# إيجاد حلول دقيقة ذات موجة منعزلة ظاهرة لمعادلة برغرز هاكسلي المعممة ذات المعاملات الثابتة

د. رامز كروم *

(تاريخ الإيداع 19 / 5 / 2019. قُبِل للنشر في 16 / 10 /2019)

## □ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى تقديم حلول تحليلية دقيقة ذات موجة منعزلة ظاهرة لمعادلة برغرز هاكسلي المعممة ذات المعاملات الثابتة باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي *(solitary wave ansatz)*، ثم تم إعطاء شروط لازمة لوجود مثل هذا النوع من الحلول. أظهرت الرسوم البيانية بأن الموجة منعزلة وظاهرة وتتحرك نحو اليمين مع تغير الزمن، كما تبين تأثير المعامل $\beta$ على سعة هذه الموجة. بينت الدراسة أن الطريقة المستخدمة فعالة لتقديم هذا النوع من الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة برغرز هاكسلي – الموجة المنعزلة – طريقة فرضية التحويل الموجي – معادلة تفاضلية جزئية غير خطية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
البريد الالكتروني:d.karroum.r@gmail.com

# Finding Exact Bright Soliton Solutions for Generalized Burgers-Huxley Equation with Constant Coefficients

**Dr. Ramez Karroum** *

**(Received 19 / 5 / 2019. Accepted 16 / 10 /2019)**

## □ ABSTRACT □

The aim of this research is to present exact analytical bright soliton solutions for generalized Burgers-Huxley equation with constant coefficients by using the solitary wave ansatz method. Necessary conditions for existence of this solutions are presented. The graphs that the wave is soliton and bright and is moving to the right as time changes, It also shows the effect of the coefficient $\beta$ on the amplitude of this wave. The study shows that the using method is efficient to give this kind of solutions for the nonlinear partial differential equations.

**Keywords:** Burgers-Huxley equation – soliton wave - solitary wave ansatz method – nonlinear partial differential equations.

* **Associated Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. E- mail: d.karroum.r@gmail.com**

## مقدمة

لقد أثار موضوع انتشار الأمواج المنعزلة *(soliton)* في الأنظمة غير الخطية في السنوات الأخيرة اهتمام الكثير من الباحثين الرياضيين والفيزيائيين على حد سواء، إذ تظهر هذه المعادلات في مجموعة كبيرة من المفاهيم مثل ميكانيك السوائل، فيزياء البلازما، الألياف الضوئية، فيزياء الجسم الصلب، وفي الفيزياء الكيميائية وبعض مجالات الجيوكيمياء وعلم الأحياء.... يمكن وصف سلوك هذه الأمواج رياضياً بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية، إذ أن الظواهر المذكورة تعد كحلول لمجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. يقال عن موجة إنها موجة منعزلة *(soliton)* إذا كانت موجة غير خطية محلية محافظة على شكلها دون أي تغيير على طول الانتشار. يظهر من بين هذه المعادلات معادلة برغرز هاكسلي المعممة ذات المعاملات الثابتة التي قدمهاSatsuma في عام 1986 في المرجع [1]، فهي تعد أنموذج أولي لوصف التفاعل بين آليات التفاعل وتأثيرات الحمل الحراري ووسائل نقل الانتشار، كما أنها تصف توليد النبض في الألياف العصبية في الفيزياء العصبية وحركة الجدار في البلورات السائلة [2]، ولهذه المعادلة الشكل الآتي:

$$u_t + \alpha u^n u_x - \nu u_{xx} = \beta u(u^n - \gamma)(1-u^n) \qquad (1)$$

حيث أن $u = u(x,t), \gamma \in (0,1)$ و $n \ge 1$ و $\alpha, \beta, \nu$ ثوابت حقيقية. هناك حالات خاصة لهذه المعادلة تظهر كنماذج رياضية لبعض الظواهر الفيزيائية، فمن أجل $\alpha = 0, n = 1$، نحصل على معادلة هاكسلي [4،3]:

$$u_t - \nu u_{xx} = \beta u(u-\gamma)(1-u) \qquad (2)$$

ومن أجل $\alpha = 1, \beta = 0, n = 1$، نحصل على معادلة برغرز التي تصف المجال البعيد لانتشار الموجة في أنظمة التبديد غير الخطية [5،6]:

$$u_t + \alpha u u_x - \nu u_{xx} = 0 \qquad (3)$$

ومن أجل $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, n = 1$، نحصل على معادلة برغرز هاكسلي [7]:

$$u_t + \alpha u u_x - \nu u_{xx} = \beta u(u-\gamma)(1-u) \qquad (4)$$

نشير أيضاً إلى أن المعادلة (1) تتمتع بالخاصة الانسحابية [8]. هناك العديد من الدراسات التي تناولت المعادلة (1)، إذ كان أولهم *Wang* وآخرون في عام 1990 حيث قدموا حلول موجية دقيقة باستخدام تحويل غير خطي في [9]، ثم قام *Hashim* وآخرون في عام 2006 في [10] بحلها باستخدام طريقة تحليل أدوميان، وفي عام 2007 قدم *El–danaf* حلول ذات موجة انفرادية باستخدام تحويل غير خطي أيضاً في [8]، كما قدم*Bataineh* وآخرون في عام 2009 حلول تحليلية باستخدام طريقة التحليل الهوموتوبي في [11]، وفي العام ذاته قدم *Xi–Jun* وآخرون حلول ذات موجة جوالة باستخدام طريقة التكامل الأول في [12]، وفي نفس العام أيضاً قدم *Alipour* وآخرون حلول تحليلية باستخدام طريقة الدالة الأسية في [13]. في عام 2010 قدم *Biazar* و*Mohammadi* حلولاً لها باستخدام طريقة التحويل التفاضلي في [14]، وفي العام نفسه قدم *Gao* و*Zhao* حلول دقيقة جديدة باستخدام طريقة الدالة الأسية في [15]، ثم قام *Krisnangkura* وآخرون في عام 2012 في [16] بتقديم حلول ذات موجة جوالة باستخدام دالة الظل القطعي الزائدي القياسية، وأخيراً قدم *Wang* وآخرون في ذات العام حلول صريحة جديدة باستخدام طريقة *G′/G* في [17]، وأيضاً في العام نفسه قدم *Feng* و*Tian* حلول ذات موجة جوالة باستخدام طريقة تناظر*Lie* في [18].

سنقوم في بحثنا هذا بالتركيز على تقديم حلول دقيقة ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)* لمعادلة برغرز هاكسلي ذات المعاملات الثابتة باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي الانفرادي *(solitary wave ansatz)* المستخدمة في المرجع [19]، إذ من الملاحظ أن لهذا النوع من الحلول الموجية أهمية كبيرة ليس فقط لأن معادلة برغرز هاكلسي ذات خصائص رياضية مهمة بل أيضاً لما لظاهرة الأمواج المنعزلة من تطبيقات عملية واعدة في مجموعة كبيرة من الظواهر غير الخطية، كما سنقدم شروط لازمة لوجود هذا النوع من الحلول على معاملات المعادلة.

## أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)* لمعادلة برغرز هاكسلي المعممة ذات المعاملات الثابتة ومن أية درجة باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي *(solitary wave ansatz)*، حيث يعد هذا البحث ذو أهمية كبرى للباحثين الفيزيائيين، لأنه يقدم حلول ذات طبيعة فيزيائية فريدة لها العديد من التطبيقات وخاصة في الظواهر التي تنمذج بمعادلات غير خطية، الأمر الذي يساعد الباحثين في فهمها والسيطرة عليها.

## طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية الجزئية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وحل جمل المعادلات الجبرية وبرامج الحسابات الرياضية الصيغية.

## النتائج والمناقشة:

**حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)* للمعادلة (1):**

سنفرض أن $u(x,t)$ حل المعادلة (1) يعطى بالشكل الآتي:

$$u(x,t)=\frac{\sigma}{\cosh^{p}\left[\eta\left(x-\mu t\right)\right]} \tag{5}$$

حيث تمثل $\sigma$ سعة الموجة المنعزلة، وتمثل $\mu$ سرعة الموجة المنعزلة و $\eta$ عرض معكوس للموجة المنعزلة، وهذه الثوابت سيتم تحديدها لاحقاً، و $p$ عدد صحيح موجب سيحدد خلال عملية إيجاد الحل بدلالة $n$.

لنكتب أولاً المعادلة (1) بالشكل الآتي:

$$u_t+\alpha u^n u_x-\nu u_{xx}+\beta\gamma u-\beta(1+\gamma)u^{n+1}-\beta u^{2n+1}=0 \tag{6}$$

لنوجد مشتقات العلاقة (5) وفق الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma p\eta\mu}{\cosh^{p}\left[\eta\left(x-\mu t\right)\right]}\tanh\left[\eta\left(x-\mu t\right)\right] \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\sigma p\eta}{\cosh^{p}\left[\eta\left(x-\mu t\right)\right]}\tanh\left[\eta\left(x-\mu t\right)\right] \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\eta^2\sigma\left(\frac{p^2}{\cosh^{p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}-\frac{p(p+1)}{\cosh^{p+2}\left[\eta(x-\mu t)\right]}\right) \tag{9}$$

