التراص الناعم من النوع β في الفضاءات التبولوجية الناعمة

الدكتور عدنان ظريف*
نوره العسلي**

(تاريخ الإيداع 6 / 2 / 2020. قُبِل للنشر في 17 / 5 /2020)

□ ملخّص □

في هذا البحث نعرض أولاً مفهوم المجموعات الناعمة و العلاقات فيما بينها (المجموعة الخالية الناعمة، المجموعة الشاملة الناعمة، متممة مجموعة ناعمة، عمليات التقاطع، الاجتماع....الخ)، أيضاً نعرض مفهوم الفضاءات التبولوجية الناعمة و ندرس عدة أنواع من المجموعات المفتوحة الناعمة فيها المجموعة (قبل المفتوحة الناعمة، نصف المفتوحة الناعمة، المفتوحة من النوع β الناعمة)من خلال الأمثلة.
ثانياً نعرض أنماطاً متعددة من التراص الناعم في الفضاءات التبولوجية الناعمة و ندرس العلاقات فيما بينها. أخيراً نقدم خواصاً إضافية للفضاءات الناعمة المتراصة من النوع β و ندرس سلوكها تحت تأثير تطبيقات ناعمة محددة.

الكلمات المفتاحية: المجموعة الناعمة، الفضاء التبولوجي الناعم، التراص الناعم، التراص الناعم من النوع β، الدالة الناعمة المستمرة من النوع β.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** خريجة ماجستير في التبولوجيا – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.

Soft β_Compactnees in Soft Topological Spaces

Dr. Adnan Zarif*
Noura Alasly**

(Received 6 / 2 / 2020. Accepted 17 / 5 /2020)

□ ABSTRACT □

In this paper, first of all-we show the notion of soft sets and its relationhips(null soft set, absolute soft set, complement of a soft set, the operations of union, intersection….etc) Also, we show the notion of soft Topological Spaces, we study many types of soft open sets (soft preopen set, soft semi open set, soft β-open set) with exampels. Second,we show several types of soft Compactness in soft Topological Spaces, and study the relationship between them.
Finally, we investigate more properties of soft β_Compactness in soft Topological Spaces and consider their behaviour under certain soft mapping.

Key Words: soft set, soft Topological Space, soft Compactness, soft β_Compactness, β-soft mapping.

*Associate Professor at Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Postgraduate of MS in Topology, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

لعبت نظرية المجموعات دوراً هاماً في كافة فروع الرياضيات و لا سيما التبولوجيا العامة ، لكنها أبدت قصوراً في حل بعض المسائل التي تتسم نتائجها بحالات الغموض و الشك ما دفع الباحث Molodtsov في العام 1999 [1] إلى طرح نظرية المجموعات الناعمة كأداة رياضية لدراسة هذا النوع من المشاكل العلمية.

مؤخراً ظهرت مقالات بحثية تدرس المفاهيم التبولوجية استناداً إلى المجموعات الناعمة، إذ يقدم الباحث YUMAK في [2] مفهوم التبولوجيا الناعمة و مكونات الفضاء التبولوجي الناعم الناتج من مجموعات ناعمة مفتوحة و مغلقة وفق أنماط متعددة، و في العمل [3] قام الباحث AKDAG بتقديم دراسة حول هذه المكونات و قدم مفهوم الدوال الناعمة و خواصها، أما الباحث BENCHALLI فقدم في العمل [4] دراسة لمفهوم التراص الناعم من النوع β ومفهوم الإغلاق الناعم من النوع β للفضاءات التبولوجية الناعمة.

في هذا البحث نقوم باستكمال الدراسة في مجالي التراص و الإغلاق الناعم من النوع β ونوضح العلاقة بينهما و بين أنماط أخرى من تراص الفضاءات التبولوجية الناعمة.

أهمية البحث و أهدافه:

تكمن أهمية البحث في كونه يقدم فضاءات تبولوجية بالاعتماد على أداة رياضية غير كلاسيكية قادرة على التعامل مع طيف أوسع من المسائل المطروحة.

نهدف في هذا البحث إلى دراسة العلاقة بين أنماط مختلفة من التراص للفضاءات التبولوجية الناعمة و تأثير بعض الدوال عليها.

طرائق البحث و مواده:

اعتمدنا في هذا العمل على مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات الناعمة والفضاءات التبولوجية الناعمة.

1.مفاهيم أساسية:

تعريف (1.1) [1] :

لتكن المجموعة $U \neq \emptyset$ و $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مجموعة من الوسطاء و $A \subseteq E$ و $P(U)$ مجموعة أجزاء U و ليكن التطبيق $F: A \to P(U)$ تعرف المجموعة الناعمة (F, A) على U بالشكل:

$$(F, A) = \{F(e_i), i \in \overline{1,n}\} \subseteq P(U)$$

بكلام آخر المجموعة الناعمة فوق U هي أسرة من المجموعات الجزئية المتعلقة بوسيط و التي يمكن تشكيلها من U.

