z^2}} \right] \times \sin^2 \left(\frac{kA^2}{2z} / \left[\left(1 + \frac{A^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right) \quad (42)$$

النتائج والمناقشة:

قمنا في هذا العمل بحساب الشدة الضوئية على طول المحور البصري انطلاقاً من معادلة انعراج سمر فيلد- رايلي وذلك من أجل فتحة دائرية مضاءة بموجة مستوية، أجرينا الرسم البياني باستخدام برنامج Maple من أجل القيم العددية التالية (Helium-neon laser)، $\lambda=633\text{nm}$ ، $kA=100$ ، $Z = 0.6\text{m}$ ، وحصلنا على الأشكال الآتية:





(e)

الشكل(2): (a): الشدة الضوئية على طول المحور البصري الناتجة عن انعراج موجة مستوية عن فتحة دائرية باستخدام التوافقيات الكروية من أجل $n \leq 2$ ضمن مجال (0-0.5)، (b): الشدة المحورية الناتجة عن تقريب فرينل المعمم [10]، (c): الشدة الضوئية على طول المحور البصري الناتجة عن انعراج موجة مستوية عن فتحة دائرية باستخدام التوافقيات الكروية $n \leq 2$ ضمن مجال (0-10)، (d): الشدة في الحالتين (b) و (c) على نفس المنحني، (e): تكبير للحزمة في الشكل (c). (مع العلم أن مجالات الرسم تم اختيارها استناداً إلى دراسات سابقة ووفقاً لنتائج برنامج Maple).

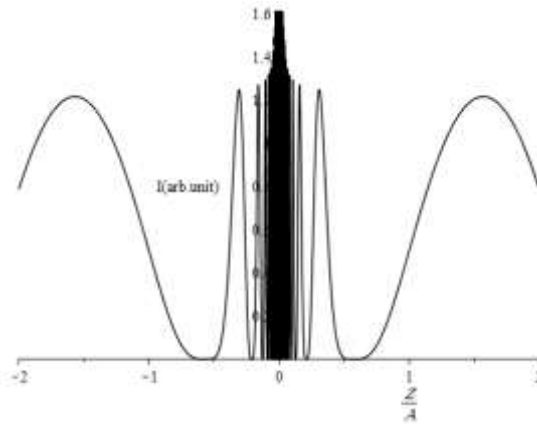
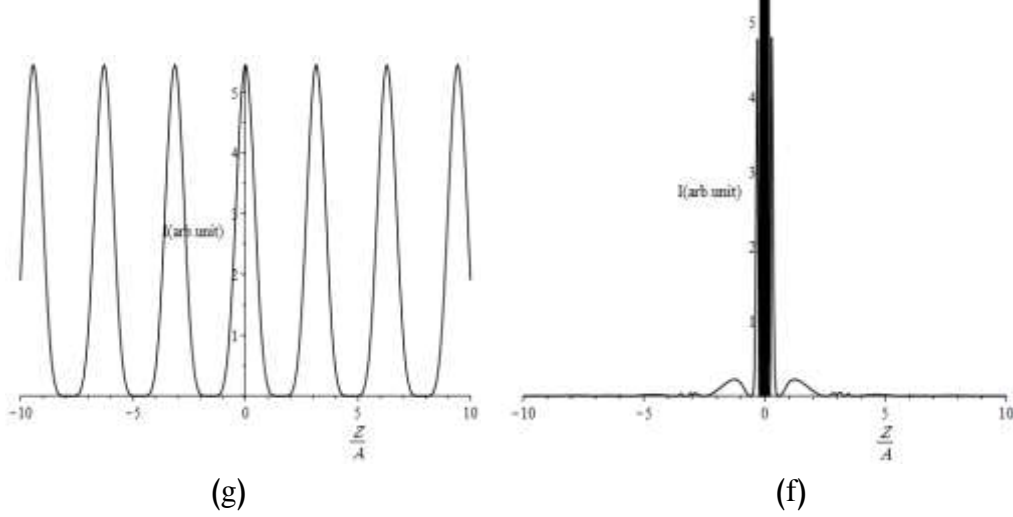
بما أن منحنى توزع شدة الإضاءة هو تمثيل مرئي للضوء المنعرج من الفتحة الدائرية، يمكننا تفسير المنحنيات السابقة بمجموعة من النقاط الآتية:

