إيجاد حلول دقيقة متنوعة لمعادلة زيلدوفيتش وفق معنى الاشتقاق الكسري المحافظ ذات الأمثال الثابتة

د. سامي انجرو *

(تاريخ الإيداع 11 / 2 / 2020. قُبِل للنشر في 14 / 6 /2020)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول دقيقة صريحة لمعادلة زيلدوفيتش التفاضلية الجزئية الكسرية ذات الأمثال الثابتة وفق معنى الاشتقاق الكسري المحافظ، باستخدام طريقة تعويض معادلة ريكاتي التفاضلية العادية وطريقة التكامل الأول لـ*Feng*. نحصل باستخدام هاتين الطريقتين على ثلاثة أنواع من الحلول التحليلية القطعية والمثلثية الدورية العقدية تبعاً للأمثال، وحلول كسرية. إن الطريقتين فعالتان وموثوقتان ويمكن استخدامها كبديل لإيجاد حلول جديدة لأنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية المطبقة في الفيزياء الرياضية.

الكلمات المفتاحية: معادلة زيلدوفيتش – طريقة التكامل الأول – معادلة ريكاتي – تحويل موجي – معادلة تفاضلية جزئية كسرية غير خطية – الاشتقاق الكسري المحافظ.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

البريد الالكتروني:s.injrou@tishreen.edu.sy

Finding Various Exact Solutions for Zeldovich Equation in the Sense of Conformable Fractional Derivative with Constant Coefficients

Dr. Sami Injrou *

(Received 11 / 2 / 2020. Accepted 14 / 6 /2020)

□ ABSTRACT □

This research aims to find explicit exact solutions for fractional partial differential Zeldovich equation with constant coefficients in the sense of conformable fractional derivative, by using the substitution Ricatti ordinary differential equation method and Feng's first integral method. These two methods give three types of analytical solutions, complex hyperbolic solutions, and complex trigonometric solutions and rational solutions according to the coefficients. The two methods are efficient and reliable, and its can be used as an alternative to establish new solutions of different types of fractional differential equations applied in mathematical physics.

Keywords: Zeldovich equation - first integral method – Ricatti equation – wave transform - nonlinear fractional partial differential equations - conformable fractional derivative.

* **Associated Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
E- mail: s.injrou@tishreen.edu.sy

مقدمة

على الرغم من أن مفهوم الاشتقاق الكسري يرجع إلى ما يزيد عن 300 عام، إلّا أنه في القرون الأخيرة أخذ دور الحساب التفاضلي الكسري والتكامل الكسري يزداد بسبب مساحة التطبيق الواسعة له في مختلف المجالات بما في ذلك مسألة الانتشار السكاني والاحتراق ومعالجة الإشارة وفيزياء البلازما والألياف البصرية والشبكات الكهربائية ... [1–6]. وبشكل خاص أثبتت النماذج ذات مرتبة الاشتقاق غير الصحيحة أهمية كبيرة في وصف العديد من المقاييس مثل المقياس النانوي nanoscale والمقياس المجهري microscale . ونتيجة لهذه الفائدة، استقطبت المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية اهتمام العديد من الباحثين الرياضيين، إذ اقترحوا تعريفات مختلفة للاشتقاق الكسري مثل تعريف ريمان–ليوفيل وتعريف كابوتو ...[7–10]، لكن معظم أنواع المشتقات الكسرية لا تحقق الخواص الكلاسيكية للاشتقاق مثل قاعدة الجداء وقاعدة القسمة وقاعدة السلسلة، انظر على سبيل المثال [11].

تم في الآونة الأخيرة تقديم تعريف جديد للمشتق الكسري بواسطة Khalil وآخرون في [12]، يسمى بالمشتق الكسري المحافظ conformable fractional derivative ويحقق الخواص الكلاسيكية للمشتق المذكورة أعلاه. بسبب الأهمية الكبيرة للحلول الدقيقة للمعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية في فهم الظواهر الفيزيائية غير الخطية، حاول العديد من الباحثين تقديم حلول دقيقة لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية وفق تعريف الاشتقاق الكسري المحافظ، إذ قام Aminikhah وآخرون في عام 2016 في [13] باستخدام طريقة تعويض المعادلة لإيجاد حلول دقيقة لمعادلة الموجة الطويلة المنظمة Regularized Long-Wave، كما قدم Cenesiz وKurt في [14] في العام ذاته حلول دقيقة لمعادلة advection-diffusion ومعادلة التلغراف باستخدام تحويل كسري عقدي، كذلك في عام 2017 أعطى Ali وNuruddeen في [15] حلول تحليلية دقيقة لمعادلة Benney-Luke باستخدام طريقة كودرياشوف وطريقة tanh. وفي عام 2018 قدم Al-Shawaba وآخرون في [16] حلول ذات موجة منعزلة وأخرى دورية لمعادلة KdV-ZK باستخدام طريقة (G'/G)، وفي العام نفسه استخدم Korkmaz وآخرون في [17] طريقة Sine-Gordon لإيجاد حلول دقيقة لمعادلات من صف Regularized Long-Wave ، كما قام في [18] وفي العام ذاته Koyunlu وآخرون بتقديم حلول تبولوجية أحادية السوليتون لمعادلة Modified Equal Width ومعادلة Klein-Gordon، أما Zafar وأخرون فقد قدموا حلول سوليتونية صريحة لمعادلة Modified Equal Width باستخدام طريقة tanh في [19]، وفي عام 2019 قام Eslami وTalaghani في [20] بحل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية باستخدام طريقة التحويل التفاضلي، وفي ذات العام قدم Hafiz Uddin وآخرون في [21] حلول تحليلية دقيقة لمعادلة Regularized Long-Wave باستخدام طريقة (G'/G,1/G) ، وأخيراً في عام 2020 استخدم Tayyan وSakka في [22] طريقة زمرة Lie لحل عدد من المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية.