بتعويض العلاقات (7)−(9) في المعادلة (6)، نحصل على:

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma p\eta\mu}{\cosh^{p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}\tanh\left[\eta(x-\mu t)\right]-\frac{\sigma^{n+1}\alpha p\eta}{\cosh^{np+1}\left[\eta(x-\mu t)\right]}\tanh\left[\eta(x-\mu t)\right]\\&+\left(\beta\gamma\sigma-\nu\eta^2\sigma p^2\right)\frac{1}{\cosh^{p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}+\frac{\nu p(p+1)}{\cosh^{p+2}\left[\eta(x-\mu t)\right]}\\&-\beta(1+\gamma)\frac{\sigma^{n+1}}{\cosh^{(n+1)p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}-\beta\frac{\sigma^{2n+1}}{\cosh^{(2n+1)p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}=0\end{aligned} \tag{10}$$

للموازنة بين $u_{xx}$ الحد ذو الأعلى مرتبة اشتقاق مع الحد اللاخطي $u^{2n+1}$ نقوم بمساواة قوتي $\frac{1}{\cosh^{(2n+1)p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}$ و $\frac{1}{\cosh^{p+2}\left[\eta(x-\mu t)\right]}$ ، فنحصل على:

$$2np+p=p+2 \tag{11}$$

ومنه:

$$p=\frac{1}{n} \tag{12}$$

الآن بجعل معاملات كل من $\frac{1}{\cosh^{p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}$ ومجموع معاملات $\frac{1}{\cosh^{p+2}\left[\eta(x-\mu t)\right]}$ مع معاملات $\frac{1}{\cosh^{(2n+1)p}\left[\eta(x-\mu t)\right]}$ مساوية للصفر، نحصل على:

$$\left(\beta\gamma\sigma-\nu\eta^2\sigma p^2\right)=0 \tag{13}$$

$$\nu p(p+1)-\beta\sigma^{2n+1}=0 \tag{14}$$

بتعويض (12) في (13) و(14)، نحصل على:

$$\left(\beta\gamma\sigma-\nu\eta^2\sigma\frac{1}{n^2}\right)=0 \tag{15}$$

$$\nu\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)-\beta\sigma^{2n+1}=0 \tag{16}$$

من العلاقة (15)، نحصل على:

$$\eta=n\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\nu}} \tag{17}$$

وذلك بشرط كون $\beta.\nu>0$ ، تحسب العلاقة (17) العرض المعكوس للموجة المنعزلة، ونلاحظ أنه مقدار ثابت.

من العلاقة (16)، نحصل على سعة الموجة المنعزلة:

$$\sigma = \left( \frac{\nu (1+n)}{n^2 \beta} \right)^{\frac{1}{2n+1}} \tag{18}$$

نلاحظ بأن السرعة $\mu$ مستقلة عن عرض الموجة وسعتها. أما بقية المطابقات فلا نأخذها لأنه سينتج عنها الحل البديهي (الحل الصفري).

بتعويض العلاقتين (17) و(18) في العلاقة (5) نحصل على حل المعادلة (1):

$$u(x,t) = \frac{\left( \frac{\nu (1+n)}{n^2 \beta} \right)^{\frac{1}{2n+1}}}{\cosh^{\frac{1}{n}} \left[ n \sqrt{\frac{\beta \gamma}{\nu}} (x - \mu t) \right]} \tag{19}$$

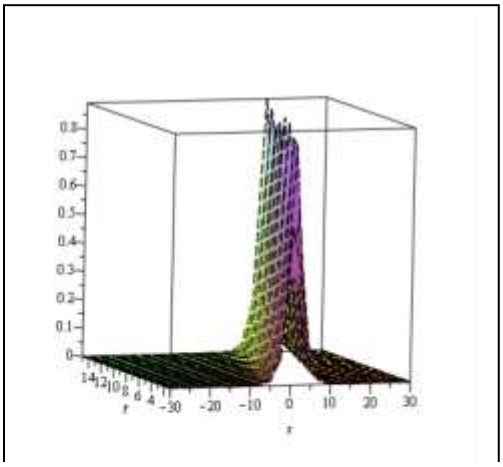
وشرط وجود هذا الحل هو $\beta . \nu > 0$ .