- نلاحظ أن الشدة في كلتا الحالتين (39) و(42) عبارة عن تغير جيبي، تحتوي علاقة الشدة في الحالة المدروسة سابقاً (42) دالة $\sin(\theta)$ وهي دالة فردية وتتم من مبدأ الإحداثيات أما علاقة الشدة في الحالة المدروسة هنا (39) فتضم دالة $\cos(\theta)$ وهي دالة زوجية ولا تتم من مبدأ الإحداثيات وبذلك نستنتج أن منحنى الشدة الناتجة هنا ينزاح في الطور بمقدار $\frac{\pi}{2}$ عن منحنى الشدة السابقة ويُعطي قيمة عظمى للشدة في الهدب المركزي وهذه النتيجة يمكن إثباتها رياضياً باستخدام منشور تايلور لدالتي الجيب وجيب التمام حيث تبدأ سلسلة دالة $\cos(\theta)$ بالعدد واحد وهو ما يمثل الهدب المركزي المضيء (أي نحصل على شدة عظمى في المركز ثم تتناقص كلما ابتعدنا عن الفتحة الدائرية).

- نلاحظ من الشكلين البيانيين (a) و (b) وجود تقارب كبير بين المنحنيين، تبدو فيها مستويات الشدة متقاربة من بعضها البعض بشكل كبير في بداية المجال ثم تتباعد بعد ذلك أي أن التردد كبير ضمن هذه المنطقة وبالتالي شدة الإضاءة تكون كبيرة في البداية ثم تتناقص كلما ابتعدنا عن الفتحة الدائرية وهذا ما توقعته كل النظريات السابقة أيضاً ولكن يكون هذا التشابه بين المنحنيين ضمن مجالات ضيقة حيث تتباعد منحنيات الشدة [10] في الحالة (b) عن بعضها البعض بشكل كبير كلما كُبر المجال Z/A أما بالنسبة للشدة الضوئية على طول المحور البصري (a) و (c) يتكرر هذا التشابه ضمن مجالات محددة باستمرار مهما تم زيادة المجال Z/A وذلك لأن كل حزمة تظهر في المنحني البياني (c) هي نفسها في الحالة (a) ولكن ضمن مجال محدود من (0-0.5) ويعود تفسير المسافة المتباعدة بين هذه الحزم إلى الحد التخيلي الذي يظهر في بعض حدود علاقة السعة، كما تتأرجح الشدة في الحالة المدروسة هنا باطراد كلما اقتربنا من الهدب المركزي، وهذه النتائج الهامة يمكن تفسيرها بأن الشدة الضوئية التي حصلنا عليها باستخدام التوافقيات الكروية تبدو أكثر انتظاماً وتعطي قدرة تحليلية (قوة فصل) دقيقة حتى مسافات كبيرة عن الفتحة فتبدو

الصور أوضح وأدق مما هي عليه وهذا ما ينعكس بشكل إيجابي على تصميم الأجهزة البصرية التي لها نفس شكل الفتحة الدائرية مثل عدسة الكاميرا أو التلسكوب وغيرها وهو ما يسعى العلم الحديث لتحقيقه نظرياً وتجريبياً .

- نلاحظ في الشكل (c) وجود حزم من الترددات تبدو واضحة في مجالات محددة ومتكررة بانتظام ويعود السبب في ذلك لإدخال التوافقيات الكروية في حساب الشدة الضوئية حيث قمنا بنشر مركبات الشدة فإزداد عدد القمم في الحالة المدروسة هنا عن الحالة السابقة [10] ويبدو هذا الاختلاف واضحاً في الشكل (d)، بالإضافة إلى ذلك عندما نقوم بتكبير أي حزمة من هذه الحزم نحصل على أهداب مضيئة ومظلمة متعاقبة كما يبدو في الشكل (e).



(h)

الشكل (3): (f): مغلف الانعراج للشدة الضوئية على طول المحور البصري، (g): نمط التداخل الناتج، (h): الشدة الضوئية الناتجة في حال اختلاف المسار بين النقطتين المدروستين من الفتحة الدائرية.

- يوضّح الرسم البياني (f) شكل مغلف الانعراج للشدة الضوئية على طول المحور البصري وذلك من أجل $A \ll \lambda$ وزاوية انعراج صغيرة جداً ($\theta \ll 1$)، فتبدو السعة عظمى على مسافة صغيرة جداً عن الفتحة بينما تتناقص كلما ابتعدنا عنها، ويظهر نمط التداخل داخل مغلف الانعراج الذي يبدو واضحاً في الرسم البياني (g).
- إذا قسمنا الفتحة الدائرية إلى مجموعة من النقاط وبافتراض أن المسافة بين كل نقطتين متتاليتين أصغر بكثير من λ ، نحصل على الرسم البياني (h) إذا كان فرق المسير بينهما يساوي عدد صحيح من نصف طول الموجة .