تعريف (1.2) [1]:

لتكن (F, A) مجموعة ناعمة معرفة على U يرمز لمتممة (F, A) بالرمز $(F, A)^c$ و تعرف كما يلي:

$$F^c: A \to P(U)$$
$$F^c(e) = U - F(e), \forall e \in A$$

تعريف (1.3) [1]:

يقال عن المجموعة الناعمة (F,A) المعرفة على U إنها مجموعة ناعمة خالية و يرمز لها بالرمز Φ إذا تحقق الشرط الآتي: $F(e)=\emptyset, \forall e \in A$

تعريف (1.4) [1]:

يقال عن المجموعة الناعمة (F,A) المعرفة على U إنها مجموعة شاملة ناعمة و يرمز لها بالرمز $\tilde{A}$ إذا تحقق الشرط الآتي: $F(e)=U, \forall e \in A$

تعريف (1.5) [1]:

لتكن المجموعة $U \neq \emptyset$ و $E=\{e_1,e_2,\dots..,e_n\}$ مجموعة من الوسطاء و $A,B \subseteq E$ و ليكن التطبيقان $F:A \to P(U)$ و $G:B \to P(U)$ ، يقال إن المجموعة الناعمة (F,A) محتواة في المجموعة الناعمة (G,B) و نرمز لذلك بالرمز $(F,A) \cong (G,B)$ إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$$(A \subset B) \wedge (F(e) \subset G(e), \forall e \in A)$$

تعريف (1.6) [1]:

لتكن المجموعة $U \neq \emptyset$ و $E=\{e_1,e_2,\dots..,e_n\}$ مجموعة من الوسطاء و $A,B \subseteq E$و ليكن التطبيقان $F:A \to P(U)$ و $G:B \to P(U)$ ، يرمز لاجتماع المجموعتين (F,A) و(G,B) بالرمز: $(F,A) \tilde{\cup} (G,B)=(H,C)$ حيث $H:A \cup B \to P(U)$, $C=A \cup B$

و يعرف بالشكل:

$$(H,C)=\begin{cases} F(e)\ if\ e \in A \\ G(e) if\ e \in B \\ F(e) \cup G(e)\ if\ e \in A \cap B \end{cases}$$

تعريف (1.7) [1]:

لتكن المجموعة $U \neq \emptyset$ و $E=\{e_1,e_2,\dots..,e_n\}$ مجموعة من الوسطاء و $A,B \subseteq E$ و ليكن التطبيقان $F:A \to P(U)$ و $G:B \to P(U)$ ، يرمز لتقاطع المجموعتين (F,A) و (G,B) بالرمز: $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)=(H,C)$ حيث $H:A \cap B \to P(U)$, $C=A \cap B$ و يعرف بالشكل: $(H,C)=F(e) \cap G(e)$

المثال الآتي يبين دور المجموعات الناعمة في مسائل اتخاذ القرار على سبيل المثال في تسويق العقارات:

مثال 1.1:

لتكن $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ مجموعة مؤلفة من 6 عقارات، و لنأخذ المجموعة : $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$ التي تعطي مواصفات هذه العقارات كما يلي:

e_1: باهظ الثمن، e_2: جميل، e_3: خشبي، e_4: رخيص، e_5: ريفي، e_6: إكساء حديث، e_7: قديم مرمم جيداً، e_8: قديم غير مرمم.

المجموعة الناعمة (F,E) تصف جاذبية العقار، حيث:

$$F:E \to P(U)$$
$$F(e_1)=\emptyset, F(e_2)=U$$
$$F(e_3)=\{h_1,h_2,h_6\}, F(e_4)=U$$

$$F(e_5) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_6\}, F(e_6) = \{h_1, h_2, h_6\}$$
$$F(e_7) = \{h_1, h_3, h_6\}, F(e_8) = \{h_2, h_4, h_5\}$$

لتكن $A = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7\}$ مجموعة الأوصاف المرغوبة للعقار من قبل السيد X، و لنضع $h_{ij} = 1$ عندما $h_i \in F(e_j)$ و إلا نضع $h_{ij} = 0$ في التمثيل الجدولي الآتي للمجموعة الناعمة و الذي يسهم بإدخال المعلومات للحاسب مما يسمح بوضع خوارزمية لحل المسالة و برمجتها:

U \ A	e_2	e_3	e_4	e_5	e_7	v_i
h_1	1	1	1	1	1	5
h_2	1	1	1	1	0	4
h_3	1	0	1	1	1	4
h_4	1	0	1	1	0	3
h_5	1	0	1	0	0	2
h_6	1	1	1	1	1	5

لكل عقار h_i نسند القيمة $v_i = \sum_j h_{ij}$ عندئذٍ إن $v_k = max(v_i)$ تشير للخيار المثل للمسألة المطروحة، و وفقاً للمثال السابق يمكن للسيد X اختيار h_1 أو h_6 .

تعريف (1.8) الفضاء التبولوجي الناعم [2]:

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة كيفية، و E مجموعة من الوسطاء و لتكن $\mathcal{T}$ أسرة كيفية من المجموعات الناعمة المعرفة على X، عندئذٍ يقال إن $\mathcal{T}$ تعرف تبولوجيا ناعمة على X إذا تحققت الشروط الآتية:

1. $\tilde{X}, \Phi \in \mathcal{T}$
2. اجتماع أي عناصر من $\mathcal{T}$ هو عنصر منها.
3. تقاطع أي عنصرين من $\mathcal{T}$ هو عنصر منها.

