دراسة بعض دوال بيك وتمثيلها تكاملياً

الدكتور محمد سويقات*
الدكتور عبد الباسط يونسو**
الدكتور أحمد بكداش***
نبيل خضير سلمان****

(تاريخ الإيداع 22 / 10 / 2019. قُبِل للنشر في 9 / 4 /2020)

ملخّص

قمنا في هذا البحث بإثبات أن الدالة

$$f(z) = \frac{\log \Gamma(z+1)}{z \log z}$$

التحليلية في المستوي العقدي باستثناء نصف المحور الحقيقي السالب، حيث يرمز بـ Γ للدالة غاما، هي دالة بيك. وذلك من خلال التحقق من أن القسم التخيلي للدالة $f(z)$ موجب في نصف المستوي العلوي المفتوح. وقد استطعنا تمثيل الدالة $f(z)$ بشكلٍ تكاملي. وبالاستفادة من ذلك، استنتجنا أن مشتق الدالة الحقيقية $f(x)$ هي دالة مضطردة تماماً. وعلاوة على ذلك، توصلنا إلى إثبات أن بعض الدوال المتعلقة بالدالة $f(z)$ هي دوال بيك أيضاً وأوجدنا تمثيلاً تكاملياً لها.

الكلمات المفتاحية: دوال بيك، الدالة غاما، دالة تامة الاضطراد، تحويل ستلجس.

* أستاذ- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.
**مدرس- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.
***أستاذ مساعد - قسم الرياضيات- كلية العلوم-جامعة تشرين-سورية.
****طالب دراسات عليا (دكتوراه) قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

Investigation of some Pick functions and its integral representation

Dr. Mohammad Soueycatt*
Dr. Abedalbaset Yonsoo**
Dr. Ahmad Beckdash***
Nabil Khuder Salman****

(Received 22 / 10 / 2019. Accepted 9 / 4 /2020)

□ ABSTRACT □

In this research, we have proved that the function

$$f(z) = \frac{\log \Gamma(z+1)}{z \log z}$$

which is analytic in the complex plane expect the negative real axis, where Γ is a Gamma function, is a Pick function by proving that the imaginary part of the function $f(z)$ is positive in the upper half complex plane expect the negative real axis. And we have obtained an integral representation of the function $f(z)$. From that, we have concluded that the derivative of the real function $f(x)$ is a completely monotonic. Moreover, we have proved that some functions related to the function $f(z)$ are Pick functions and we have found the integral representations for there.

Keywords: Pick functions, Gamma function, completely monotonic functions, Stieltjes transforms.

***Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
**** Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*******Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم أنه للدالة غاما $\Gamma(x)$ تطبيقات مختلفة في شتى المجالات العلمية، وبشكلٍ خاص في الفيزياء والميكانيك. وقد وجد الباحثون بعض الدوال الخاصة التي ترتبط بشكلٍ وثيق بالدالة غاما ولها أهمية كبيرة في حل بعض المسائل التطبيقية للرياضيات.

ندرس في هذا البحث إحدى هذه الدوال المتعلقة بالدالة غاما وهي:

$$f(x)=\frac{\log\Gamma(x+1)}{x\log x}$$

فقد جذبت هذه الدالة انتباه العديد من الباحثين الرياضيين على سبيل المثال [2,4,6,8,10]. بدايةً برهن كل من Qui و Anderson في [2] أن الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً (strictly increases) من $1-\gamma$ إلى 1 عندما تتزايد x من 1 إلى اللانهاية، حيث γ ثابت أولر –مسكيروني. كما وضعا تخميناً أن الدالة $f(x)$ مقعرة لكل $x>1$.

أثبت Elbert و Laforgia في [8] أن التخمين الذي وضعه Qui و Anderson صحيح، كما توصلا إلى دراسة الاضطراد التام لبعض الدوال المتعلقة بها.

في عام 1999 طرح الباحث Dimitrov في الندوة الخامسة لكثيرات الحدود المتعامدة والدوال الخاصة وتطبيقاتها سؤالاً فيما إذا كان لمقلوب الدالة $f(z)$ تمديد تحليلي إلى المستوي العقدي باستثناء نصف المحور الحقيقي السالب أي $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$، وعلاقة هذا التمديد بتحويل ستلجس. وقد تمت الإجابة على هذا السؤال من قبل Berg و Pedersen في المقال [4].

في هذا العمل، قمنا بإثبات أن الدالة $f(z)$ هي دالة بيك، واعتماداً على ذلك أوجدنا تمثيلاً تكاملياً لهذه الدالة. كما توصلنا إلى أن الدالة الحقيقية $f'(x)$ مضطردة تماماً وبالاستفادة من ذلك، أثبتنا أن بعض الدوال المتعلقة بالدالة $f(z)$ هي دوال بيك أيضاً.

أهمية البحث وأهدافه:

تنبع أهمية البحث من كونه يدرس إحدى الدوال المتعلقة بالدالة غاما التي لها تطبيقات عملية في العديد من المجالات التطبيقية للرياضيات، ويبيّن أن هذه الدالة هي دالة بيك. أما أهداف البحث فيمكن تلخيصها فيما يأتي:

1- إثبات أن الدالة $f(z)$ هي دالة بيك.

2- إيجاد تمثيل تكاملي للدالة $f(z)$.

3- إثبات أن الدالة الحقيقية $f'(x)$ مضطردة تماماً.