تعود معادلة زيلدوفيتش التفاضلية الجزئية ذات مرتبة الاشتقاق الصحيحة إلى الباحث Zildovich في عمليه [24،23]، وتأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2(1-u) \tag{1}$$

وتصف هذه المعادلة عملية الاحتراق، إذ يمثل $u(x,t)$ درجة الحرارة بينما يمثل الحد الآخر في الطرف الأيمن توليد الحرارة الناتجة عن الاحتراق، ودرست هذه المعادلة بشكل واسع في [25]، ثم ظهرت معادلة زيلدوفيتش التفاضلية الجزئية ذات مرتبة الاشتقاق الصحيحة وذات الأمثال الثابتة في بحث Korkmaz في [26]، ولها الشكل الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+p\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+qu^2+ru^3=0 \qquad (2)$$

حيث $u\left(x,t\right)$ هي الدالة المجهولة، و p معامل الانتقال و q و r معاملين خاصين يلعبان دوراً هاماً في مسألة النمو السكاني [27]، إذ قدم Korkmaz في [27] حلول عقدية لها مستخدماً معادلة Sine–Gordon التفاضلية الجزئية كمعادلة مساعدة، وقام Injrou في [28] بتقديم حلول لهذه المعادلة لكن مع أمثال متحولة تابعة للزمن باستخدام طريقة tanh، أما الشكل الكسري من معادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال الثابتة فيأخذ الشكل الآتي:

$${}_tT_\alpha u+p_{xx}T_{2\alpha}u+qu^2+ru^3=0,\ \ 0<\alpha\le 1 \qquad (3)$$

حيث ${}_tT_\alpha$ و ${}_xT_\alpha$ هما المشتق الكسري المحافظ بالنسبة للمتحول x وبالنسبة للمتحول t على الترتيب، الذي سنستعرض تعريفه لاحقاً، وعندما $\alpha=1$ نحصل على معادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال الثابتة (2)، وعندما $\alpha=1$ و $p=-1,\ q=-1,r=1$ نحصل على معادلة زيلدوفيتش (1). سنتناول في هذا البحث مسألة إيجاد حلول دقيقة لمعادلة زيلدوفيتش ذات مرتبة الاشتقاق الكسرية بالنسبة للزمن t والمكان x وذات الأمثال الثابتة (3) باستخدام طريقة تعويض معادلة ريكاتي التفاضلية العادية التي قدمها Li وHe في [29،30]، إذ يتم اجراء تحويل على المتغيرات فتتحول المعادلة التفاضلية الكسرية إلى معادلة تفاضلية عادية ذات مرتبة اشتقاق صحيحة، وتعتمد هذه الطريقة على مبدأ موازنة التجانس [31] وعلى كتابة الحل ككثيرة حدود متحولها حل لمعادلة ريكاتي التفاضلية العادية. كما سنستخدم طريقة التكامل الأول لـ Feng في [32]، إذ تبحث هذه الطريقة أيضاً عن حلول ذات موجة منتشرة، وتتجلى فكرتها في بناء تكامل أول بأمثال عبارة عن كثيرات حدود باستخدام مبرهنة القسمة.

أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول دقيقة لمعادلة زيلدوفيتش التفاضلية الجزئية الكسرية وفق تعريف المشتق الكسري المحافظ ذات الأمثال الثابتة باستخدام طريقتي تعويض معادلة ريكاتي والتكامل الأول، يعد هذا البحث غاية في الأهمية لما يقدمه من مجموعة متنوعة من الحلول ذات الطبيعة الموجية وغير الموجية، إذ يمكن أن تساهم في فهم وتفسير بعض الظواهر الفيزيائية غير الخطية وبشكل خاص ذات المقاييس المجهرية أو النانوية.

طرائق البحث ومواده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية الكسرية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية وحل جمل المعادلات الجبرية غير الخطية وبرامج الحسابات الرياضية الصيغية.

النتائج والمناقشة:

1- تعاريف ومفاهيم أساسية

تعريف المشتق الكسري المحافظ [12]:

بفرض أن $f:[0,\infty)\to \mathbb{R}$ تابع مستمر، لكن ليس من الضروري أن يكون قابل للمفاضلة، عندئذ يعرّف المشتق الكسري المحافظ للتابع f من المرتبة α بالعلاقة الآتية:

$$T_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-f\left(t\right)}{\varepsilon}, \tag{4}$$

أياً كانت $t>0$ و $\alpha\in(0,1)$. إذا كان f تابع $\alpha-$ قابل للمفاضلة في مجال ما $(0,a)$ مع $a>0$ والنهاية $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ موجودة، عندئذ $f^{(\alpha)}(0)=\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$.