و عندئذٍ تدعى الثلاثية $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، تدعى عناصر $\mathcal{T}$ مجموعات مفتوحة ناعمة و متممة كل منها مجموعة مغلقة ناعمة.

تعريف (1.9) [2]:

ليكن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، و (F, A) مجموعة ناعمة حيث $A \subseteq E$، عندئذٍ:

تدعى (F, A) مجموعة نصف مفتوحة ناعمة إذا كان $(F, A) \cong cl\left(int((F, A))\right)$

تدعى (F, A) مجموعة قبل مفتوحة ناعمة إذا كان $(F, A) \cong int\left(cl((F, A))\right)$

تدعى (F, A) مجموعة مفتوحة من النوع β ناعمة إذا كان $(F, A) \cong cl\left(int(cl(F, A))\right)$

يرمز لأسرة المجموعات نصف المفتوحة الناعمة، قبل المفتوحة الناعمة ، المجموعات المفتوحة من النوع β الناعمة في الفضاء $(X, \mathcal{T}, E)$ بالرمز $SSO(X)$ ، $SPO(X)$ ، $S\beta O(X)$ على الترتيب.

مثال 1.2 :

لتكن $X = \mathbb{N}$ و $E = \{e_1, e_2\}$ و لنعرف التطبيقات $F_i: E \to P(\mathbb{N}), i = \overline{1,4}$ كما يأتي:

$$F_1(e_1) = \{1,2\}, F_1(e_2) = \{2,3\}$$

$$F_2(e_1) = \{1,2,3,4\}, F_2(e_2) = \mathbb{N}$$

$$F_3(e_1) = \{1\}, F_3(e_2) = \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

$$F_4(e_1) = \{1,2,3\}, F_4(e_2) = \{1,2,3,4\}$$

و لنأخذ الأسرة $\mathcal{T}$ التي تعرف تبولوجيا ناعمة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$\mathcal{T} = \{\widetilde{\mathbb{N}}, \Phi, (F_1, E), (F_2, E)\} = \{\widetilde{\mathbb{N}}, \Phi, \{\{1,2\},\{2,3\}\}, \{\{1,2,3,4\}, \mathbb{N}\}\}$$

و منه $\mathcal{F} = \{\widetilde{\mathbb{N}}, \Phi, \{\mathbb{N}\backslash\{1,2\}, \backslash\{2,3\}\}, \{\mathbb{N}\backslash\{1,2,3,4\}, \emptyset\}\}$ عندئذٍ نجد في الفضاء التبولوجي الناعم الناتج $(\mathbb{N}, \mathcal{T}, E)$ أن المجموعة الناعمة $(F_3, E) = \{\{1\}, \mathbb{N}\backslash\{1\}\}$ ليست مجموعة نصف مفتوحة ناعمة وإنما مفتوحة من النوع β ناعمة من كون: $cl(F_3, E) = \widetilde{\mathbb{N}}$ و $int(F_3, E) = \Phi$

و من أجل المجموعة الناعمة $(F_4, E) = \{\{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ نجد أنها مجموعة نصف مفتوحة ناعمة من كون: $int(F_4, E) = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ ثم $cl(int(F_4, E)) = \widetilde{\mathbb{N}}$

و هي مجموعة قبل مفتوحة ناعمة كون $cl(F_4, E) = \widetilde{\mathbb{N}}$.

تعريف (1.10) [3]:

ليكن كل من $(Y, \sigma, \acute{E})$ و (X, τ, E) فضاءً تبولوجياً ناعماً و لتكن الدالة $f: X \to Y$ ، يقال إن f دالة مستمرة من النوع β و ناعمة (محافظة عكسية من النوع β و ناعمة) إذا كانت الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة مفتوحة ناعمة (مفتوحة ممن النوع β ناعمة) في الفضاء Y هي مجموعة مفتوحة من النوع β ناعمة في الفضاء X .

و إذا كانت الصورة المباشرة لكل مجموعة مفتوحة ناعمة (مفتوحة من النوع β ناعمة) في الفضاء X هي مجموعة مفتوحة ناعمة (مفتوحة من النوع β ناعمة) في الفضاء Y فإن الدالة تدعى دالة مفتوحة و ناعمة (مفتوحة من النوع β و ناعمة).

تعريف (1.11) الفضاء التبولوجي االناعم المتراص [4]:

ليكن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، يقال إن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاء تبولوجي ناعم متراص إذا كان من كل تغطية مفتوحة ناعمة للفضاء X يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية لهذا الفضاء.

تعريف (1.12) [4]:

ليكن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، يقال إن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاء تبولوجي ناعم نصف متراص (متراص بقوة، متراص من النوع β) إذا كان من كل تغطية نصف مفتوحة ناعمة (قبل مفتوحة ناعمة، مفتوحة من النوع β ناعمة) للفضاء X يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية لهذا الفضاء.