4- التحقق من أنه لا توجد للدالة $\log\Gamma(z)$ أي أصفار في المستوي العقدي باستثناء المحور الحقيقي.

5- إثبات أنَّ بعض الدوال المتعلقة بالدالة $f(z)$ هي دوال بيك أيضاً وتمثيليها تكاملياً.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث في مجال الرياضيات النظرية، لذلك فإن الطرق المتبعة تعتمد بشكلٍ أساس على مفاهيم التحليل العقدي والدوال الخاصة وبشكلٍ خاص، استخدمنا مفاهيم الدالة غاما ودوال بيك والدوال المضطردة تماماً وتحويل ستلجس للوصول إلى النتائج المرجوة.

النتائج والمناقشة:

تعريف دالة بيك [9] (Pick function): يُقال عن الدالة $\varphi(z) = U(z) + iV(z)$ التحليلية في نصف المستوي العلوي $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$ إنها دالة بيك إذا كان $V(z) \geq 0$ لكل $Im(z) > 0$.

بعض خواص دوال بيك [9]

- إذا كان a و b عددين حقيقين موجبين، وكانت $\varphi_1(z)$ و $\varphi_2(z)$ دالتي بيك فإن الدالة $\varphi(z) = a\varphi_1(z) + b\,\varphi(z)$ تكون دالة بيك أيضاً.
- إن تركيب دالتي بيك هو دالة بيك. أي إذا كانت $\varphi_1(z)$ و $\varphi_2(z)$ دالتي بيك فإن $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(z)$ دالة بيك.
- بما أن الدالة $-\frac{1}{z}$ دالة بيك، فإنه إذا كانت $\varphi(z)$ دالة بيك فإن $-\frac{1}{\varphi(z)}$ دالة بيك أيضاً.

نعطي فيما يأتي بعض الأمثلة عن دوال بيك.

- الدالة $\varphi(z) = \sqrt{z}$ المعرفة في نصف المستوي العلوي والموجبة على نصف المحور الحقيقي الأيمن هي دالة بيك. وبشكلٍ أكثر عمومية الدالة $\varphi(z) = z^{\alpha}$ لكل $0 < \alpha < 1$ هي دالة بيك.
- الدالة $\tan(z)$ هي دالة بيك أيضاً وذلك بملاحظة أن:

$$\tan(x + iy) = \frac{\tan x + \tan(iy)}{1 - \tan x \tan(iy)}$$

ومن كون $\tan(iy) = i\tanh(y)$ نجد أن:

$$\tan(x + iy) = \frac{\tan x + i\tanh(y)}{1 - i\tan x \tanh(y)}$$

وبالتالي فإن القسم التخيلي لهذه الدالة

$$\frac{\tanh y\,(1 + \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x \tan^2 y}$$

يكون موجباً من أجل أي $y > 0$.

تبين المبرهنة المساعدة الآتية أن الدالة $\varphi(z)$ تكون دالة بيك إذا وفقط إذا قبلت تمثيلاً تكاملياً.

مبرهنة مساعدة (1) [7]: الشرط اللازم والكافي لتكون الدالة $\varphi(z)$ دالة بيك هو أن تقبل التمثيل التكاملي الآتي:

$$\varphi(z) = \alpha z + \beta + \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right]\, d\mu(\lambda)\,, \#(1)$$

حيث $\alpha \geq 0$ و β عدد حقيقي و $d\mu(\lambda)$ قياس بوريل الموجب الذي من أجله يكون

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2 + 1}\, d\mu(\lambda) < \infty$$

ومن المعلوم أنَّ:

$$\alpha = \lim_{y\to\infty}\frac{\varphi(iy)}{iy}, \quad \beta = Re\big(\varphi(i)\big), \quad \mu = \lim_{y\to 0^+}\frac{Im\big(\varphi(t + iy)\big)}{\pi}dt \;\#(2)$$

نعطي فيما يأتي بعض الأمثلة عن التمثيل التكاملي لدوال بيك.

- الدالة $\sqrt{z}$ يمكن تمثيلها تكاملياً بالشكل الآتي:

$$\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right]\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}d\lambda.$$

- الدالة $\tan z$ يمكن تمثيلها تكاملياً وفق:

$$\tan z=\exp\left[\log\tanh 1+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x-z}-\frac{x}{x^2+1}\right]f(x)\,dx\right],$$

حيث $f(x)$ هي الدالة المميزة لمجموعة قيم x التي يكون من أجلها $\tan x<0$.

تعريف الدالة المضطردة تماماً (Completely monotonic function) [2]:

يُقال عن الدالة الحقيقية $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ المستمرة على المجال $[0,\infty[$ القابلة للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات على المجال $]0,\infty[$ إنها مضطردة تماماً، إذا حققت الشرط الآتي:

$$(-1)^n f^{(n)}(x)\geq 0\ ,\quad x>0,\qquad n=0,1,2,\dots$$

وبصورة مكافئة: الشرط اللازم والكافي لتكون الدالة الحقيقية $f(x)$ مضطردة تماماً، هو أن يوجد قياس بوريل غير سالب $d\alpha(t)$، بحيث يمكن كتابة الدالة $f(x)$ بالشكل الآتي:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-xt}\,d\alpha(t)$$

نعطي فيما يأتي بعض المتراجحات والعلاقات والخواص الأساسية للدالة غاما والتي ستلزمنا للوصول للنتائج المرجوة.

