دراسة التداخل بين فضاءات أورليتش–مودليشن

الدكتور محمد علي[1]

الدكتور حسن بدور[2]

بشرى دراج[3]

(تاريخ الإيداع 24 / 4 / 2019. قُبِل للنشر في 8 / 7 /2019)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى مسائل التحليل التابعي وهي مسألة تداخل الفضاءات التابعية، وبشكل خاص درسنا تداخل فضاءات أورليتش–مودليشن $M^{\phi}(\mathbb{R}^d)$ المتعلقة بتعريف فضاء أورليتش، والذي بدوره معرف بالاعتماد على ϕ تابع يونغ، حيث قمنا بدراسة بعض حالات التداخل لهذا الفضاء من أجل حالات مختلفة للتابع يونغ .

كما قمنا بدراسة حالة خاصة للتداخل بين فضاء موديلشن $M_{a,b}^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ وفضاء أورليتش–موديلشن $M^{\phi}(\mathbb{R}^d)$ بحيث تابع يونغ معرف بالشكل $\phi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

الكلمات المفتاحية: التداخل، فضاء أورليتش، فضاء أورليتش–مودليشن.

[1] أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية–Alimohamad524@gmail.com .

[2] أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية–hassanbaddour@gmail.com

[3] طالبة دراسات عليا (دكتوراه)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية– Boushra.darrag92@gmail.com

Inclusion relation between orlicz-modulation spaces

Dr. Mohamad Ali [4]
Dr. Hassan Baddour[5]
Boushra Darrag[6]

(Received 24 / 4 / 2019. Accepted 8 / 7 /2019)

☐ ABSTRACT ☐

In this paper we study a problem at functional analysis, it is the inclusion of function spaces. Especially we study the inclusion of Orlicz-Modulation spaces $M^{\phi}(\mathbb{R}^d)$ associated to Orlicz space which is defined by the dependence of young function, so we study some inclusion cases for this space for different cases of young function.

We also study a special case of the inclusion between Modulation space $M^{p,q}_{a,b}(\mathbb{R}^d)$ and Orlicz-Modulation $M^{\phi}(\mathbb{R}^d)$, which is the Orlicz-Modulation space to young's function $\phi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

Key word: inclusion, orlicz space, orlicz-modulation space.

[4] **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria- Alimohamad524@gmail.com.**

[5] **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria- hassanbaddour@gmail.com.**

[6] **Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria- Boushra.darrag92@gmail.com.**

مقدمة

يقسم التحليل التابعي بشكل عام إلى مجموعة من الأقسام الرئيسية وأغلبها تُبنى الدراسات فيها على مفهوم الفضاء التابعي، الأمر الذي أدى إلى نشوء واحد من أهم أقسام التحليل التابعي وهو نظرية الفضاءات. درسنا في هذا البحث بعض المسائل المتعلقة بالبنية الرئيسية في التحليل التابعي وهي الفضاءات وبشكل خاص فقد توصلنا إلى بعض النتائج التي تخص تداخل فضاءات أورليتش–مودليشن.

فضاء أورليتش قُدم عام 1932 من قبل ORLICZ [5,6]، أما فضاء مودليشن قُدم عام 1983 من قبل FEICHTINGER [2]، في عام 2014 تم توسيع فضاء مودليشن المتعلق بفضاءات ليبيغ إلى فضاءات مودليشن متعلقة بفضاءات أورليتش التي تعتبر تعميماً لفضاء ليبيغ من قبل SCHNACKERS [10].

قدم حديثاً العديد من الباحثين دراسات مختلفة في فضاء مودليشن نذكر منها:

- قام KATO [3] بدراسة فضاءات مودليشن وتطبيقاتها.
- كما درس WEICHAO وأخرون [11] مسألة التداخل بين فضاءات مودليشن وفضاءات تريبل.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث من كونه يُعنى بدراسة علاقة الفضاءات التابعية بين بعضها البعض، ويتجلى هدف البحث الرئيسي بدراسة علاقات التداخل بين فضاءات أورليتش–مودليشن.

طرائق البحث ومواده

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل التابعي ونظرية الفضاءات، لذلك فأن الطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية الفضاءات وبعض النظريات الأساسية في التحليل التابعي.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

- يُدعى المتجه $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ من أجل $\alpha_i \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ متعدد الأدلة، والعدد $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ يرمز إلى طويلة α.
- $C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ هو فضاء التوابع القابلة للأشتقاق باستمرار.
- $D^{\alpha} f(x)$ هو مشتق التابع من المرتبة $|\alpha|$.