تعريف (1.13) الفضاء التبولوجي الناعم المغلق من النوع β [4]:

ليكن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، يقال إن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاء تبولوجي ناعم و مغلق من النوع β إذا كان من كل تغطية مفتوحة من النوع β ناعمة للفضاء X مثل $\{(F_i, E), i \in I\}$ نستطيع أن نكتب $X = \bigcup_{i=1}^{n} s\beta cl(F_i, E)$.

تمهيدية (1.1) [2] :

ليكن $(X,\mathcal{T},E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، عندئذٍ الأسرة $\tau_\alpha=\{F(\alpha),(F,A)\in\mathcal{T},\alpha\in E\}$ تعرف تبولوجيا على X.

تعريف (1. 14) الفضاء التبولوجي المنتظم من النوع β^* [3] :

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء منتظم من النوع β^* إذا وجدت فيه لأجل كل مجموعة مغلقة من النوع β مثل F و كل نقطة x لا تنتمي إليها مجموعتان مفتوحتان من النوع β مثل G_x و G_F تحققان:

$$x\in G_x\ ,F\subseteq G_F\ \&\ G_x\cap G_F=\emptyset$$

مبرهنة (1.1) [5] :

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً منتظماً من النوع β^* و A مجموعة مفتوحة من النوع β بحيث إنها فضاء جزئي مغلق من النوع β عندئذٍ تكون المجموعة A متراصة في الفضاء (X,τ).

مبرهنة (1.2) [3]:

ليكن كل من $(Y,\sigma,\acute{E})$ و (X,τ,E) فضاءً تبولوجياً ناعماً و لتكن الدالة $f:X\to Y$ ، إذا كانت f دالة مستمرة و مفتوحة و ناعمة عندئذٍ تكون f دالة محافظة عكسية من النوع β و ناعمة و تتحقق العلاقة $f^{-1}\big(s\beta cl(F,K)\big)=s\beta cl\big(f^{-1}(F,K)\big)$ من أجل كل مجموعة ناعمة (F,K) في الفضاء $(Y,\sigma,\acute{E})$ و حيث $K\subseteq\acute{E}$

النتائج و المناقشة:

ليكن $(X,\mathcal{T},E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، و (F,A) مجموعة ناعمة حيث $A\subseteq E$ ، من التعاريف السابقة تنتج لدينا النتائج الآتية:

نتيجة (2.1): كل مجموعة مفتوحة ناعمة هي مجموعة مفتوحة من النوع β ناعمة فالعلاقة الآتية محققة دوماً $\mathcal{T}\subseteq s\beta O(\tilde{X})$ بالتالي كل فضاء تبولوجي ناعم متراص من النوع β هو فضاء تبولوجي ناعم متراص.

نتيجة (2.2): كل مجموعة قبل مفتوحة ناعمة هي مجموعة مفتوحة من النوع β ناعمة فالعلاقة الآتية محققة دوماً $sPO(\tilde{X})\subseteq s\beta O(\tilde{X})$ و منه كل فضاء تبولوجي ناعم متراص من النوع β هو فضاء تبولوجي ناعم متراص بقوة.

نتيجة (2.3): كل مجموعة نصف مفتوحة ناعمة هي مجموعة مفتوحة من النوع β ناعمة فالعلاقة الآتية محققة دوماً $sSO(\tilde{X})\subseteq s\beta O(\tilde{X})$ ومنه كل فضاء تبولوجي ناعم متراص من النوع β هو فضاء تبولوجي ناعم نصف متراص.

بالتالي نحصل على المخطط الآتي:

$$s\beta_Compact\nearrow{}^{s_{semi\ compact}}_{s_{strongly\ compact}}\searrow{}^{s_Compact}$$

عند البحث في الحالات المعاكسة نجد أنها غير صحيحة بصورة عامة كما توضح الأمثلة الآتية:

مثال 2.1:

لتكن $X=\mathbb{N}$ و $E=\{e_1,e_2\}$ و لنعرف التطبيق $F_i:E\to P(\mathbb{N}),i=1,2$ كما يأتي:

$$F_1(e_1)=\mathbb{N} \qquad F_1(e_2)=\emptyset$$
$$F_2(e_1)=\emptyset \qquad F_2(e_2)=\mathbb{N}$$
$$\mathcal{T}=\left\{\widetilde{\mathbb{N}},\Phi,\{\mathbb{N},\emptyset\},\{\emptyset,\mathbb{N}\}\right\}$$

الأسرة $\mathcal{T}$ تعرف تبولوجيا ناعمة على $\mathbb{N}$ و الفضاء التبولوجي الناعم $(\mathbb{N},\mathcal{T},E)$ هو فضاء ناعم متراص بشكل واضح و لكنه ليس فضاءً ناعماً متراصاً بقوة، لأنه لو عرفنا التطبيق الآتي:

$$G_n: E\to P(\mathbb{N})$$
$$G_n(e_1)=\{n\} \qquad G_n(e_2)=\{n\} \qquad ,n\in\mathbb{N}$$

عندئذٍ (G_n,E) مجموعة ناعمة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ في $(\mathbb{N},\mathcal{T},E)$ و فيه:

$$cl(G_n,E)=\widetilde{\mathbb{N}}\Longrightarrow int\big(cl(G_n,E)\big)=\widetilde{\mathbb{N}}$$

و منه $(G_n,E)\in SPO(\widetilde{\mathbb{N}})$ بالتالي الأسرة $\{(G_n,E),n\in\mathbb{N}\}$ تشكل تغطية قبل مفتوحة ناعمة للفضاء و لا يمكن الحصول منها على تغطية جزئية منتهية له.