من المعلوم أنه من أجل أي $z\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ وأي $k\geq 1$ فإن:

$$\log\Gamma(z+1)=\log\Gamma(z+k+1)-\sum_{j=1}^{k}\log(z+j)\ \#(3)$$

بالواقع، إن طرفي العلاقة (3) تحليليان في $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. بأخذ الجزء الحقيقي والتخيلي لطرفي العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$\log|\Gamma(z+1)|=\log|\Gamma(z+k+1)|-\sum_{j=1}^{k}\log|z+j|\ \ \#(4)$$

$$\arg\Gamma(z+1)=\arg\Gamma(z+k+1)-\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Arg}(z+j)\ \ \#(5)$$

لنعرف من أجل $k\in\mathbb{Z}$ المجموعة:

$$R_k=\{z=x+iy\in\mathbb{C};\ -k\leq x<-k+1,\ \ 0<y\leq 1\}$$

و $R=\cup_{k=0}^{\infty}R_k$. نلاحظ أن $\overline{R_0}$ مجموعة جزئية متراصة من المنطقة التحليلية للدالة $\log\Gamma(z+1)$ وبالتالي يوجد ثابت موجب c بحيث تتحقق من أجل أي $z\in\overline{R_0}$ المتراجحات الآتية:

$$-c\leq\log|\Gamma(z+1)|\leq c$$
$$-c\leq\arg\Gamma(z+1)\leq c$$

مبرهنة (1): ليكن الثابت c المذكور أعلاه، و $z\in R_k$ فإنه من أجل $k=1$ لدينا:

$$-c-\log 2\leq\log|\Gamma(z+1)|\leq c-\log|z+1|$$

ومن أجل $k\geq 2$ فإن:

$$-c-k\log k\leq\log|\Gamma(z+1)|\leq c-\log|z+k|-\log|z+k-1\ |$$

ومن أجل $k \geq 1$ فإن:

$$-c - k\pi \leq \arg\Gamma(z+1) \leq c - \frac{(k-1)\pi}{2}$$

حيث الثابت c لا يتعلق بـ k.

البرهان: من العلاقة (4) نجد أن:

$$-c - \sum_{j=1}^{k} \log|z+j| \leq \log|\Gamma(z+1)| \leq c - \sum_{j=1}^{k} \log|z+j|$$

وبالتالي نكون قد وصلنا إلى صحة العلاقة الأولى في هذه المبرهنة من أجل $k \geq 1$.

أما من أجل $k \geq 2$ نلاحظ أن:

$$c - \sum_{j=1}^{k} \log|z+j| \leq c - \log|z+k-1| - \log|z+k|,$$

من الواضح أن $|z+j| \geq 1$ من أجل أي $j = 1,2,\dots,k-2$. كما أنَّ $|z+j| \leq 1 + (k-j)$ من أجل $j = 1,2,\dots,k-1$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{k} \log|z+j| &\geq -\sum_{j=1}^{k-1} (z-j+1) - \log 2 \\ &= -\sum_{s=1}^{k-1} \log(s+1) - \log 2 \\ &\geq k\log(k). \end{aligned}$$

وهذا ما يعطينا صحة العلاقة الثانية في هذه المبرهنة.

وللتوصل إلى العلاقة الأخيرة في هذه المبرهنة نتبع نفس المناقشة السابقة وباستخدام العلاقة (5) والتقدير الآتي:

$$\frac{(k-1)\pi}{2} \leq \sum_{j=1}^{k} Arg\,(z+j) \leq k\pi$$

لكل $z \in R_k$ □

إن الهدف الأساسي في هذا البحث هو إثبات أن الدالة $f(z)$ هي دالة بيك، ولأجل ذلك يكفي إثبات أن الدالة $V(z) = Im\big(f(z)\big)$ موجبة في نصف المستوي العلوي $\mathbb{H}$. لأجل ذلك درسنا بداية سلوك حدودية الدالة $V(z)$ على المحور الحقيقي ثم قمنا بتقدير سلوك حدودية الدالة $V(z)$ في جوار اللانهاية، لنصل أخيراً إلى إثبات أن الدالة $V(z)$ غير سالبة في نصف المستوي العلوي.

بوضع $z = x + iy$ في عبارة $f(z)$ نجد أنَّ:

$$V(z) = \frac{(x\log|z| - y\,Arg\,z)\arg\Gamma(z+1)}{|z|^2|Log\,z|^2} - \frac{(y\log|z| + xArg\,z)\log|\Gamma(z+1)|}{|z\,Log\,z|^2}$$

من أجل دراسة سلوك حدودية الدالة $V(z)$ على المحور الحقيقي نذكر المبرهنة المساعدة الآتية:

مبرهنة مساعدة (2) [4]: من أجل أي $k \geq 1$ و $t \in]-k, -k+1[$ فإن:

$$\lim_{\substack{z \to t \\ Im(z)>0}} \log\Gamma(z) = \log|\Gamma(t)| - i\pi k$$

ومن أجل $t = 0, -1, -2, \dots$ فإن:

$$\lim_{z\to t}|\log\Gamma(z)| = \infty.$$

مبرهنة (2): إن $V(z) \to \pi d(t)$ لكل $t \in \mathbb{R}$ عندما $z \to t$ من داخل نصف المستوي العلوي $\mathbb{H}$، حيث الدالة $d(t)$ معرفة بالشكل الآتي:

$$d(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ \infty & t \in \{-1,-2,-3,\dots\} \\ -\dfrac{\log|\Gamma(t+1)| + (k-1)\log|t|}{t((\log|t|)^2+\pi^2)^2} & t \in]-k,-k+1[\,, \quad k = \{1,2,3,\dots\} \end{cases}$$

البرهان: بما أن f دالة حقيقية على الجزء الموجب من المحور الحقيقي، فإن $V(z) \to 0$ عندما $z \to t > 0$.