من أجل $\alpha = 0, n = 1$ نحصل على حل ذو موجة منعزلة ظاهرة لمعادلة هاكسلي (2):

$$u(x,t) = \frac{\left( \frac{2\nu}{\beta} \right)^{\frac{1}{3}}}{\cosh \left[ \sqrt{\frac{\beta \gamma}{\nu}} (x - \mu t) \right]} \tag{20}$$

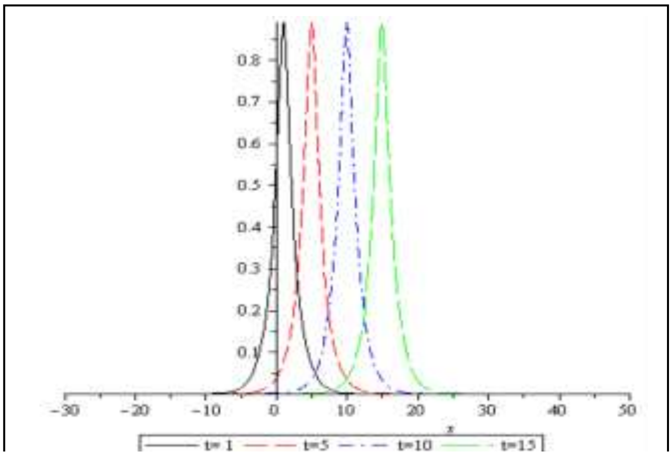
ومن أجل $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, n = 1$ ، نحصل على حل ذو موجة منعزلة ظاهرة لمعادلة برغرز هاكسلي (4) وهو ذاته حل معادلة هاكسلي، لأن الحل مستقل عن $\alpha$ .

إن الحل (19) الذي حصلنا عليه في هذا البحث مختلف عما جاء في المراجع المذكورة في المقدمة ونلاحظ بأنه ذو طبيعة موجة منعزلة ظاهرة كما نرى في الشكل (1)، حيث $n = 3, \nu = 1, \beta = 1, \mu = 1$ . $\gamma = 0.5, \ -30 \le x \le 30, 1 \le t \le 15$



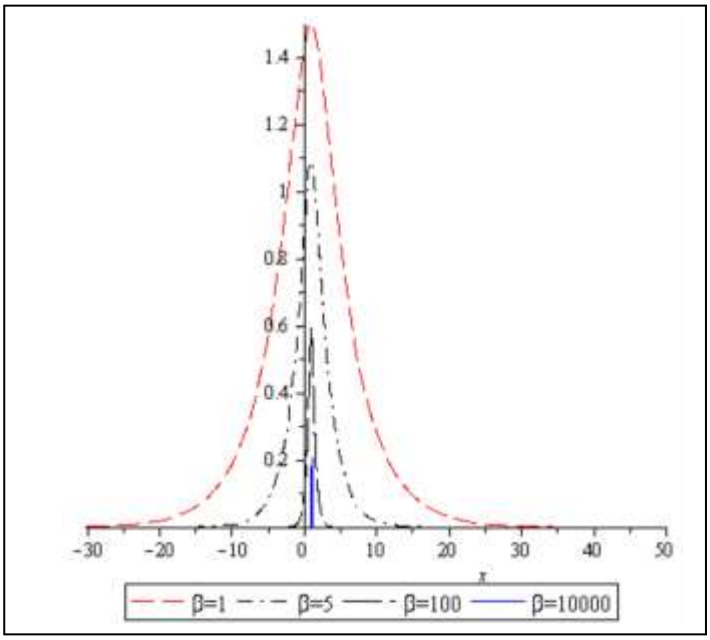

**الشكل (1) يوضح شكل الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة**

كما يبين الشكل (2) حركة الموجة المنعزلة إلى اليمين عندما $t=1,5,10,15$، مع ذات القيم بالنسبة لبقية المتحولات.




**الشكل (2) يوضح حركة تقدم الموجة المنعزلة الظاهرة إلى اليمين مع تغير الزمن**

بينما يبين الشكل (3) تأثير $\beta$ على سعة الموجة المنعزلة، إذ نلاحظ بأن السعة $\sigma$ تسعى نحو الصفر عندما $\beta$ كبيرة بقدر كافٍ، إذ أخذنا $n=2, \nu=10, \gamma=0.5, \mu=1$، و $t=1$ والقيم $\beta=1,5,100,10000$.