مبرهنة (1) [12]:

ليكن α من $(0,1]$ و f و g تابعين $\alpha-$ قابلين للمفاضلة في نقطة ما $t>0$، عندئذٍ:

1) أياً كان a و b عددين حقيقيين، فإن $T_\alpha(af+bg)=aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$،

2) أياً كان γ عدداً حقيقياً، فإن $T_\alpha(t^\gamma)=\gamma t^{\gamma-\alpha}$،

3) من أجل كل ثابت λ، لدينا $T_\alpha(\lambda)=0$،

4) $T_\alpha(f.g)=fT_\alpha(g)(t)+gT_\alpha(f)$،

5) $T_\alpha\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$،

6) إذا كان f تابع قابل للمفاضلة، فإن $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\dfrac{df}{dt}(t)$.

مبرهنة (2) [33]:

ليكن $f:[0,\infty)\to \mathbb{R}$ تابع قابل للمفاضلة وأيضاً $\alpha-$ قابل للمفاضلة، وليكن g تابع معرف في المستقر الفعلي للتابع f وأيضاً قابل للمفاضلة، عندئذٍ:

$${}_tT_\alpha(f\circ g)(t)=t^{1-\alpha}g'(t).f'\left(g(t)\right) \tag{5}$$

طريقة تعويض معادلة ريكاتي التفاضلية العادية [29،30]:

تتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

1- نستخدم متحول الموجة الآتي:

$$\zeta=\frac{kx^\alpha+wt^\alpha}{\alpha}\ ;\ \alpha\neq 0 \tag{6}$$

وبالتالي لدينا:

$$u(x,t)=u(\zeta) \tag{7}$$

حيث k,w ثابتين غير صفريين.

2- تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية غير الخطية:

$$F\left(u,{}_tT_\alpha u,{}_xT_\alpha u,{}_{xx}T_{2\alpha}u,\ldots\right)=0,\ \ 0<\alpha\le 1 \tag{8}$$

إلى معادلة تفاضلية عادية:

$$Q\left(u,u',u'',...\right)=0 \tag{9}$$

حيث $u'(\zeta)=\dfrac{du}{d\zeta}$.

3- نفرض أن للمعادلة (9) حلاً من الشكل:

$$u(\zeta)=\sum_{j=0}^{n}a_j\phi^j \tag{10}$$

حيث a_j، من أجل $j=0,1,2,...$، ثوابت عددية تحدد لاحقاً و n عدد صحيح موجب يحدد بموازنة أعلى مرتبة اشتقاق مع أعلى درجة حد غير خطي في المعادلة (9)، و $\phi=\phi(\zeta)$ يحقق معادلة ريكاتي التفاضلية الآتية:

$$\phi'=\sigma+\phi^2 \tag{11}$$

حيث σثابت عددي. تعطى حلول هذه المعادلة بالشكل الآتي [34]:

$$\phi(\zeta)=\begin{cases}-\sqrt{-\sigma}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\zeta\right) & ;\sigma<0\\ -\sqrt{-\sigma}\coth\left(\sqrt{-\sigma}\zeta\right) & ;\sigma<0\\ \sqrt{\sigma}\tan\left(\sqrt{\sigma}\zeta\right) & ;\sigma>0\\ -\sqrt{\sigma}\cot\left(\sqrt{\sigma}\zeta\right) & ;\sigma>0\\ -\dfrac{1}{\zeta+\delta} & ;\sigma=0\end{cases} \tag{12}$$

حيث δ ثابت عددي.

4- بتعيين n ثم بتعويض (10)، مع الأخذ بعين الاعتبار (11)، في المعادلة (9)، نحصل على كثيرة حدود بـ ϕ وبتجميع أمثال قوى ϕ وجعلها مساوية للصفر، نحصل على جملة معادلات جبرية غير خطية للمجاهيل a_j، من أجل $j=0,1,2,...,n$ و k,w.

5- بحل هذه الجملة الجبرية باستخدام برامج رياضية صيغية مثل Maple أو Mathematica، نحصل على a_j، من أجل $j=0,1,2,...,n$ و k,w، وبتعويضها في حل المعادلة (11) ثم في (10) وباستخدام (6) نحصل على حل المعادلة (8) بشكل صريح.