كما أنه من أجل أي $t \in]-k,-k+1[$ فإنه يمكن حساب النهاية باستخدام المبرهنة المساعدة (2).

ولإيجاد النهاية عندما $t = -k$ حيث $k = 1,2,\dots$ فإنه بالاستفادة من المبرهنة (1) نجد أن $y\log|\Gamma(z+1)| \to 0$ عندما $z = x + iy \to -k$ و $\arg\Gamma(z+1)$ تبقى محدودة وبالتالي:

$$\begin{aligned}\liminf_{z\to -k} V(z) &= \liminf_{z\to -k}\Big\{\frac{(x\log|z| - y\,Arg\,z)\arg\Gamma(z+1)}{|z|^2|Log\,z|^2} \\ &\quad - \frac{(y\log|z| + xArg\,z)\log|\Gamma(z+1)|}{|z|^2|Log\,z|^2}\Big\} \\ &\geq const - \lim_{z\to -k}\frac{y\log|z|\log|\Gamma(z+1)|}{|z|^2|Log\,z|^2} + \\ &\quad + \lim_{z\to -k}\frac{-x\,Arg\,z\,\log|\Gamma(z+1)|}{|z|^2|Log\,z|^2} \\ &= const + 0 + \infty = \infty\end{aligned}$$

ولمناقشة سلوك الدالة V في مبدأ الاحداثيات، نقوم بتقدير الدالة V وفق الآتي:

$$|V(z)| \leq \left|\frac{\log\Gamma(z+1)}{z}\right|\left|\frac{1}{Log\,z}\right| \leq const\ \frac{1}{|\log|z||}, \#(6)$$

حيث استفدنا من كون $z = 0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة $(\log\Gamma(z+1))/z$ وبالتالي $\lim_{z\to 0} V(z) = 0$ □

من المبرهنة (2) نصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة (1): للدالة $V(z)$ قيم حدودية غير سالبة.

وجدنا في المبرهنة (2) أن $V(z) \to \pi d(t)$ لكل $t \in \mathbb{R}$ عندما $z \to t$ وبملاحظة أن الدالة d غير سالبة.

من أجل $k = 1$ ينتج من كون $t + 1 \in]0,1[$ أن $\Gamma(t+1) > 1$.

ومن أجل $k \geq 2$، يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\log|\Gamma(t+1)| + (k-1)\log|t| &= \log|\Gamma(t+k)| + (k-1)\log|t| - \sum_{j=1}^{k-1}\log|t+j| \\ &= \log|\Gamma(t+k)| + \sum_{j=1}^{k-1}\log\frac{|t|}{|t+j|},\end{aligned}$$

حيث كل الحدود موجبة.

ندرس في المبرهنة الآتية سلوك حدودية الدالة $V(z)$ في جوار اللانهاية.

مبرهنة (3): يوجد ثابت $C > 0$ بحيث يتحقق من أجل جميع القيم الواقعة في نصف المستوي العلوي والتي طويلتها كبيرة بما فيه الكفاية $z \in \mathbb{H}$ العلاقة الآتية:

$$V(z) \geq -C$$

البرهان: من صيغة تحويل ستلجس [4] لدينا:

$$\log \Gamma(z+1) = \log \sqrt{2\pi} + \left(z + \frac{1}{2}\right) \log z - z + I(z), \#(7)$$

حيث $I(z)$ تعطى بالعلاقة الآتية:

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{Q(t)}{(z+t)^2} dt,$$

حيث $Q(t)$ دالة دورية دورها يساوي 1 و $Q(t) = t - t^2$ من أجل $t \in [0,1[$.

من أجل أي نقطة تقع فوق المحور الحقيقي أي $z \in \mathbb{H} \backslash \mathbb{R}$ يكون التقدير الآتي محققاً:

$$|I(z)| \leq \frac{\pi}{8} \#(8)$$

من العلاقتين (7) و (8) لدينا:

$$\frac{\log(z+1)}{z\, Log\, z} = 1 + \frac{\log \sqrt{2\pi} + (Log\, z)/2 - z + I(z)}{z\, Log\, z} \to 1\#(11)$$

وبالتالي $V(z) \to 0$ عندما $|z| \to \infty$ من داخل نصف المستوي العلوي باستثناء المحور الحقيقي أي $\mathbb{H} \backslash \mathbb{R}$ ومنه $|V(z)| \leq 1$ من أجل أي $z \in \mathbb{H} \backslash \mathbb{R}$ التي طويلتها كبيرة بما فيه الكفاية.