<u>تعريف 1</u> فضاء شوارتز S [4]

نقول إن التابع $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى فضاء شوارتز S، إذا وفقط حقق الشروط الآتية:

1) التابع f ينتمي إلى الصف C^{∞}.

2) من أجل أي دليلين α و β فإن

$$P_{\beta,\alpha}(f) = sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^{\beta}\, D^{\alpha} f(x) \right| < \infty$$

❖ أما تعريف مفهوم التقارب في الفضاء S، فهو كما يأتي:

تعريف 2 التقارب في S:

لتكن $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية من S، نقول إن متتالية التوابع $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تتقارب في S من العنصر f من S إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\ (\beta,\alpha)\in\mathbb{N}^n\ ,\qquad \lim_{m\to\infty} P_{\beta,\alpha}(f_m-f)=0$$

تعريف 3 فضاء شوارتز الثنوي S' [4]

فضاء شوارتز الثنوي هو أسرة كل التابعيات $f\colon S(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ بحيث يتحقق الشرطين الآتيين:

1. $f(\mu h_1+\lambda h_2)=\mu\, f(h_1)+\ \lambda\, f(h_2)$ من أجل كل $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ و $h_1,h_2\in S(\mathbb{R}^d)$.
2. $\lim_{n\to\infty} f(h_n)=0$ من أجل كل متتالية $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset S(\mathbb{R}^d)$ بحيث $h_n\to 0$ في $S(\mathbb{R}^d)$.

نرمز لفضاء شوارتز الثنوي بـ $S'=S'(\mathbb{R}^d)$.

تعريف 4 تابع Young [7,4]

يُدعى التابع المحدب $\phi:[0,\infty)\ \longrightarrow[0,\infty]$ الذي يحقق الشروط التالية:

1) $\phi(0)=0$.

2) $\lim_{x\to\infty}\phi(x)\ =\infty$.

بتابع Young.

تعريف 5 التابع المتمم [7,4]

ليكن ϕ تابع Young، عندئذ التابع المحدب $\psi:[0,\infty)\ \longrightarrow[0,\infty]$ المعرف بالعلاقة:

$$\psi(y)=\sup\{x\ y-\phi(x)\qquad :\ \ x\geq 0\}$$

يُدعى التابع المتمم للتابع ϕ.

تعريف 6 [4]:

ليكن ϕ_1 و ϕ_2 تابعا Young، يُقال بأن $\phi_1\prec\phi_2$ إذا وجد ثابتان $c>0$ و $T\geq 0$ يحققان العلاقة التالية:

$$\phi_1(x)\leq\ \phi_2(c\,x)\qquad for\ all\ \ x\geq T$$

وإذا كان $\phi_1\prec\phi_2$ و $\phi_2\prec\phi_1$ يقال عن التابعين ϕ_1 و ϕ_2 إنهما متكافئان.

تعريف 7 فضاء أورليتش: Olicz space [7,4]

ليكن (Ω,Σ,dx) فضاء قياس و ϕ تابع young.

يُعرف فضاء أورليتش بأنه أسرة كل التوابع القابلة للقياس $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ المحققة للشرط الآتي:

$$\int_{\Omega}\phi(\alpha|f(x)|)dx\ <\infty\qquad for\ some\ \ \alpha>0$$

يرمز له بالرمز $L^{\phi}(\Omega)$.

تعريف 8 [9,4] :

يُعطى النظيم في فضاء أورليتش $L^{\phi}(\Omega)$ من أجل التابع ϕ بالشكل التالي:

Print ISSN: 2079-3057 , Online ISSN:2663-4252

$$N_\phi(f)=\inf\left\{k>0 \quad : \int_\Omega \phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right)dx \le 1\right\}$$

وباستخدام التابع ψ المتمم لـ ϕ تم تعريف نظيم آخر على فضاء أورليتش يُعطى بالعلاقة:

$$\|f\|_{L^\phi(\Omega)} = Sup\left\{\int_\Omega |f(x).g(x)|dx \quad ; \quad \int_\Omega \psi(|g(x)|)dx \le 1\right\}$$