**الشكل (3) يوضح حركة تأثير $\beta$ على سعة الموجة المنعزلة**

## الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا البحث حل ذو موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)* لمعادلة برغرز هاكسلي المعممة ذات المعاملات الثابتة وكذلك لمعادلات تعد حالات خاصة منها، وبينا من خلال بعض الرسومات البيانية بأن الموجة بالفعل منعزلة وظاهرة وتتحرك نحو اليمين مع تغير الزمن، وقدمنا شرط لازم لوجود هذا النوع من الحلول، كما أظهرنا من خلال هذه الرسومات تأثير المعامل $\beta$ على سعة هذه الموجة، كذلك تبين أيضاً عدم ارتباط السرعة بالسعة وهذا ما يعطي ظاهرة الموجة المنعزلة *(soliton)*. نشير بأن هذا الحل غير موجود في المراجع إلى الآن. أظهرت هذه الدراسة فعالية الطريقة المتبعة في الحصول على مثل هذه الحلول التي تصف العديد من الظواهر الفيزيائية، ونأمل بأن تساعد الفيزيائيين في مجالات الفيزياء المختلفة. إن جميع العمليات الحسابية والرسومات البيانية تمت باستخدام برنامج *Maple13*.

## المراجع

[1] SATSUMA, J., ABLOWITZ, M., FUCHSSTEINER, B., and KRUSKAL, M. *Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations*, World Scientific, Singapore, 1987.

[2] MENG, D.-X., GAO, Y.-T., WANG, L., GAI, X.-L. *N-Fold Darboux Transformation and Solitonic Interactions of a Variable Coefficient Generalized Boussinesq System in Shallow Water*, Applied Mathematics and Computation 218, 2011, 4049-4055.

[3] HEREMAN, W. *Computer Physics Communications*. 65, 1991, 143-150.

[4] PARKES, E.J., and DUFITY, B.R. *Computer Physics Communications*. 98, 1996, 288-300.

[5] BURGER, J.M. *A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence*. In: Adv in App Mech I. New York: Academic Press; 1948. p. 171-99.

[6] LIU, S.D., LIU, S.K., YE, Q.X. *Explicit Traveling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations*, Math. Pract. Theory 28, 1998, 289-301.

[7] LOSKUTOV, A., YU. and MJKHALLOV, A.S. *Introduction to Synergetic*. Nauka, Moscow, 1990.

[8] EL-DANAF, T.S. *Solitary Wave Solutions for the Generalized Burgers-Huxley Equation*. Int. J. Nonlinear Sc. and Num. Sim., vol. 8, no. 3, 2007, pp. 315–318.

[9] WANG, X.Y., ZHU, Z.S., and LU, Y.K. *Solitary Wave Solutions of the Generalized Burgers-Huxley Equation*, Journal of Physics A,vol. 23, no. 3, 1990, pp. 271–274.

[10] HASHIM, I., NOORANI, M.S.M., SAID AL-HADIDI, M.R., *Solving the Generalized Burgers–Huxley Equation Using the Adomian Decomposition Method.* Mathematical and Computer Modelling 43, 2006, 1404–1411.

[11] BATAINEH, A.S., NOORANI, M.S.M., HASHIM, I. *Analytical Treatment of Generalized Burgers-Huxley Equation by Homotopy Analysis Method*, Bull. Malaya Math. Sci. Soc., 32, 2009, pp. 233-243

[12] XI-JUN, D., ZI-ZONG, Y., LI-BO, H. *Travelling Solitary Wave Solutions for the Generalized Burgers–Huxley Equation with Nonlinear Terms of Any Order*, Chinese Physics B, Vol 18 No 8, 2009, pp 3169-05.

[13] ALIPOUR, M.M., GANJI, D.D., DAVODI, A.G. *An Application of Exp—Function Method to the Generalized Burger's-Huxley Equation*, Selçuk J. Appl. Math. Vol. 10. No. 1. 2009, pp. 121-133.

[14] BIAZAR, J., and MOHAMMADI, F. *Application of Differential Transform Method to the Generalized Burgers–Huxley Equation*, Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), Vol. 05, Issue 10, 2010, pp. 1726– 1740
[15] GAO, H., ZHAO, R.X. *New Exact Solutions to the Generalized Burgers–Huxley Equation*. Applied Mathematics and Computation 217, 2010, 1598–1603.
[16] KRISNANGKURA, M., CHINVIRIYASIT, S. and CHINVIRIYASIT, W. *Analytic Study of the Generalized Burger's–Huxley Equation by Hyperbolic Tangent Method*. Applied Mathematics and Computation, 218,2012, 10843-10847
[17] WANG, G.-W., LIU, X.-Q. and ZHANG, Y.-Y. *New Explicit Solutions of the Generalized Burgers-Huxley Equation*, Vietnam Journal of Mathematics, vol. 41, no. 2, 2013 pp. 161–166.
[18] FENG, Z., TIAN, J. *Travelling Wave Solutions of the Burgers–Huxley Equation*, IMA Journal of Applied Mathematics (2012) 77, 316–325.
[19] BISWAS, A. *1-Soliton Solution of the K(m,n) Equation with Generalized Evolution*. Phys Lett A 372 (25), 2008, 4601–4602.