لنأخذ الحالة الآتية: ليكن $z \in \mathbb{R}$ وبفرض $z \in R_k$ حيث $k \geq 2$ عندئذٍ بشكلٍ خاص يكون $-k \leq x < 0$ و $\log|z| > 0$ و $y > 0$ و $Arg\, z > 0$ وباستخدام المبرهنة (1) نجد أنَّ:

$$\begin{aligned} L_1(z) &\equiv (x \log|z| - y\, Arg\, z) \arg \Gamma(z+1) \\ &\geq c(x \log|z| - y\, Arg\, z) \\ &\geq -c(k \log|z| + \pi). \end{aligned}$$

من المبرهنة (1) ينتج أيضاً:

$$\begin{aligned} L_2(z) &\equiv -(y \log|z| + x\, Arg\, z) \log|\Gamma(z+1)| \\ &= -y \log|z| \log|\Gamma(z+1)| \\ &\quad -x\, Arg\, z \log|\Gamma(z+1)| \\ &\geq -cy \log|z| \\ &\quad +(\log|z+k| + \log|z+k-1|) y \log|z| \\ &\quad -x\, Arg\, z\, (-c - k \log k). \end{aligned}$$

وعلاوة على ذلك، لدينا:

$$(\log|z+k| + \log|z+k-1|) y \geq 2y \log y \geq -1$$

ومنه يكون:

$$L_2(z) \geq -(c+1) \log|z| - k(c + k \log k)\pi.$$

وتتحقق المتراجحات الآتية:

$$\log|z| \leq \log(k+1) \leq \log k + \log 2,$$

ومنه نحصل على المتراجحة الآتية:

$$L_1(z) + L_2(z) \geq -const\ \ k^2 \log k,$$

حيث $const$ ثابت مستقل عن k.

وبالاعتماد على العلاقتين الآتيتين:

$$\log|z| \sim \log k, \quad |z\, Log\, z| \sim k \log k$$

من أجل $z \in R_k$ و $k \to \infty$ نحصل على التقدير الآتي:

$$V(z) \geq -\frac{const}{\log|z|}, \qquad z \in R_k$$

حيث k كبيرة بما فيه الكفاية. □

تفيدنا المبرهنة المساعدة الآتية في إثبات أن الدالة $V(z)$ غير سالبة في نصف المستوي العلوي.

مبرهنة مساعدة (3) [9]: لتكن $u(z)$ دالة شبه توافقية من أجل $Im(z) > 0$ وتحقق المتراجحة $u(z) \leq A|z| + O(|z|)$ حيث A ثابت حقيقي و $|z|$ كبيرة بما فيه الكفاية وبفرض أنه من أجل أي عدد حقيقي x كان:

$$\limsup_{\substack{z \to x \\ Im(z) > 0}} u(z) \leq 0$$

فإنه من أجل $Im(z) > 0$ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$u(z) \leq A\, Im(z).$$

نصل الآن إلى إثبات المبرهنة الأساسية في هذا البحث وهي إثبات أن الدالة $f(z)$ هي دالة بيك.

مبرهنة (4): الدالة $f(z)$ المعرفة بالعلاقة الآتية:

$$f(z) = \frac{\log \Gamma(z+1)}{z \log z}$$

هي دالة بيك.

البرهان: بتطبيق المبرهنة المساعدة (3) من أجل $A = 0$ وبوضع $u(z) = -V(z)$ وبالاستفادة من كون الدالة $V(z)$ توافقية في نصف المستوي العلوي ومن المبرهنتين (2) و (3). نجد أن الدالة $V(z)$ غير سالبة في نصف المستوي العلوي، أي أن $Im(f(z)) > 0$ في نصف المستوي العلوي. الأمر الذي يعني أن الدالة $f(z)$ هي دالة بيك. □

من المبرهنة المساعدة (1) نعلم أن أي دالة بيك تقبل تمثيلاً تكاملياً وفق الصيغة (1). نبحث في المبرهنة الآتية التمثيل التكاملي للدالة $f(z)$.

مبرهنة (5): الدالة $f(z)$ المعرفة وفق:

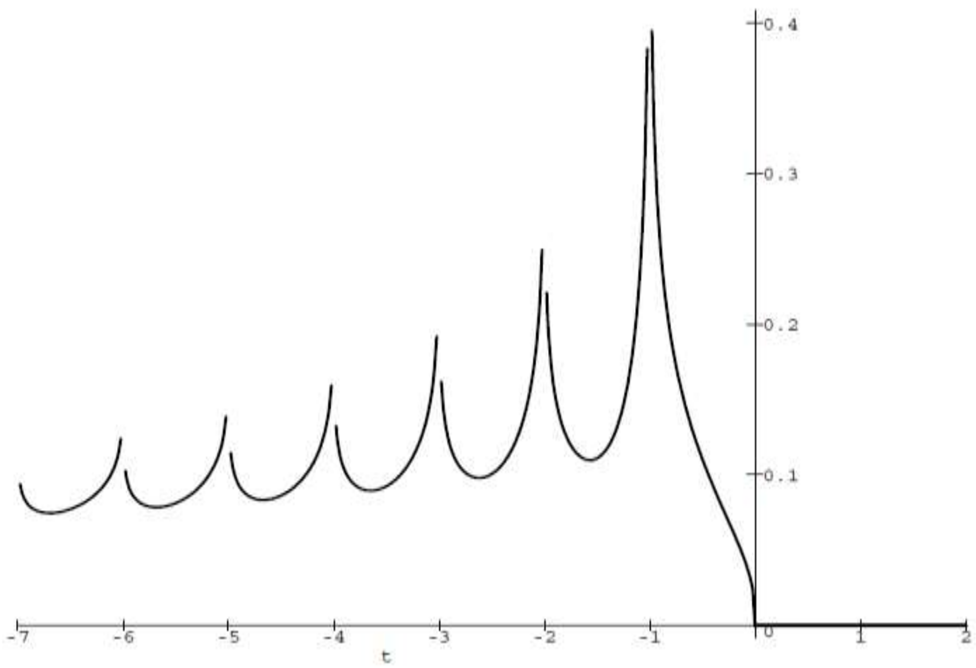
$$f(z) = \frac{\log \Gamma(z+1)}{z \log z}, z \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$$