❖ كما أن النظم المعرفة على هذا الفضاء تحقق علاقة تكافؤ بالشكل التالي:[9,4]

$$N_\phi \le \|f\|_{L^\phi} \le 2N_\phi$$

<u>تعريف 9</u> [1]:

ليكن $0 \neq g \in S(\mathbb{R}^d)$، عندئذ تحويل فوربيه قصير المدى (short-time Fourier transform) واختصاراً (STFT) للتابعي $f \in S'(\mathbb{R}^d)$ المتعلق بـ g يعرف بالعلاقة:

$$V_g f(x,w) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\,\overline{g(t-x)}\,e^{-2\pi i t.w}\,dt$$

من أجل كل $x,w \in \mathbb{R}^d$.

<u>تعريف 10</u> فضاء موديلشن (Modulation space) [1]

ليكن $g \in S(\mathbb{R}^d)$. عندئذ يعرف فضاء موديلشن $M^{p,q}_{a,b}(\mathbb{R}^d)$ من أجل $1 \le p,q \le \infty$ بأنه كل التابعيات $f \in S'(\mathbb{R}^d)$ التي تحقق الشرط:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|V_g f(x,w)|^p\,(1+|x|)^{ap}\,dx\right)^{\frac{q}{p}}(1+|w|)^{bq}\,dw\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

ويعرف عليه نظيم بالعلاقة التالية:

$$\|f\|_{M^{p,q}_{a,b}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|V_g f(x,w)|^p\,(1+|x|)^{ap}\,dx\right)^{\frac{q}{p}}(1+|w|)^{bq}\,dw\right)^{\frac{1}{q}}$$

من أجل كل $x,w \in \mathbb{R}^d$.

<u>تعريف 11</u> فضاء أورليتش– موديلشن : (Orlicz-Modulation space) [10]

ليكن $0 \neq g \in S(\mathbb{R}^d)$ و ϕ تابع Young عندئذ فضاء أورليتش–موديلشن $M^\phi(\mathbb{R}^d)$ يعرف بالشكل:

$$M^\phi(\mathbb{R}^d) = \{f \in S'(\mathbb{R}^d) \quad : \quad V_g f \in L^\phi(\mathbb{R}^{2d})\}$$

الفضاء M^ϕ يشكل فضاء باناخ مع النظيم المعرف عليه بالشكل:[10]

$$\|f\|_{M^\phi} = \|V_g f\|_{L^\phi}$$

مبرهنة مساعدة 1 (المؤثر الخطي المغلق) [9]

ليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً، حيث $D(T) \subset X$ وحيث X و Y فضاءان منظمان. عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون T مغلقاً هو أن تتحقق الخاصة التالية: إذا كان $x_n \longrightarrow x$ حيث $x_n \in D(T)$ وكان $Tx_n \longrightarrow y$، فإن $x \in D(T)$ و $Tx = y$.

مبرهنة مساعدة 2 (البيان المغلق) [9]

ليكن X و Y فضاءي باناخ، وليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً مغلقاً، حيث $D(T) \subset X$. عندئذ اذا كانت $D(T)$ مغلقة في X، فإن المؤثر T يكون محدوداً.

النتائج والمناقشة:

❖ درسنا في المبرهنة التالية مسألة تداخل فضاء أورليتش–مودليشن:

مبرهنة 1:

ليكن ϕ_1, ϕ_2 تابعي Young، عندئذ الشرطين التاليين متكافئين:

1) $M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$.

2) من أجل كل $f \in M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$ لدينا $\|f\|_{M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d)}$.

الاثبات:

$(1) \Rightarrow (2)$:

لنفرض أن $M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$، ولنعرف المؤثر

$$I: M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$$

$$I(f) = f$$

ولنبرهن أن I مغلق.

لتكن (f_n) متتالية بحيث $f_n \longrightarrow f$ في $M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d)$ و $I(f_n) = f_n \longrightarrow h$ في $M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$.

بما أن $f_n \longrightarrow f$ في $M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d)$ وبالتالي حسب التداخل $M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$ يكون لدينا $f_n \longrightarrow f$ في $M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$.

ومن كون $M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$ فضاء باناخ نجد $f = h$.

بالتالي I مغلق حسب مبرهنة المؤثر الخطي المغلق.