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا العمل دراسة توزع الشدة لحزمة ضوئية وحيدة اللون تتعرج عن فتحة دائرية وذلك في وسط متجانس وتم الحصول على العبارة التحليلية لمجال الانعراج في شروط توابع بيسل وصولاً إلى علاقة الشدة الضوئية باستخدام منشور التوافقيات الكروية في فراغ ثلاثي الأبعاد من أجل $n \leq 2$.

استخدمنا التصحيح السابق [10] الذي أُجري على الإحداثي البصري u بالاعتماد على نظرية فريزل للانعراج الضوئي والذي تم بنتيجة توسيع نطاق تطبيق تقريب فريزل المقترح من قبل Steane و Rutt [11]، كما قمنا بمجموعة من العمليات الحسابية باستخدام منشور التوافقيات الكروية، طبقاً هذه الطريقة في المنطقة المضيئة من المجال القريب إلى المجال البعيد، ويمكن تطبيقها على إضاءة منتظمة (uniform illumination) لفتحة دائرية أو أشعة مركزة أو نقاط هندسية خارج المحور، مع فتحة عددية وقيم محددة لعدد فريزل.

توصلنا في هذه الدراسة إلى أن الحقل في كامل منطقة الإضاءة يُعبّر عنه بشكل تحليلي ضمن شروط التوافقيات الكروية، نوصي بإمكانية تطوير هذه الدراسة من خلال التوسع في نشر التوافقيات الكروية إلى مراتب أعلى $n \geq 3$ وبالتالي يمكن الحصول على نتائج أكثر دقة.

Reference:

- [1]- FRESNEL, M. *Mémoire sur la diffraction de la lumière*. Ann. Chim. Phys. **1**, 1816, 239-281.
- [2]- GOODMAN, J. W. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers, the United States of America, 2005, 491.
- [3]- BORN, M. & WOLF, E. *Principles of Optics*. 5th ed , Pergamon Press, Oxford, 1975, 808.
- [4]- BORN, M. & WOLF, E. *Principles of Optics*. 7th ed , printed in the United Kingdom at the university press, Cambridge, 2003, 936.
- [5]- PEATROSS, J. & WARE, M. *Physics of Light and Optics*. optics.byu.edu, America, 2019, 340.
- [6]- SAAD, C. et al. *A theoretical study of the Fresnel diffraction of Laguerre-Bessel-Gaussian beam by a helical axicon*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.09.068>, Morocco, Vol.149, 2017, 416-422.
- [7]- KRAUS, H. G. *Huygens-Fresnel-Kirchhoff wave-front diffraction formulation: spherical waves*. J. Opt. Soc. Am., America, Vol.6, No.8, 1989.
- [8]- ACOSTA, E. & REINO, C. G. *Fresnel Diffraction of Gaussian Beams by a Circular Aperture in Gradient-index Media*. Journal of Modern Optics, Spain, Vol.38, No.9, 1991, 1659-1672.
- [9]- UMUL, Y. Z. *Fictitious diffracted waves in the diffraction theory of Kirchhoff*. Optical Society of America, America, Vol.27, No.1, 2010, 109-115.
- [10]- Ahmad, M. et al. *Study of the phase limit approximation in the Fresnel diffraction theory*, Journal of Tartous University, Syria, Vol(3), No(2), 2019.
- [11]- STEANE, A. & RUTT, H. *Diffraction calculations in the near field and the validity of the Fresnel approximation*. Optical Society of America, UK, Vol.6, No 12, 1989, 1809-1814.

- [12]- STONE, M. & GOLDBART, P. *Mathematics for Physics*. Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1110 West Green Street, Urbana, Illinois 61801-3080, U.S.A, 2008, 905.
- [13]- ARFKEN, G. B. et al. *MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS*. 7th ed , Academic Press is an imprint of Elsevier, USA, 2013, 1205.
- [14]- ARFKEN, G. B. *MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS*. 6th ed, Elsevier Academic Press, the United States of America, 2005, 965.
- [15]- NOONBURG, V. W. *Differential Equations: From Calculus to Dynamical Systems*. 2th ed. American Mathematical Society, America, 2019, 414.