أياً كانت (G,E) مجموعة ناعمة مختلفة عن $\widetilde{\mathbb{N}},\Phi$ في الفضاء $(\mathbb{N},\mathcal{T},E)$ فإن: $int(G,E)=\Phi$ و بالتالي $SSO(\widetilde{\mathbb{N}})=\mathcal{T}$ و هذا يعني أن الفضاء السابق هو فضاء ناعم نصف متراص لكنه ليس فضاءً تبولوجياً ناعماً متراصاً من النوع β لأنه فضاء ناعم غير متراص بقوة .

مثال 2.2 :

لتكن $X=\mathbb{N}$ و $E=\{e_1,e_2\}$ و لنعرف التطبيق $F_i: E\to P(\mathbb{N}),i=1,2$ كما يأتي:

$$F_1(e_1)=\{1\} \qquad F_1(e_2)=\mathbb{N}$$
$$F_2(e_1)=\emptyset \qquad F_2(e_2)=\mathbb{N}$$
$$\mathcal{T}=\left\{\widetilde{\mathbb{N}},\Phi,\{\{1\},\mathbb{N}\},\{\emptyset,\mathbb{N}\}\right\}$$

لنعرف التطبيق الآتي:

$$G_n: E\to P(\mathbb{N})$$
$$G_n(e_1)=\{1,2,\dots,n\} \qquad G_n(e_2)=\mathbb{N} \qquad ,n\in\mathbb{N}$$

عندئذٍ (G_n,E) مجموعة ناعمة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ في $(\mathbb{N},\mathcal{T},E)$ و فيه:

$$int(G_n,E)=\{\{1\},\mathbb{N}\}\Longrightarrow cl\big(int(G_n,E)\big)=\widetilde{\mathbb{N}}\Longrightarrow(G_n,E)\in sSO(\widetilde{\mathbb{N}})$$

الأسرة $\{(G_n,E),n\in\mathbb{N}\}$ تشكل تغطية نصف مفتوحة ناعمة للفضاء و لا يمكن الحصول منها على تغطية جزئية منتهية له فهو ليس فضاءً تبولوجياً ناعماً نصف متراص بالرغم من كونه فضاءً تبولوجياً ناعماً متراصاً .

مثال 2.3:

لتكن $X=[-1,1]$ و $E=\{e_1,e_2\}$ و لنعرف التطبيق $F_i: E\to P(\mathbb{N}),i=1,2$ كما يأتي:

$$F_1(e_1)=]-1,0[\qquad F_1(e_2)=]0,1[$$
$$F_2(e_1)=\left]-1,-\frac{1}{2}\right[\qquad F_2(e_2)=\left]0,\frac{1}{2}\right[$$

عندئذٍ الأسرتين $\tau_{e_1}=\left\{X,\emptyset,]-1,0[,\left]-1,-\frac{1}{2}\right[\right\}$ و $\tau_{e_2}=\left\{X,\emptyset,]0,1[,\left]0,\frac{1}{2}\right[\right\}$

تعرفان تبولوجيتين على X و الأسرة :

$$\mathcal{T}=\left\{\tilde{X},\Phi,\{]-1,0[,]0,1[\},\left\{\left]-1,-\frac{1}{2}\right[,\left]0,\frac{1}{2}\right[\right\}\right\}$$ تعرف تبولوجيا ناعمة على X و أسرة المجموعات المغلقة الناعمة في هذا الفضاء هي:

$$\mathcal{F}=\left\{\tilde{X},\Phi,\{[0,1]\cup\{-1\},[-1,0]\cup\{1\}\},\left\{\left[-\frac{1}{2},1\right]\cup\{-1\},[-1,0]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}\right\}$$

لنوجد أسرة المجموعات المفتوحة من النوع β الناعمة، و لإتمام ذلك ينبغي تصنيف كافة التطبيقات الممكن تعريفها من E إلى X كما يأتي:

لتكن $K:E\to P(X)$ تطبيقات معرفة على E إلى X وفق الشروط الآتية

1. $K(e_1)\subseteq\left]-1,-\frac{1}{2}\right]$

$K(e_2)\in P(X)$,عندئذٍ $cl(K,E)=\tilde{X}$ و منه $(K,E)\in s\beta O(\tilde{X})$

2. $K(e_1)\subseteq\left[-\frac{1}{2},0\right]$ عندئذٍ:

$K(e_2)\cap\left]0,\frac{1}{2}\right[\neq\emptyset$ ومنه $cl(K,E)=\tilde{X}$ بالتالي $(K,E)\in s\beta O(\tilde{X})$

$K(e_2)\cap\left]0,\frac{1}{2}\right[=\emptyset$, عندئذٍ :

$cl(K,E)=\left\{\left[-\frac{1}{2},1\right]\cup\{-1\},[-1,0]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ و $int\left(cl(K,E)\right)=\Phi$