طريقة التكامل الأول لـ Feng [32]:

باستخدام التحويل الموجي (6) نحول المعادلة (8) إلى معادلة تفاضلية عادية من الشكل (9). نفرض أن للمعادلة (9) حلاً من الشكل:

$$u(\zeta)=X(\zeta) \tag{13}$$

ثم نأخذ متحول مستقل جديد $Y(\zeta)=X'(\zeta)$، وبالتالي نحصل على جملة معادلتين:

$$\begin{aligned}X'(\zeta)&=Y(\zeta)\\ Y'(\zeta)&=G\left(X(\zeta),Y(\zeta)\right)\end{aligned} \tag{14}$$

الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي أنه باستخدام مبرهنة القسمة من أجل متحولين في منطقة عقدية C المعتمدة على مبرهنة هلبرت–نولستيلنساتز Hilbert–Nullstellensatz في [35]، يمكننا الحصول على تكامل أول واحد للجملة (14) الذي بدوره يجعل المعادلة (9) تؤول إلى معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى، وبحلها وبالتعويض في (13) والعودة إلى المتحولات الأصلية نحصل على الحل الدقيق للمعادلة (8) بالشكل الصريح.

مبرهنة القسمة: [35]

بفرض أن $P(x,y)$ و $R(x,y)$ كثيرتا حدود في $\mathbb{C}[x,y]$، و $P(x,y)$ غير قابلة للاختزال في $\mathbb{C}[x,y]$. إذا كانت $R(x,y)$ تنعدم عند كل أصفار $P(x,y)$، عندئذ توجد كثيرة حدود $H(x,y)$ في $\mathbb{C}[x,y]$ وتحقق أن:

$$R(x,y)=P(x,y).H(x,y) \tag{15}$$

2– إيجاد حلول دقيقة لمعادلة زيلدوفيتش التفاضلية الكسرية باستخدام طريقة تعويض معادلة ريكاتي:

باستخدام المتحول الموجي المعطى بالعلاقة (6) مع الأخذ بعين الاعتبار المبرهنتين (1) و(2)، تصبح المشتقات بالشكل الآتي:

$$ {}_{t}T_{\alpha}u = w\,\frac{du}{d\zeta} \tag{16}$$

$$ {}_{xx}T_{2\alpha}u = k^{2}\,\frac{d^{2}u}{d\zeta^{2}} \tag{17}$$

بالتالي تصبح المعادلة التفاضلية الجزئية الكسرية (3) بالشكل الآتي:

$$w\,\frac{du}{d\zeta}+k^{2}p\,\frac{d^{2}u}{d\zeta^{2}}+qu^{2}+ru^{3}=0 \tag{18}$$

وهي معادلة تفاضلية عادية. بفرض أن للمعادلة (18) حل من الشكل (10)، وبتعويض (10) في (18) والموازنة بين مرتبة أعلى مشتق $\frac{d^{2}u}{d\zeta^{2}}$ ودرجة الحد غير الخطي u^{3}، نحصل على:

$$n+2=3 \tag{19}$$

ومنه $n=1$، بالتالي فإن الحل (10) يكتب بالشكل الآتي:

$$u(\zeta)=a_{0}+a_{1}\phi \tag{20}$$

بتعويض (20) مع (11) في المعادلة (18) وتجميع أمثال قوى ϕ وجعلها مساوية للصفر، نحصل على جملة المعادلات الجبرية غير الخطية الآتية بالمجاهيل a_0 و a_1 و w و k:

$$\phi^{0}: wa_{1}\sigma+qa_{0}^{2}+ra_{0}^{3}=0 \tag{21}$$

$$\phi^{1}: k^{2}pa_{1}\sigma+2qa_{0}a_{1}+3ra_{0}^{2}a_{1}=0 \tag{22}$$

$$\phi^{2}: wa_{1}+qa_{1}^{2}+3ra_{1}^{2}a_{0}=0 \tag{23}$$

$$\phi^{3}: 2pk^{2}a_{1}+ra_{1}^{3}=0 \tag{24}$$

وبحل هذه الجملة الجبرية غير الخطية باستخدام برنامج Maple13، نحصل على الحالات الآتية:

حالة (1): إذا كان $a_1=\frac{-1}{2}\frac{q}{\sqrt{-\sigma r}}, a_0=\frac{-1}{2}\frac{q}{r}, w=\frac{-1}{4}\frac{q^2}{\sqrt{-\sigma r}}, k=\pm\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}q}{\sqrt{r\sigma p}}$، بالتالي بالتعويض في (6) و(12) ثم في العلاقة (20) نحصل على حل دقيق للمعادلة (3):

$$u(x,t)=\frac{-1}{2}\frac{q}{r}-\frac{1}{2}\frac{q}{r}\begin{cases}-\tanh\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{i\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}-\frac{q^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma<0\\ -\coth\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{i\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}-\frac{q^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma<0\\ -i\tan\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}+\frac{iq^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma>0\\ i\cot\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}+\frac{iq^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma>0\end{cases} \tag{25}$$

حالة (2): إذا كان $a_1=\frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{-\sigma r}}, a_0=\frac{-1}{2}\frac{q}{r}, w=\frac{1}{4}\frac{q^2}{\sqrt{-\sigma r}}, k=\pm\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}q}{\sqrt{r\sigma p}}$، بالتالي بالتعويض في (6) و(12) ثم في العلاقة (20) نحصل على حل دقيق للمعادلة (3):

$$u(x,t)=\frac{-1}{2}\frac{q}{r}+\frac{1}{2}\frac{q}{r}\begin{cases}-\tanh\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{i\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}+\frac{q^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma<0\\ -\coth\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{i\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}+\frac{q^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma<0\\ -i\tan\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}-\frac{iq^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma>0\\ i\cot\left[\frac{1}{4\alpha}\left(\pm\frac{\sqrt{2}qx^{\alpha}}{\sqrt{rp}}-\frac{iq^2t^{\alpha}}{r}\right)\right] & ;\sigma>0\end{cases} \tag{26}$$