تقبل تمثيلاً تكاملياً وفق الصيغة (1) من أجل $a = 0$ و $b = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\sinh \pi}{\pi}\right)$ و $\mu = d(t)$، حيث $d: \mathbb{R} \to [0, \infty]$ معرفة بالشكل الآتي:

$$d(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ \infty & t \in \{-1, -2, -3, \dots\} \\ -\dfrac{\log|\Gamma(t+1)| + (k-1)\log|t|}{t((\log|t|)^2 + \pi^2)^2} & t \in]-k, -k+1[, \qquad k = \{1, 2, 3, \dots\} \end{cases} \#(10)$$

أي أن الدالة $f(z)$ تقبل تمثيلاً تكاملياً بالشكل الآتي:

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\sinh \pi}{\pi}\right) + \int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) d(t)dt$$



الشكل رقم (1): الخط البياني للدالة d

البرهان: توصلنا في المبرهنة (4) أن الدالة $f(z)$ هي دالة بيك. وبالتالي فإن لها التمثيل الآتي:

$$f(z) = az + b + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\mu(t),$$

حيث μ قياس موجب و a عدد غير سالب و b عدد حقيقي.

وتتحول المسألة إلى إيجاد الثابتين a و b والقياس μ.

من المبرهنة المساعدة (1) لدينا:

$$a = \lim_{y\to\infty} \frac{f(iy)}{iy}, \quad b = Re\left(f(i)\right),$$

وباستخدام العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$a = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{iy} \left(1 + \frac{\log\sqrt{2\pi} + (\log iy)/2 - iy + I(iy)}{iy \log(iy)} \right) = 0$$

حيث لدينا من (8) أن: $|I(iy)| \le \frac{\pi}{8}$ لكل $y \ge 1$.

كما أن الثابت b يعطى بالعلاقة الآتية:

$$b = Re\big(f(i)\big) = -i\left(\frac{2}{\pi}\right)\log|\Gamma(i+1)| = \frac{1}{\pi}\log\frac{\sinh\pi}{\pi},$$

حيث المساواة الأخيرة تنتج من منشور فايرشتراس للدالة $\Gamma(z+1)$.

نعلم أن دالة القياس μ هي نهاية لمتتالية من القياسات لـ

$$Im\left(f\left(t+\frac{i}{n}\right)\right)\frac{dt}{\pi} = V\left(t+\frac{i}{n}\right)\frac{dt}{\pi}$$

عندما n تسعى إلى اللانهاية.

لتكن h دالة مستمرة غير سالبة على المحور الحقيقي، وبفرض أن مجموعة دعامتها متراصة ومحتواة في المجال $[-k,k]$ من أجل أي عدد حقيقي k.

سنبين أن:

$$\int_{-k}^{k} h(t)V\left(t+\frac{i}{n}\right)dt \to \pi\int_{-k}^{k} h(t)\,d(t)dt \#(11)$$

ولأجل ذلك سنبرهن أنه لأي $k \geq 1$

$$V\left(t+\frac{i}{n}\right) \leq const\ (1+|\log|t+k||),$$

حيث t يحقق $|t+k| \leq \frac{1}{2}$ و $n \geq 1$ والثابت $const$ يتعلق بـ k ولا يتعلق بـ n.

من أجل $k=1$ فالنتيجة واضحة، لأجل ذلك سنفترض أن $k \geq 2$

من العلاقة (9) بوضع $z=t+\frac{i}{n}$ نجد أن:

$$\begin{aligned}|z\,Log\,z|^2V(z) &= (x\log|z| - y\,Arg\,z)\arg\Gamma(z+1)\\ &\quad -(y\log|z| + x\,Arg\,z)\log|\Gamma(z+1)|\\ &\leq (|t|\log\sqrt{t^2+1}+\pi)\,Const\\ &\quad +\left(\log\sqrt{t^2+1}+|t|\pi\right)Const\\ &\quad +\left(\log\sqrt{t^2+1}+|t|\pi\right)\\ &\quad \times(|\log|z+k-1||+|\log|z+k||),\end{aligned}$$

ومن المبرهنة (1) لدينا:

$$\log|t+k| \leq \log|z+k| \leq \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

لكل $|t+k| \leq \frac{1}{2}$ و $n \geq 1$.

وبما أن الدالة $|\log|z+k-1||$ محدودة من أجل $|t+k| \leq \frac{1}{2}$ و $n \geq 1$

نحصل على العلاقة الآتية:

$$|z\,Log\,z|^2V(z) \leq Const + Const\,|\log|t+k|| \leq Const\ (1+|\log|t+k||)$$

لكل t التي تحقق $|t+k| \leq \frac{1}{2}$ ولأي n والثابت $Const$ يتعلق بـ k ولا يتعلق بـ n.