ومنه حسب مبرهنة البيان المغلق يكون المؤثر المغلق I محدوداً أي يوجد ثابت $c > 0$ بحيث

$$\|If\|_{M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d)}$$

وبما أن $If = f$ ينتج لدينا:

$$\|f\|_{M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d)}$$

$(2) \Rightarrow (1)$:

لنفرض أن $\|f\|_{M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d)}$ ولنثبت أن $M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$.

لنأخذ $f \in M^{\Phi_1}(\mathbb{R}^d)$ وبالتالي

$\|f\|_{M^{\Phi_1}(\mathbb{R}^d)} < \infty$

من الفرض لدينا: $\|f\|_{M^{\Phi_2}(\mathbb{R}^d)} \leq c\|f\|_{M^{\Phi_1}(\mathbb{R}^d)}$

فيكون

$\|f\|_{M^{\Phi_2}(\mathbb{R}^d)} < \infty$

أي أن $f \in M^{\Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ ومنه يتحقق المطلوب.

- ❖ في المبرهنة التالية نثبت التداخل بين فضاءات أورليتش مودليشن من أجل شروط أخرى.

مبرهنة 2:

ليكن Φ_i تابع Young من أجل $i = 1,2$، إذا تحقق الشرط $\Phi_1 \prec \Phi_2$ عندئذ يتحقق لدينا التداخل التالي:

$$M^{\Phi_2}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\Phi_1}(\mathbb{R}^d)$$

الاثبات:

إذا كان $f \in M^{\Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ فإن تحويل فورييه له قصير المدى $V_g f$ المتعلق بـ g سينتمي إلى فضاء أورليش $L^{\Phi_2}(\mathbb{R}^{2d})$ أي أن $V_g f \in L^{\Phi_2}(\mathbb{R}^{2d})$.

بما أن $\Phi_1 \prec \Phi_2$ عندئذ يوجد ثابت موجب c_1 بحيث $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(c_1\, x)$

بالتالي يكون:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \Phi_1\left(\alpha\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw \leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \Phi_2\left(c_1.\alpha\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw \quad \ldots\ldots(1)$$

نرمز بـ $\alpha\,.c_1 = \beta$ ولما كان $V_g f \in L^{\Phi_2}(\mathbb{R}^{2d})$ يكون $\int_{\mathbb{R}^{2d}} \Phi_2\left(\beta\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw < \infty$، منه ومن (1) ينتج أن:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \Phi_1\left(\alpha\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw \leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \Phi_2\left(\beta\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw < \infty$$

ومنه $V_g f \in L^{\Phi_1}(\mathbb{R}^{2d})$ أي $f \in M^{\Phi_1}(\mathbb{R}^d)$

- ❖ بالاعتماد على المبرهنة السابقة نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة 3:

لتكن Φ_i توابع Young من أجل $i = 1,2,3,4$، إذا تحقق الشرط $\Phi_1 \prec \Phi_3$ و $\Phi_2 \prec \Phi_4$ عندئذ يتحقق لدينا التداخل التالي:

$$M^{\Phi_3}(\mathbb{R}^d) \cap M^{\Phi_4}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\Phi_1}(\mathbb{R}^d) \cap M^{\Phi_2}(\mathbb{R}^d)$$

الاثبات:

إذا كان $f \in M^{\Phi_3}(\mathbb{R}^d) \cap M^{\Phi_4}(\mathbb{R}^d)$ فإن $f \in M^{\Phi_4}(\mathbb{R}^d)$ و $f \in M^{\Phi_3}(\mathbb{R}^d)$.

بما أن $\phi_1 \prec \phi_3$ عندئذ يوجد ثابت موجب c_2 بحيث $\phi_1(x) \leq \phi_3(c_2\, x)$ ومنه حسب المبرهنة السابقة يكون لدينا $M^{\phi_3}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d)$ بالتالي

$$f \in M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \qquad \ldots\ldots(2)$$

إذا كان $\phi_2 \prec \phi_4$ فإنه يوجد ثابت c_3 بحيث $\phi_2(x) \leq \phi_4(c_3\, x)$ ومنه حسب المبرهنة السابقة يكون لدينا $M^{\phi_4}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$ بالتالي

$$f \in M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d) \qquad \ldots\ldots(3)$$

من (1) و (3) نجد أن $f \in M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \cap M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$

وبالتالي

$$M^{\phi_3}(\mathbb{R}^d) \cap M^{\phi_4}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_1}(\mathbb{R}^d) \cap M^{\phi_2}(\mathbb{R}^d)$$

مبرهنة مساعدة 3: [4]

إذا كان ϕ تابع Young و $0 \leq \alpha \leq 1$، فإن: $\phi(\alpha x) \leq \alpha\, \phi(x)$

❖ ندرس في المبرهنة التالية مسألة تداخل فضاء أورليتش–مودليشن المعرف بدلالة مجموع تابعي Young.