إذا كان $\sigma=0$، فنحصل على $a_1=a_1, a_0=0, w=-qa_1, k=\pm\frac{i\sqrt{2pra_1}}{p}$، وبالتالي بالتعويض في (6) و(12) ثم في العلاقة (20) نحصل على حل دقيق للمعادلة (3):

$$u(x,t)=\frac{a_1\alpha}{\pm\frac{i\sqrt{2pra_1}}{p}x^{\alpha}-qa_1t^{\alpha}+\alpha\delta} \tag{27}$$

3- إيجاد حلول دقيقة لمعادلة زيلدوفيتش التفاضلية الكسرية باستخدام طريقة التكامل الأول لـFeng:

باستخدام المتحول الموجي المعطى بالعلاقة (6) مع الأخذ بعين الاعتبار المبرهنتين (1) و(2)، تصبح المشتقات كما في حالة طريقة تعويض معادلة ريكاتي في الفقرة السابقة، وبالتالي بالتعويض في المعادلة (3)، نحصل على المعادلة التفاضلية العادية (18). لنفرض أن حل المعادلة (18) يكتب بالشكل (13)، ثم نأخذ متحول مستقل جديد

$Y(\zeta)=X'(\zeta)$، وبالتالي بتعويض (13) في المعادلة (18) مع الأخذ بعين الاعتبار $Y(\zeta)=X'(\zeta)$، نحصل على الجملة التفاضلية الآتية:

$$\begin{aligned}&X'(\zeta)=Y(\zeta)\\&Y'(\zeta)=\frac{-w}{pk^2}Y(\zeta)-\frac{q}{pk^2}X^2(\zeta)-\frac{r}{pk^2}X^3(\zeta)\end{aligned}\tag{28}$$

وحسب طريقة التكامل الأول نفترض أن $X(\zeta)$ و $Y(\zeta)$ حلول غير بديهية للجملة (28) و $Q(X,Y)=\sum_{j=0}^{m}a_j(X)Y^j$ كثيرة حدود غير قابلة للاختزال في منطقة عقدية ما C، وتحقق أن:

$$Q\left(X(\zeta),Y(\zeta)\right)=\sum_{j=0}^{m}a_j(X(\zeta))Y^j(\zeta)=0\tag{29}$$

حيث تمثل $a_j(X)$، من أجل $j=0,1,2,...,m$ كثيرات حدود لـ X مع $a_m(X)\neq 0$، وحسب مبرهنة القسمة يوجد كثيرة حدود $g(X)+h(X)Y$ في منطقة عقدية C تحقق أن:

$$\frac{dQ}{d\zeta}=\frac{dQ}{dX}.\frac{dX}{d\zeta}+\frac{dQ}{dY}.\frac{dY}{d\zeta}=\left(g(X)+h(X)Y\right)\sum_{j=0}^{m}a_j(X)Y^j\tag{30}$$

بفرض أن $m=1$، نجد أن:

$$Q(X,Y)=a_0(X)+a_1(X)Y\tag{31}$$

بالتالي بتعويض (31) في (30) مع مراعاة المعادلة الثانية في الجملة (28)، ثم بمساواة أمثال قوى Y من الطرفين نحصل على:

$$Y^2:\ a_1'(X)=a_1(X)h(X)\tag{32}$$

$$Y^1:\ a_0'(X)=\frac{w}{pk^2}a_1(X)+a_1(X)g(X)+a_0(X)h(X)\tag{33}$$

$$Y^0:\ a_1(X)\left(-\frac{q}{pk^2}X^2-\frac{r}{pk^2}X^3\right)=a_0(X)g(X)\tag{34}$$

وبما أن $a_j(X)$، من أجل $j=0,1$ تمثل كثيرات حدود، لذلك من المعادلة (32) نستنتج أن $a_1(X)$ كثيرة حدود ثابتة و $h(X)=0$، وبهدف التبسيط نأخذ $a_1(X)=1$، ومن المعادلة (33) ومع مراعاة (34) بموازنة درجة $g(X)$ و $a_0(X)$، نجد أن $\deg(g(X))=1$، بالتالي لنفرض أن:

$$g(X)=A_0+A_1X\ \ ;A_1\neq 0\tag{35}$$

وبالتعويض في (33) ومع مراعاة كون $h(X)=0$ و $a_1(X)=1$، وبالمكاملة نحصل على:

$$a_0(X)=B_0+\left(A_0+\frac{w}{pk^2}\right)X+\frac{A_1}{2}X^2\tag{36}$$

حيث B_0 ثابت مكاملة. بتعويض كل من $g(X)$ و $h(X)$ و $a_1(X)$ و $a_0(X)$ في المعادلة (34) وجعل أمثال قوى X مساوية للصفر، نحصل على جملة المعادلات الجبرية غير الخطية الآتية:

$$X^0:A_0B_0=0\tag{37}$$

$$X^{1}: A_0\left(A_0+\frac{w}{k^2 p}\right)+A_1 B_0=0 \tag{38}$$

$$X^{2}: \frac{A_0 A_1}{2}+A_1\left(A_0+\frac{w}{k^2 p}\right)+\frac{q}{k^2 p}=0 \tag{39}$$

$$X^{3}: \frac{A_1^2}{2}+\frac{r}{k^2 p}=0 \tag{40}$$

وبحل هذه الجملة الجبرية غير الخطية باستخدام برنامج Maple13، نحصل على:

$$B_0=0\ ,\ A_0=0\ ,\ w=\mp\frac{qpk}{\sqrt{-2pr}}\ ,\ A_1=\pm\sqrt{\frac{-2r}{pk^2}}$$

بالتعويض في (36)، نحصل على:

$$a_0(X)=\mp\frac{q}{\sqrt{-2pr}\,k}X \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2r}{pk^2}}X^{2} \tag{41}$$

بتعويض (41) في (29)، مع الأخذ بعين الاعتبار أن $m=1$، نحصل على:

$$\frac{dX}{d\zeta}=-a_0(X)=\pm\frac{q}{\sqrt{-2pr}\,k}X \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2r}{pk^2}}X^{2} \tag{42}$$

وهي معادلة ريكاتي من الشكل $X'=b_0+b_1X+b_2X^{2}$ تعطى حلولها حيث $b_2\neq 0$ كما يأتي [36]:

1) إذا كان $\Delta=b_1^2-4b_2b_0>0$

$$X(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2b_2}\left[b_1+\sqrt{\Delta}\tanh\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta-\dfrac{\varepsilon\ln\zeta_0}{2}\right)\right] & ;\zeta_0>0\\[2ex] \dfrac{-1}{2b_2}\left[b_1+\sqrt{\Delta}\coth\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\zeta-\dfrac{\varepsilon\ln\left(-\zeta_0\right)}{2}\right)\right] & ;\zeta_0<0\\[2ex] \dfrac{-1}{2b_2}\left[b_1+\sqrt{\Delta}\varepsilon\right] & ;\zeta_0=0\end{cases} \tag{43}$$

2) إذا كان $\Delta=b_1^2-4b_2b_0<0$

$$X(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2b_2}\left[b_1-\sqrt{-\Delta}\tan\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}\zeta+\zeta_0\right)\right]\\[2ex] \dfrac{-1}{2b_2}\left[b_1+\sqrt{-\Delta}\cot\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}\zeta+\zeta_0\right)\right]\end{cases} \tag{44}$$

3) إذا كان $\Delta=b_1^2-4b_2b_0=0$

$$X(\zeta)=\frac{-b_1}{2b_2}-\frac{1}{b_2\zeta+\zeta_0} \tag{45}$$

حيث ζ_0 ثابت، و $\varepsilon=\pm 1$.

بالمقارنة نجد أن $b_2 = \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2r}{pk^2}}, b_1 = \pm \frac{q}{\sqrt{-2pr}\,k}, b_0 = 0$، وبتعويض (43) و(44) و (45) في (13)، نحصل على حل دقيق للمعادلة (3) وفق الحالات الآتية:

حالة 1: إذا كان $\frac{q^2}{-2prk^2} > 0$ أي إذا كان $pr < 0$ ، فإن الحل الدقيق يكتب بالشكل الآتي:

$$u(x,t) = u(\zeta) = \begin{cases} \frac{\pm 1}{2}\sqrt{\frac{pk^2}{-2r}}\left[\begin{array}{l} \pm\frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}} + \frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}} \\ \times\tanh\left(\frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}}\zeta - \frac{\varepsilon\ln\zeta_0}{2}\right)\end{array}\right] & ;\zeta_0 > 0 \\ \frac{\pm 1}{2}\sqrt{\frac{pk^2}{-2r}}\left[\begin{array}{l} \pm\frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}} + \frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}} \\ \times\coth\left(\frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}}\zeta - \frac{\varepsilon\ln(-\zeta_0)}{2}\right)\end{array}\right] & ;\zeta_0 < 0 \\ \frac{\pm 1}{2}\sqrt{\frac{pk^2}{-2r}}\left[\pm\frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}} + \frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}}\varepsilon\right] & ;\zeta_0 = 0 \end{cases} \tag{46}$$

حالة 2: إذا كان $\frac{q^2}{-2prk^2} < 0$ أي إذا كان $pr > 0$ ، فإن الحل الدقيق يكتب بالشكل الآتي:

$$u(x,t) = u(\zeta) = \begin{cases} \frac{\pm 1}{2}\sqrt{\frac{pk^2}{-2r}}\left[\begin{array}{l} \pm\frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}} - \frac{q}{\sqrt{2pk^2r}} \\ \times\tan\left(\frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{2pk^2r}}\zeta + \zeta_0\right)\end{array}\right] \\ \frac{\pm 1}{2}\sqrt{\frac{pk^2}{-2r}}\left[\begin{array}{l} \pm\frac{q}{\sqrt{-2pk^2r}} + \frac{q}{\sqrt{2pk^2r}} \\ \times\cot\left(\frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{2pk^2r}}\zeta + \zeta_0\right)\end{array}\right] \end{cases} \tag{47}$$