بملاحظة أن الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة قابلة للمكاملة على المجال $\left[-k-\frac{1}{2},-k+\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي إذا كان $|t| \leq \frac{1}{2}$ و $n \geq 2$ نحصل على المتراجحة الآتية:

$$\left|\log\left(t+\frac{i}{n}\right)\right| \geq \left|\log\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right|$$

وباستخدام العلاقة (6) نجد أنَّ:

$$V\left(t+\frac{i}{n}\right) \leq \frac{Const}{\left|\log\sqrt{t^2+1/4}\right|}$$

والثابت $Const$ مستقل عن n. والطرف الأيمن من هذه المتراجحة أيضاً قابل للمكاملة وعلاوة على ذلك يكون لدينا:

$$\left|\left(t+\frac{i}{n}\right)Log\ \left(t+\frac{i}{n}\right)\right|^2 \to t^2((\log|t|)^2+\pi^2)$$

وذلك على مجموعة متراصة جزئية من المجال $]-\infty,0[$. وبالتالي باستخدام مبرهنة ليبيغ نجد أن العلاقة (11) محققة ومنه نحصل على أن:

$$d\mu(t) = d(t)dt. \square$$

مبرهنة (6): لتكن الدالة d المعرفة بالعلاقة (10) عندئذٍ يكون لدينا:

$$\frac{\log\Gamma(z+1)}{z\,Log\,z} = 1 - \int_0^\infty \frac{d(-t)}{z+t}dt.$$

البرهان: بإجراء تغيير في المتحول نجد أنَّ:

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\sinh\pi}{\pi}\right) - \int_0^\infty \left(\frac{1}{t+z} - \frac{t}{t^2+1}\right) d(-t)\ dt$$

من الأفضل كتابة التكامل الأخير كفرق تكاملين على الشكل الآتي:

$$\int_0^\infty \frac{d(-t)}{t+z}dt - \int_0^\infty \frac{t\,d(-t)}{t^2+1}dt$$

وهذا ممكن إذا استطعنا التحقق من أنَّ:

$$\int_0^\infty \frac{t\,d(-t)}{t^2+1}\ dt < \infty \#(12)$$

بإجراء عملية المفاضلة تحت إشارة التكامل نجد أنه لكل $n \geq 1$ يكون لدينا:

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1}n!\int_0^\infty \frac{d(-s)}{(s+z)^{n+1}}\ ds \#(13)$$

وبشكلٍ خاص، نجد أن الدالة الحقيقية $f'(x)$ مضطردة تماماً على المجال $]0,\infty[$.

كما أن الدالة التحليلية $z \mapsto 1 - f(z)$ تحقق من أجل أي $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ الخواص الآتية:

- $Im\left(1 - f(z)\right) \leq 0$ لكل $z \in \mathbb{H}$ (وذلك حسب المبرهنة (4))
- $1 - f(x) \geq 0.2$ لكل $x > 0$ (من العلاقة (13) الدالة $1 - f(z)$ متناقصة، ومن صيغة ستيرلينغ لدينا $1 - f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$).

تضمن هذه الخواص أن للدالة $1 - f$ تحويل ستلجس وأن لها التمثيل التكاملي الآتي:

$$1 - f(z) = \alpha + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{z+t}$$

حيث $\alpha = \lim_{x\to\infty}\left(1 - f(x)\right) = 0$ و

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{z+t} < \infty$$

والقياس σ يعطى من خلال جعل n تسعى إلى اللانهاية في العلاقة الآتية:

$$-\frac{1}{\pi}Im\left(1 - f\left(-t - \frac{i}{n}\right)\right)dt = \frac{1}{\pi}V\left(-t + \frac{i}{n}\right)dt$$

ومنه $d\sigma(t) = d(-t)$ وينتج ذلك من صحة العلاقة (12) ومنه نجد أنَّ:

$$\int_0^\infty \frac{t\,d(-t)}{t^2+1}dt = 1 - \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\sinh\pi}{\pi}\right). \square$$

نبين أن بعض الدوال المتعلقة بالدالة $f(z)$ هي دوال بيك أيضاً وأوجدنا تمثيلاً تكاملياً لها.

مبرهنة (7): إن الدالة

$$f_1(z)=\frac{\log\Gamma(z+1)}{z},\qquad z\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$$

هي دالة بيك، ويمكن تمثيلها تكاملياً بالصيغة (1) من أجل $a=0$ و

$$b=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{k}\right)$$

و γ هو ثابت أولر و $d\mu=d_1(t)dt$ حيث الدالة $d_1:\mathbb{R}\to[0,\infty[$ تعرف بالشكل الآتي:

$$d_1(t)=\begin{cases}0 & t\geq -1\\ \dfrac{k-1}{-t} & t\in[-k,-k+1[\,,k=2,3,\dots\end{cases}$$

البرهان: سنبين أولاً أنَّ الدالة:

$$-\frac{\log\Gamma(z+1)}{z}$$

هي دالة بيك وتقبل تمثيلاً تكاملياً بالشكل الآتي:

$$-\frac{\log\Gamma(z+1)}{z}=-\frac{\pi}{4}+\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{z-t}-\frac{t}{t^2+1}\right)\frac{dt}{-t};\ \ z\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]\#(14)$$

بملاحظة أن الطرف الأيمن للمعادلة (14) هو تمثيل لدالة بيك، فإنه بإجراء المكاملة حداً فحداً يمكن البرهان على صحة العلاقة (14).