3. $K(e_1)\subseteq[0,1]$

$K(e_2)\cap\left]0,\frac{1}{2}\right[=\emptyset$ عندئذٍ:

إما $K(e_2)\subseteq[-1,0]$ عندئذٍ:

$cl(K,E)=\left\{\left[-\frac{1}{2},1\right]\cup\{-1\},[-1,0]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ و $int\left(cl(K,E)\right)=\Phi$

أو $K(e_2)\subseteq\left[\frac{1}{2},1\right]$ عندئذٍ:

$cl(K,E)=\left\{\left[-\frac{1}{2},1\right]\cup\{-1\},[-1,0]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ و $int\left(cl(K,E)\right)=\Phi$

و عليه تكون :

$s\beta O(\tilde{X})=\{\{A,B\},\{C,D\}\}\cup\mathcal{T}$ حيث:

$A,B,C,D\in P(\tilde{X})$، $D\cap\left]0,\frac{1}{2}\right[\neq\emptyset$ و $A\subseteq\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

إن أي أسرة من المجموعات المفتوحة الناعمة يجب أن تضم المجموعة $\tilde{X}$ حتى تشكل تغطية للفضاء فهو فضاء تبولوجي ناعم متراص و لكنه ليس فضاءً تبولوجياً ناعماً متراصاً من النوع β إذ أن الأسرة $\left\{(G_n,E)=\left\{X,\left[\frac{-n}{n+1},\frac{n}{n+1}\right]\right\};n\geq1\right\}$ تشكل تغطية مفتوحة من النوع β ناعمة للفضاء و لا يمكن الحصول منها على تغطية جزئية منتهية له.

نتيجة (2.4):

كل فضاء تبولوجي ناعم متراص من النوع β هو فضاء تبولوجي ناعم و مغلق من النوع β و العكس غير صحيح بصورة عامة كما يبين المثال الآتي:

مثال 2.4 :

لتكن $X=\mathbb{N}$ و $E=\{e_1,e_2\}$ و لنعرف التطبيق $G_n:E\to P(\mathbb{N})$ وفق:

$$G_n(e_1)=\{1,2,\dots\dots,n\}\qquad G_n(e_2)=\mathbb{N}\quad,n\in\mathbb{N}$$

و لنعرف التبولوجيا الناعمة وفق:

$\mathcal{T}=\left\{\tilde{\mathbb{N}},\Phi,\{\{1,2,\dots,n\},\mathbb{N}\}\right\}$ عندئذٍ:

$$\mathcal{F} = \left\{\widetilde{\mathbb{N}}, \Phi, \{\{n+1, n+2, \dots\}, \emptyset\}\right\}$$

ليكن $K: E \to P(\mathbb{N})$ تطبيقاً ما لنناقش الحالتين الآتيتين:

1. $1 \notin K(e_1)$:

إذا كانت $K(e_2) = \emptyset$ فإن:

$$cl(K,E) = \left\{\{max(K(e_1)), max(K(e_1)) + 1, \dots\}, \{\emptyset\}\right\}$$

و منه $int(cl(K,E)) = \emptyset \Longleftarrow (K,E) \notin s\beta O\left(\widetilde{\mathbb{N}}\right)$

و في حالة $K(e_2) \neq \emptyset$ عندئذٍ: $cl(K,E) = \widetilde{\mathbb{N}} \iff (K,E) \in s\beta O\left(\widetilde{\mathbb{N}}\right)$.

2. $1 \in K(e_1)$ عندئذٍ أياً كانت $K(e_2) \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ فإن:

$$cl(K,E) = \widetilde{\mathbb{N}} \Longleftarrow (K,E) \in s\beta O\left(\widetilde{\mathbb{N}}\right) .$$

في حالة $K(e_2) = \emptyset$ فإن $cl(K,E) = \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ و عليه تكون

$$int(cl(K,E)) = \emptyset \Longleftarrow (K,E) \notin s\beta O\left(\widetilde{\mathbb{N}}\right)$$

بالتالي :

$A, B, C, D \in P(\mathbb{N})$ حيث: $s\beta O(\tilde{X}) = \{\{A,B\},\{C,D\}\} \cup \mathcal{T}$ تحقق أن:

$1 \notin A, B, D \neq \emptyset, 1 \in C$

إن أي تغطية مفتوحة من النوع β ناعمة للفضاء الناتج ستحوي مجموعة واحدة على الأقل (K_i, E) بحيث إنها مفتوحة من النوع β ناعمة فيها العدد 1 و عندئذٍ $s\beta cl(K_i, E) = \widetilde{\mathbb{N}}$ و هذا يعني أن الفضاء الناتج هو فضاء تبولوجي ناعم مغلق من النوع β و ليس فضاءً ناعماً متراصاً من النوع β.

المبرهنات التالية تدرس بعض الخواص التبولوجية للفضاءات الناعمة:

مبرهنة (2.1):

ليكن $(X, \mathcal{T}, E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً، حيث $E = \{e_1, e_2, \dots\dots, e_n\}$، وبحيث أن $\left(X, \tau_{e_i}\right)$ فضاء منتظم من النوع β^* ، و لتكن (F,E) مجموعة مفتوحة ناعمة من نقاطه بحيث إن $\mathrm{F}(e_i)$ فضاء جزئي مغلق من النوع β في $\left(X, \tau_{e_i}\right)$ لكل $1 \leq i \leq n$ عندئذٍ إن المجموعة (F,E) تشكل فضاءً ناعماً متراصاً.