حالة 3: إذا كان $\frac{q^2}{-2prk^2} = 0$ أي إذا كان $q = 0$، فإن $b_1 = 0$، وبالتالي يكتب الحل الدقيق بالشكل الآتي:

$$u(x,t) = u(\zeta) = -\frac{1}{\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2r}{pk^2}}\zeta + \zeta_0} \tag{48}$$

حيث ζ المتحول الموجي المعطى بالعلاقة (6).

نلاحظ من خلال هذه الحلول التي حصلنا عليها أن حلولنا أكثر عمومية من تلك التي في المرجع [26] في حالة كون $\alpha = 1$، أي في حالة معادلة زيلدوفيتش التفاضلية الجزئية (2)، إذ أننا حصلنا أيضاً على حلول عقدية. من خلال هذه

الدراسة نجد أننا حصلنا على أنواع مختلفة من الحلول المثلثية الحقيقية والحلول المثلثية العقدية، كما حصلنا على نوع آخر من الحلول وهو الحلول الكسرية، إذ نجدها في العلاقتين (27) و(48) وهذه الحلول لا تأخذ صفة حل ذو موجة منتشرة.

الاستنتاجات والتوصيات:

استخدمنا في هذا البحث طريقتين، طريقة تعويض معادلة ريكاتي التفاضلية العادية وطريقة التكامل الأول لـFeng. وجدنا بأن الطريقتين فعالتان لحل مثل هذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية الكسرية وفق معنى الاشتقاق الكسري المحافظ وبسيطتان من حيث العمليات الحسابية ومباشرتان وتعطيان ثلاثة أنواع من الحلول التحليلية الدقيقة ذات موجة منتشرة وأخرى غير موجية، إذ حصلنا باستخدامها على حلول قطعية وأخرى مثلثية دورية وهي بشكل عام عقدية تبعاً للقيم التي تأخذها أمثال المعادلة، كما حصلنا على حلول كسرية لا تأخذ أي طبيعة موجية. إن بحثنا هو أول بحث يعالج معادلة زيلدوفيتش التفاضلية الجزئية الكسرية مع تعريف المشتق الكسري المحافظ، إذ أنه لم يتم التطرق سابقاً لهذه المعادلة مع هذا النوع من الاشتقاق الكسري. بينت الدراسة أيضاً أن اختيار المتحول الموجي غاية في الأهمية حتى يضمن لنا تحول المعادلة التفاضلية الكسرية إلى معادلة تفاضلية عادية ذات مرتبة اشتقاق صحيحة. نأمل بأن تساعد هذه الحلول الباحثين على فهم بعض الظواهر الفيزيائية غير الخطية المعقدة. يجدر بنا أن نشير أخيراً إلى أن جميع الحسابات المتعلقة بهذا العمل تمت باستخدام برنامج Maple13.

Reference:

[1] MILLER, K.S. ROSS, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.
[2] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*, Academic, San Diego, CA, 1999.
[3] MOZAFFARI, F.S. HASSANABADI, H. SOBHANI, H. CHUNG, W.S. *On the Conformable Fractional Quantum Mechanics*, J. Kor. Phys. Soc, 2017.
[4] CHUNG, W.S. ZARE, S. HASSANABADI, H. *Investigation of Conformable Fractional Schrodinger Equation in Presence of Killingbeck and Hyperbolic Potentials*, Commun. Theor. Phys. 67 (3), 2017, pp 250-254.
[5] CHUNG, W.S. ZARRINKAMAR, S. ZARE, S. HASSANABADI, H. *Scattering Study of a Modified Cusp Potential in Conformable Fractional Formalism*, J. Kor. Phys. Soc. 70 (4), 2017, pp 348-352.
[6] MOZAFFARI, F.S. HASSANABADI, H. SOBHANI, H. CHUNG, W. S. *Investigation of the Dirac Equation by Using the Conformable Fractional Derivative*. J. Korean Phys. Soc. 72, 2018, pp 987–990.
[7] KATUGAMPOLA, U.N. *New Approach to a Generalized Fractional Integral*, Appl. Math. Comput., 218(3), 2011, pp 860–865.
[8] KATUGAMPOLA, U.N. *New Approach to Generalized Fractional Derivatives*, B. Math. Anal. App., 6(4), 2014, pp 1–15.
[9] KILBAS, A.A. SRIVASTAVA H.M. and TRUJILLO, J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V., Amsterdam, Netherlands, 2016.
[10] SAMKO, S.G. KILBAS, A.A. and MARICHEV, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives", Theory and Applications*, Yverdon, Gordon and Breach, 1993.