باستخدام منشور جداء فايرشتراس نجد أنَّ:

$$\frac{\log\Gamma(z+1)}{z}=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{Log\left(1+\frac{z}{k}\right)}{z}\right),z\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$$

وبما أن المجموع الجزئي

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{Log\left(1+\frac{z}{k}\right)}{z}\right),$$

هو دالة بيك، فإنه من الواضح أن الدالة $f_1(z)$ هي دالة بيك.

لإيجاد التمثيل التكاملي نستبدل z بـ $\frac{z}{k}$ ونضع $t=\frac{s}{k}$ في العلاقة (14) لنحصل على العلاقة الآتية:

$$\begin{aligned}-\frac{Log\left(1+\frac{z}{k}\right)}{z}&=-\frac{\pi}{4k}+\int_{-\infty}^{-k}\left(\frac{1}{s-z}-\frac{s}{s^2+k^2}\right)\frac{ds}{-s}\\&=\arctan k-\frac{\pi}{2}+\int_{-\infty}^{-k}\left(\frac{1}{s-z}-\frac{s}{s^2+1}\right)\frac{ds}{-s}\end{aligned}$$

وباستخدام العلاقة:

$$\frac{\pi}{2}-\arctan k=\arctan\left(\frac{1}{k}\right)$$

نجد أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{Log\,\left(1+\frac{z}{k}\right)}{z}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\arctan\left(\frac{1}{k}\right)\right)+\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{s-z}-\frac{s}{s^2+1}\right)\varphi_n(s)\,ds$$

حيث $\varphi_n(s)$ متتالية معرفة بالعلاقة الآتية:

$$\varphi_n(s)=\begin{cases}-\dfrac{k-1}{s}, & s\in[-k,-k+1[, \qquad k=2,\dots,n\\ -\dfrac{n}{s}, & s<-n\end{cases}$$

بجعل $n\to\infty$ نحصل على المطلوب. □

مبرهنة (8): إن الدالة

$$f_2(z)=z-\frac{Log\,\Gamma(z+1)}{Log\,z},z\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$$

هي دالة بيك، وتقبل تمثيلاً تكاملياً وفق الصيغة (1) من أجل $a=0$ و $b=-\frac{2}{\pi}\arg\Gamma(1+i)$ و $d\mu=-t\,d(t)dt$ حيث الدالة $d(t)$ معرفة بالعلاقة (10).

البرهان: بالاستفادة من المبرهنة (6) لدينا:

$$\phi(z)=1-\frac{\log\Gamma(z+1)}{z\,Log\,z}=\int_0^{\infty}\frac{d(-t)}{t+z}dt$$

وبالتالي، الدالة $\phi(-z)$ دالة بيك، مستمرة وموجبة على المجال $]-\infty,0[$ ومن [1] ينتج أن الدالة $z\phi(-z)$ هي دالة بيك وتقبل التمثيل التكاملي الآتي:

$$z\phi(-z)=\alpha z+\beta+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{t^2+1}\right)t\,d(-t)dt$$

ومن العلاقتين (2) و (9) ينتج أنَّ:

$$\alpha=0,\qquad \beta=-\frac{2}{\pi}\arg\Gamma(1+i)$$

وبتبديل z بـ $-z$ و t وبـ $-t$ نحصل على التمثيل التكاملي الآتي:

$$f_2(z)=-\beta+\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{t^2+1}\right)(-t)\,d(t)dt\,.\ \square$$

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا العمل بإثبات أن الدالة $f(z)=\frac{\log\Gamma(z+1)}{z\log z}$ هي دالة بيك وأوجدنا تمثيلاً تكاملياً لها. واعتماداً على ذلك، أثبتنا أن بعض الدوال المتعلقة بالدالة $f(z)$ هي دوال بيك أيضاً. ونوصي بمتابعة هذا العمل من خلال إيجاد بعض دوال بيك المتعلقة بالدالة غاما وإيجاد تمثيل تكاملي لها ودراسة العلاقة بينها وبين الاضطراد التام.

References

[1] AKHIEZER, N. *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965, 253.
[2] ANDERSON, G, QIU, S. *A monotonicity property of the gamma function*, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1997, 3355 3362.
[3] ANDERSON, G, VAMANAMURTHY, M, VUORINEN, M. *Special functions of quasiconformal theory*, Expo. Math. **7,** 1989, 97-136.
[4] BERG, C, PEDERSEN, H. *A completely monotone function related to the gamma function*, J. Comp. Appl. Math., 133, 2001, 219-230.
[5] BOCHNER, S. *Harmonic analysis and the theory of probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1955, 156.
[6] DAS, S, PEDERSEN, H, SWAMINATHAN, A. Pick functions related to the triple Gamma function, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 455 (2), 2017, 1124-1138.
[7] DONOGHUE, W. *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Springer, New York, 1974, 182.
[8] ELBERT, A, LAFORGIA, A. *On some properties of the gamma function*, Proc. Amer. Math. Soc., 128, 2000, 2667-2673.
[9] KOOSIS, P. *The logarithmic integral*, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2009, 606.
[10] PASCOE, J, TULLY, R, Cauchy transforms arising from homomorphic conditional expectations parametrize noncommutative Pick functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 472 (2), 2019, 1487-1498.