مبرهنة 4:

لتكن ϕ_i توابع Young من أجل $i = 1,2,3,4$ بحيث تتحقق $\phi_3 \prec \phi_1$ من أجل $c_4 \geq 1$ و $\phi_4 \prec \phi_2$ من أجل $c_5 \geq 1$ عندئذ علاقة التداخل التالية محققة:

$$M^{\phi_1+\phi_2}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi_3+\phi_4}(\mathbb{R}^d)$$

الاثبات:

من تعريف الفضاء أورليتش–مودليشن إذا كان $f \in M^{\phi_1+\phi_2}(\mathbb{R}^d)$ فإن تحويل فورييه له $V_g f$ سينتمي إلى فضاء أورليش أي أن $V_g f \in L^{\phi_1+\phi_2}(\mathbb{R}^{2d})$.

أي أن

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} (\phi_1 + \phi_2)(\beta\, |V_g f(x,w)|) dx\, dw < \infty$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} (\phi_3 + \phi_4)(\alpha |V_g f(x,w)|) dx\, dw =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_3(\alpha |V_g f(x,w)|) dx\, dw + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_4(\alpha |V_g f(x,w)|) dx\, dw$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_1(c_4 . \alpha |V_g f(x,w)|) dx\, dw + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_2(c_5 . \alpha |V_g f(x,w)|) dx\, dw$$

نرمز بـ $\alpha = \frac{\beta}{c_5 c_4}$ ولما كان $c_4, c_5 \geq 1$ فإن $0 < \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_4} \leq 1$ عندئذ من المبرهنة المساعدة 3 ينتج لدينا:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} (\phi_3+\phi_4)\left(\alpha\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_1\left(\frac{\beta}{c_5}\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_2\left(\frac{\beta}{c_4}\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw$$

$$\leq \frac{1}{c_5}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_1\left(\beta\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw + \frac{1}{c_4}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_2\left(\beta\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_1\left(\beta\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_2\left(\beta\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (\phi_1+\phi_2)\left(\beta\left|V_g f(x,w)\right|\right)dx\ dw < \infty$$

ومنه ينتج لدينا $V_g f \in L^{\phi_3+\phi_4}$ أي $f \in M^{\phi_3+\phi_4}$

وبالتالي يتحقق المطلوب.

<u>مبرهنة مساعدة 4</u> [1]:

إذا كان $0 \neq g \in S(\mathbb{R}^d)$ و $f \in S'(\mathbb{R}^d)$، فأن $V_g f$ مستمر ويوجد ثابتان $C > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث تتحقق العلاقة:

$$\left|V_g f(x,w)\right| \leq C\,(1+|x|+|w|)^N$$

من أجل كل $x,w \in \mathbb{R}^d$.

<u>مبرهنة مساعدة 5</u>: [8]

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابع قابل للاشتقاق مرتين عندئذ: f تابع محدب إذاوفقط إذا كان $f^{('')} \geq 0$.

ملاحظة:

التابع $\phi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ يحقق شروط التابع Young وذلك لأن:

$\phi(0) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$، وعلاوة على ذلك، $\phi'(x) = \ln(1+x)$ وبالتالي $\phi''(x) = \frac{1}{1+x} > 0$ من أجل $x \geq 0$ بالتالي فإن ϕ تابع محدب وذلك حسب المبرهنة المساعدة 5.

- ❖ ندرس في المبرهنة التالية حالة خاصة لعلاقة التداخل بين فضاء أورليتش–موادليشن وفضاء مودليشن:

مبرهنة 5:

ليكن $\phi(|x|) = (1+|x|)\ln(1+|x|) - |x|$ تابع Young، حيث $x \in \mathbb{R}^d$ عندئذ لدينا التداخل التالي:

$M^{1,1}_{1,1}(\mathbb{R}^d) \subset M^{\phi}(\mathbb{R}^d)$

الاثبات:

لنأخذ $f \in M_{1,1}^{1,1}$ عندئذ:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|V_g f(x,w)|\,(1+|x|)dx\right)(1+|w|)\,dw<\infty$$

ولنثبت أن $f \in M^{\phi}(\mathbb{R}^d)$.