إثبات:

لتكن $\{(H,E)_j, j \in J\}$ تغطية مفتوحة ناعمة كيفية للمجموعة (F,E) في الفضاء $(X, \mathcal{T}, E)$ لدينا $(H,E)_j = \{H_j(e_1), H_j(e_2), \dots\dots, H_j(e_n)\}$ مجموعة مفتوحة ناعمة بالفرض بالتالي $H_j(e_i) \in \tau_{e_i}$ لكل $1 \leq i \leq n$ ، بما أن $(F,E) \cong \cup_{j \in J}(H,E)_j$ فإن

$\mathrm{F}(e_i) \subseteq \cup_{j \in J} H_j(e_i)$ و هذا يعني أن الأسرة $\{H_j(e_i), j \in J\}$ تشكل تغطية مفتوحة وبالتالي مفتوحة من النوع β للمجموعة $\mathrm{F}(e_i)$ في الفضاء $\left(X, \tau_{e_i}\right)$ المنتظم من النوع β^* وكون المجموعة المفتوحة $\mathrm{F}(e_i)$ فضاءً جزئياً مغلقاً من النوع β بالتالي حسب المبرهنة (1.1) تكون المجموعة $\mathrm{F}(e_i)$ متراصة في $\left(X, \tau_{e_i}\right)$ و هذا يقتضي $F(e_i) \subseteq \cup_{j=1}^{n} H_j(e_i)$ لكل $1 \leq i \leq n$ و منه:

$(F,E) \cong \left\{\cup_{j=1}^{n_1} {H_j}^1, \cup_{j=1}^{n_2} {H_j}^2, \dots, \cup_{j=1}^{n_k} {H_j}^n\right\}$ و بوضع

$m = max\{n_i, 1 \leq i \leq k\}$ نجد:

$$(F,E) \cong \left\{\left(\cup_{j=1}^{n_1} {H_j}^1\right) \cup \left(\cup_{n_1 \le j \le m} \emptyset\right), \left(\cup_{j=1}^{n_2} {H_j}^2\right) \cup \left(\cup_{n_2 \le j \le m} \emptyset\right), \dots, \left(\cup_{j=1}^{n_k} {H_j}^n\right) \cup \left(\cup_{n_k \le j \le m} \emptyset\right)\right\}$$

و منه: $(F,E) \cong \cup_{j=1}^{m}\left({H_j}^1, {H_j}^2, \dots \dots, {H_j}^n\right) = \cup_{j=1}^{m}(H,E)_j$ و هذا يعني أن (F,E) تشكل فضاءً متراصاً ناعماً.

مبرهنة (2.2):

ليكن $\tilde{X} = (X,\mathcal{T},E)$ فضاءً تبولوجياً ناعماً بحيث إنه فضاء مغلق من النوع β و لتكن (F,E) مجموعة مفتوحة من النوع β ناعمة عندئذٍ يكون الفضاء (F,E) فضاءً جزئياً ناعماً مغلقاً من النوع β .

إثبات:

لتكن $\{(H,E)_j, j \in J\}$ تغطية مفتوحة من النوع β ناعمة كيفية للمجموعة (F,E) في الفضاء $(X,\mathcal{T},E)$ أي أن $(F,E) \cong \cup_j((H,E)_j)$ ، لدينا

$$\tilde{X} = (F,E) \cup \left(\tilde{X} \setminus (F,E)\right) \cong \bigcup_j((H,E)_j) \cup \left(\tilde{X} \setminus (F,E)\right)$$

لكن بحسب الفرض إن $\tilde{X}$ فضاء ناعم مغلق من النوع β أي $\tilde{X} = \cup_{j=1}^{n} \beta cl\left((H,E)_j\right)$ و كون $\tilde{X} \setminus (F,E)$ مجموعة مغلقة من النوع β ناعمة فإن $\beta cl\left(\tilde{X} \setminus (F,E)\right) = \tilde{X} \setminus (F,E)$

و منه: $\tilde{X} = (F,E) \cup \left(\tilde{X} \setminus (F,E)\right) \cong \cup_{j=1}^{n} \beta cl\left((H,E)_j\right) \cup \left(\tilde{X} \setminus (F,E)\right)$

$(F,E) \cong \cup_{j=1}^{n} \beta cl\left((H,E)_j\right)$ و هذا يعني أن الفضاء (F,E) فضاء جزئي ناعم مغلق من النوع β .

مبرهنة (2.3):

ليكن كل من $(Y,\sigma,\acute{E})$و (X,τ,E) فضاءً تبولوجياً ناعماً و لتكن $f: X \to Y$ دالة غامرة و مستمرة من النوع β وناعمة، عندئذٍ إذا كان X فضاءً تبولوجياً ناعماً متراصاً من النوع β فإن Y فضاء تبولوجي ناعم متراص.