[11] LIU, C. *Counterexamples on Jumarir's Two- Basic Fractional Calculus Formulae*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol. 22, 2015, pp 92-94.
[12] KHALIL, R. AL HORANI, M. YOUSEF, A. and SABABHEH, M. *A New Definition of Fractional Derivative*, J. Comput. Appl. Math., 264, 2014, pp 65-70.
[13] AMINIKHAH, H. SHEIKHANI A.H. and REZAZADEH, H. *Sub-Equation Method for The Fractional Regularized Long-Wave Equations with Conformable Fractional Derivatives*, Scientia Iranica B 23(3), 2016, pp 1048-1054.
[14] CENESIZ Y. KURT, A. *New Fractional Complex Transform for Conformable Fractional Partial Differential Equations*, JAMSI, No. 2. 2016.
[15] KHALID, K. A. NURUDDEEN, R.I. *Analytical Treatment for The Conformable Space-Time Fractional Benney-Luke Equation via Two Reliable Methods*, International Journal of Physical Research, 5 (2), 2017, pp109-114.
[16] AL-SHAWBA1, A.A. ABDULLAH1, F. A. GEPREEL, K. A. AZMI, A. *Solitary and Periodic Wave Solutions of Higher-Dimensional Conformable Time-Fractional Differential Equations Using The (G'/ G, 1/G)-Expansion Method*, Advances in Difference Equations, 362, 2018.
[17] KORKMAZ, A. HEPSON, O.E. HOSSEINI, K. REZAZADEH, H. ESLAMI, M. *Sine-Gordon Expansion Method for Exact Solutions to Conformable Time Fractional Equations in RLW-Class*, Journal of King Saud University–Science, 2018.
[18] KOYUNLU, G. AHMAD, G. LIMAN, J. S. MUAZU, H. U. *Topological 1-Soliton Solutions to Fractional Modified Equal Width Equation and Fractional Klein-Gordon Equation*, International Journal of Electrical, Electronics and Data Communication, Vol 6, (10), 2018, pp 38-41,.
[19] ZAFAR, A. KORKMAZ, A. REZAZADEH, H. *A Variety of Explicit Exact and Soliton Type Solutions of Conformable Fractional Equal-Width Equations*", preprint, 2018.
[20] ESLAMI, M. and TALEGHANI, S.A. *Differential Transform Method for Conformable Fractional Partial Differential Equations*, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization Vol. 9, No. 2, 2019, pp 17–29.
[21] HAFIZ UDDIN, M. ASHRAFUZZAMAN KHAN, Md. ALI AKBAR, M. ABDUL HAQUE, Md. *Analytical Wave Solutions of The Space-Time Fractional Modified Regularized Long Wave Equation Involving The Conformable Fractional Derivative*, Karbala International Journal of Modern Science, Vol. 5, (1), 2019, pp 45-54.
[22] TAYYAN, B. A. SAKKA, A. H. *Symmetries and Exact Solutions of Conformable Fractional Partial Differential Equations*, Palestine Journal of Mathematics, Vol. 9 (1), 2020, pp 300–311.
[23] ZELDOVICH, Y.B. *Theory of Flame Propagation*, National Advisory Committee for Aeronautics Technical Memorandum 1282, 1951, pp 39.
[24] ZELDOVICH, Y.B., RAIZER, Y.P. *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena* Volume I, Academic Press, New York, 1966.
[25] GILDING, B.H. KERSNER, R. *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection Reaction*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Volume 60, Springer Basel AG, 2004.
[26] KORKMAZ, A. *Complex Wave Solutions to Mathematical Biology Models I: Newell-Whitehead-Segel and Zeldovich Equations*. Preprints, 2018.
[27] DANILOV, V.G. MASLOV, V.P. VOLOSOV, K.A. *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1995.

[28] INJROU, S. *A Study about Finding Exact Solutions for Zeldovich Equation with Time-Dependent Coefficients by Using the Tanh Function Method*, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series, Arabic, Vol. (04) No. (0) 8402, 2018.
[29] LI, Z.B. *An Extended Fractional Complex Transform*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 11, 2010, pp335–337.
[30] LI, Z.B. HE, J.H. *Application of the Fractional Complex Transform to Fractional Differential Equations*. Nonlinear Science Letters A- Mathematics, Physics and Mechanics, 2, 2011, pp121–126.
[31] WANG, M.L. *Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations*. Phys. Lett. A. 199(3-4), 1995, pp169-172.
[32] FENG, Z. *The First-Integral Method to Study the Burgers Korteweg-De Vries Equation*, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 35, no. 2, 2002, pp 343–349.
[33] ABDELJAWAD, T. *On Conformable Fractional Calculus*, J. Comput. Appl. Math., 279, 2015, pp 57-66.
[34] FAN, E. *Extended Tanh-function Method and Its Applications to Nonlinear Equations*, Physics Letters A, vol. 277, no. 4-5, 2000, pp. 212–218.
[35] BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics. Commutative Algebra*, Hermann, Addison-Wesley, Paris, France, 1972.
[36] MA. W.X. FUCHSSTEINER. B. *Explicit and Exact Solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation*, Int J Non-Linear Mechanics, Vol. 31, No. 3, 1996, pp. 329-338.