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}(1+|V_g f(x,w)|)\ln(1+|V_g f(x,w)|)-|V_g f(x,w)|\;dx\,dw$$

$$=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\ln(1+|V_g f(x,w)|)+|V_g f(x,w)|\ln(1+|V_g f(x,w)|)-|V_g f(x,w)|\,dx\,dw$$

من العلاقة $\ln(1+|x|)\le|x|$ المحققة من أجل كل $x\in\mathbb{R}^d$ ينتج لدينا:

$$\le\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|+|V_g f(x,w)|\ln(1+|V_g f(x,w)|)-|V_g f(x,w)|\,dx\,dw$$

$$=\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\ln(1+|V_g f(x,w)|)\,dx\,dw$$

بتطبيق المبرهنة المساعدة 4 على مضمون تابع اللوغاريتم يكون لدينا:

$$\le\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\ln[\,1+C\,(1+|x|+|w|)^N\,]\,dx\,dw$$

$$\le\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\ln[(\,1+C)\,(1+|x|+|w|)^N\,]\,dx\,dw$$

$$\le\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\ln[(\,1+C)\,(1+|x|+|w|)\,]^N\;dx\,dw$$

$$=N\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\ln[(\,1+C)\,(1+|x|+|w|)\,]\;dx\,dw$$

$$<N\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\ln[1+(\,1+C)\,(1+|x|+|w|)\,]\,dx\,dw$$

$$\le N\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\,(\,1+C)\,(1+|x|+|w|)\,dx\,dw$$

ولما كان $(1+|x|+|w|)\le(1+|x|)\,(1+|w|)$ يكون لدينا:

$$\leq N(1+C)\int_{\mathbb{R}^{2d}}|V_g f(x,w)|\,(1+|x|)\,(1+|w|)\,dx\,dw$$
$$\leq N\,(1+C)\left[\int_{\mathbb{R}^{d}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d}}|V_g f(x,w)|\,(1+|x|)dx\right)(1+|w|)\,dw\right]<\infty$$

ينتج من ذلك $V_g f \in L^{\Phi}$ أي $f \in M^{\Phi}$

بالتالي يتحقق المطلوب.

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى دراسة بعض الشروط الواجب تحققها للحصول على التداخل بين فضاءات أورليتش–مودليشن، ونوصي بدراسة التداخل بين فضاءات أورليتش–مودليشن الموزن.

المراجع:

[1] GRÖCHENIG. K., *Foundations of time-frequency analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[2] FEICHTINGER H. G., *Modulation spaces on locally compact Abelian group*, Technical Report,University of Vienna, 1983. Published in: Proc. Internat. Conf. on Wavelet and Applications,99-140. New Delhi Allied Publishers, India, 2003.

[3] KATO. T., *On modulation spaces and their applications to dispersive equations*, Doctoral Thesis, (2016).

[4] KUFNER.A., JOHN. O., FUCIK. S., *Function spaces*, Noordhoff International Publishing, Czechoslovakia. (1977).

[5] ORLICZ. W., *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. intern. De l'Acad . Pol, serie A, Cracovie, Zentralblatt, Vol. 6. (1 932)

[6] ORLICZ. W., *Über Räumen* (L^M), Bull. intern . de l'Acad. Pol, serie A, Cracow (1 936).

[7] OSANCLIOL.A, *Inclusion between weighted Orlicz spaces*, J. Inequal. Appl. 390 (2014), 1–8.

[8] PERSSON.L., NICULESCU. C., *Convex Functions and Their Applications A Contemporary Approach*. Springer Science+Business Media, Inc.(2006)

[9] RAO. M. M., REN. Z. D., *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., NewYork, 1991.

[10] SCHNACKERS. C., *Orlicz modulation spaces*, Doctoral Thesis, RWTH Aachen University, 2014

[11] WEICHAO. G., W. HUOXIONG. W., GUOPING.Z., *Inclusion relations between modulation spaces and Triebel-Lizorkin spaces*, Proceedings of the American Mathmatical Society. 2017.

.