إثبات:

لتكن $\{(G_i,K), i \in I\}$ تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة الناعمة للفضاء Y أي :

$Y = \cup_{i\in I}(G_i,K)$ عندئذٍ يكون $f^{-1}(Y) = \cup_{i\in I} f^{-1}(G_i,K)$

و بحسب كون f دالة مستمرة من النوع β ناعمة، فإن $f^{-1}(G_i,K)$ مجموعة مفتوحة من النوع β ناعمة في X وبالتالي $\{f^{-1}(G_i,K), i \in I\}$ تغطية من المجموعات المفتوحة من النوع β الناعمة للفضاء X ، و كون X فضاء ناعم متراص من النوع β بالفرض فإن :

$X = \cup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i,K)$ و منه

$f(X) = f(\cup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i,K)) = \cup_{i=1}^{n} f\left(f^{-1}(G_i,K)\right) = \cup_{i=1}^{n}(G_i,K)$ و بما أن f غامرة فإن $Y = \cup_{i=}^{n}(G_i,K)$ **أي أن** Y فضاء ناعم متراص.

مبرهنة (2.4):

ليكن كل من $(Y,\sigma,\acute{E})$و (X,τ,E) فضاءً تبولوجياً ناعماً و ليكن $f: X \to Y$ تقابلاً مستمراً من النوع β و مفتوحاً من النوع β و ناعماً، عندئذٍ إذا كان Y فضاءً ناعماً و مغلقاً من النوع β فإن X فضاء ناعم و مغلق من النوع β.

إثبات:

لتكن $\{(G_i,K), i\in I\}$ تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة الناعمة للفضاء X أي $X=\cup_{i\in I}(G_i,K)$ بأخذ الصور المباشرة للطرفين وفق f :

$f(X)=\cup_{i\in I} f(G_i,K)$ و منه $Y=\cup_{i\in I}(G_i,K)$ فالأسرة $\{f(G_i,K), i\in I\}$ تشكل تغطية مفتوحة من النوع β ناعمة من النوع للفضاء Y و كون فضاء ناعم و مغلق من النوع β فإن:

$f^{-1}(Y)=f^{-1}\left(\cup_{i=1}^{n} s\beta cl\big(f(G_i,K)\big)\right)$ بالتالي: $Y=\cup_{i=1}^{n} s\beta cl\big(f(G_i,K)\big)$

$X=\cup_{i=1}^{n}\left(f^{-1}\left(s\beta cl\big(f(G_i,K)\big)\right)\right)$ و بحسب المبرهنة (1.2) يكون لدينا:

$$X=\cup_{i=1}^{n} s\beta cl\left(f^{-1}\big(f(G_i,K)\big)\right)=\cup_{i=1}^{n} s\beta cl(G_i,K)$$

و منه إن X فضاء ناعم و مغلق من النوع β.

الاستنتاجات و التوصيات:

قمنا في هذا العمل بدراسة العلاقة بين الفضاءات التبولوجية االناعمة المتراصة و الناعمة نصف المتراصة و الناعمة المتراصة بقوة و الفضاءات الناعمة المتراصة، و حصلنا على المخطط:

$$s\beta_Compact \nearrow s_{semi\ compact} \searrow \quad s_Compact \nearrow$$
$$\qquad\qquad \searrow s_{strongly\ compact} \nearrow$$

و قدمنا أمثلة تبين أن الحالات المعاكسة غير صحيحة بصورة عامة، و تم إيجاد الشروط التي تجعل من المجموعات الجزئية من فضاء تبولوجي ناعم فضاءً تبولوجياً ناعماً متراصاً و الشروط التي تجعل من المجموعات الجزئية من فضاء تبولوجي ناعم و مغلق من النوع β فضاءً تبولوجياً ناعماً و مغلقاً من النوع β، كما بينا ان الصورة المباشرة لفضاء تبولوجي ناعم و متراص من النوع β وفق دالة غامرة و مستمرة من النوع β و ناعمة هي فضاء تبولوجي ناعم و متراص، كذلك بينا أن الصورة العكسية وفق تقابل مستمر من النوع β و مفتوح من النوع β و ناعم لفضاء تبولوجي ناعم و مغلق من النوع β هي فضاء تبولوجي ناعم و مغلق من النوع β

نوصي بإيجاد الشروط اللازمة و الكافية لتكافؤ الأنماط المختلفة من التراص للفضاءات التبولوجية الناعمة.

Reference:

[1]. MAJ. P.K ,BISWAS. R ,ROY. A.R, *Soft Set Theory*, Computers And Mathematics With Applications, 45(2003) 555-562.

[2]. YUMAK. Y, .KAYMAKER. A.K., *Soft β-Open Sets and Their Applications*, Jornal of New Theory, 4(2015) 80-89.

[3]. AKDAG. M, OZKAN. A, *On Soft β-Open Sets And Soft β-Continuous Functions*, The Scientific World Jornal, 4(2014)1-6.

[4]. BENCHALLI. S.S, PATIL. P.C, DODAMANI. A.S, *Some Properties Of Soft β-Compact And Related Soft Topological Spasces*, Italian Jornal Of Pure and Applied Mathematics,N.38(2017) 487-496.

[5] .Al-Asali, Noura., Study in the open groups of type β and compact spaces, Master Thesis, Tishreen University, 2017.