معايير لتذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد

د. سامي انجرو *

د. رامز كروم **

محمد معلا***

(تاريخ الإيداع 12 / 2 / 2019. قُبِل للنشر في 8 / 7 /2019)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد $[r(t)z'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0$، حيث أن التابع $z(t)$ يعطى بالعلاقة $z(t) = x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big)$، وذلك من خلال وضع شروط على الأمثال $c(t)$ و $r(t)$ إضافة إلى التوابع $a(t)$ و $\theta(t)$ و $\tau(t)$.

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية نصف خطية–محايد –متأخر–معيار التذبذب.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه)– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

E-mail: mhamad.moala@tishreen.edu.sy

Oscillation criteria for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with neutral

Dr. Sami Injrou [*]
Dr. Ramez Karoum**
Mohammad Moalla***

(Received 12 / 2 / 2019. Accepted 8 / 7 /2019)

□ ABSTRACT □

We aim in this work to study the oscillation of the second order generalized half-linear neutral differential equation $[r(t)z'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0;$ where $z(t) = x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big)$, by setting conditions on the coefficients $c(t)$ and $r(t)$ and the function $a(t), \theta(t)$ and $\tau(t)$.

Keywords: Half Linear Differential Equation – Neutral – Delay – Oscillation Criteria.

[*]**Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
**** Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
***** PhD Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: mhamad.moala@tishreen.edu.sy**

مقدمة

تلعب المعادلات التفاضلية بشكل عام دوراً هاماً في نمذجة العديد من المشكلات التي تصادفنا، كما تعبر عن الظواهر الطبيعية والفيزيائية بصورة رياضية، وبشكل خاص تلك المعادلات ذات الحد المتأخر(Delay)، والأخرى ذات الحد المحايد(Neutral)، إذ تتميز هذه المعادلات عن المعادلات العادية بأنه قد نجد لنفس المعادلة التأخيرية حلولاً متذبذبة (Oscillatory) وأخرى غير متذبذبة (Non-Oscillatory). تمكننا دراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلات التفاضلية ذات الحد المحايد من التنبؤ بنتائج تلك الظواهر الموصوفة، التي تظهر بعد فترة زمنية، وبالتالي إمكانية السيطرة عليها والتحكم بها. من هنا تأتي أهمية الحد المتأخر والمحايد لوصف تلك الظواهر.

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية بالشكل الآتي:[2,4,5]

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)f\big(x(t), r(t)x'(t)\big) = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $f(x,y) = |x|^{p-1}|y|^{2-p}sgn(x)$ ، و p عدد حقيقي يحقق $p \geq 1$.

يتمتع التابع $f(x,y)$ بالخواص الآتية:

1. مستمر على المنطقة $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ حيث أن،
2. $f(x,y)$ متجانس من الدرجة الأولى، أي يحقق العلاقة $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$ أياً كانت λ من $\mathbb{R}$ ،
3. يحقق التابع $f(x,y)$ العلاقة $xf(x,y) > 0$، وذلك من أجل $xy \neq 0$،
4. يضمن التابع $f(x,y)$ وجود ووحدانية الحل للمعادلة (1)، وبالتالي من أجل أي نقطة (x_1, x_2) من Ω، فإنه يوجد حل $x(t)$ للمعادلة(1) يحقق الشروط: $x(t_0) = x_1 \, , x'(t_0) = x_2$ ،
5. إذا كان التابع $F(t)$ معرفاً بالعلاقة $F(t) := tf(t,1)$، عندئذٍ يتحقق أن $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+F(t)} < +\infty$ و $\lim_{|t|\to+\infty} F(t) = +\infty$،

يقصد بتذبذب المعادلة (1) هو أن يملك كل حل من حلولها عدداً لانهائياً من الأصفار على مجال ما، أما عدم التذبذب فهو أن يوجد حل ما للمعادلة (1) بحيث يملك عدداً منتهياً من الأصفار على ذلك المجال [1,6].

درس الباحثان Došlý وŘezníčková الحلول الأساسية للمعادلة (1) في [3]، بعد ذلك وضع الباحثان Bognár و Dosly في [2] معايير مهمة من أجل تذبذب المعادلة (1)،

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد بالشكل الآتي:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0 \qquad (2)$$

حيث أن $f(x,y)$ معرف كما في المعادلة (1)، لكننا سنعالج المسألة من أجل $p \geq 2$.

إن $c(t)$ و $r(t)$ تابعان موجبان تماماً من أجل كل t من $\mathbb{R}$، والتابع $\tau(t)$ يتمتع بالخواص الآتية:

1) $\tau(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2) $\tau(t) \leq t$
3) $\tau'(t) > 0$
4) $\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$

أما $z(t)$ فيعطى بالعلاقة $z(t) = x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big)$، حيث أن $a(t)$ اشتقاقي وموجب تماماً، والتابع $\theta(t)$ يحقق أن $\theta(t) \leq t$ و $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$، حيث أن $t \in [T, +\infty[$.

درس الباحثان Fišnarová وMarík في [1] تذبذب المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، ووضعا معايير لتذبذب هذه المعادلات من خلال تذبذب المعادلات الكلاسيكية، وفي [7] استخدما تحويل ريكاتي المعدل لدراسة تذبذب المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المتأخر، ثم عمل الباحثان Marík وFišnarová في [8] على إيجاد معيار لتذبذب المعادلات ذات الحد المتأخر، وذلك من خلال دراسة تذبذب المعادلات الخطية من المرتبة الثانية.

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة (2)، وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية ذات حدٍ محايدٍ. إن لهذه الدراسة دور هام في معرفة سلوك الظواهر التي تصفها تلك المعادلة وبالتالي إمكانية التحكم بنتائج تلك الظواهر، ولذلك فإن هذا البحث يعد على درجة كبيرة من الأهمية للباحثين في المجالات العلمية النظرية والتطبيقية. يهدف البحث إلى دراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، من حيث التذبذب أو عدم التذبذب.

طرائق البحث وموارده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص في مجال نظرية المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلات التفاضلية العادية.

النتائج والمناقشة:

سنعرض في البداية بعض التمهيديات التي سنستخدمها لإتمام المبرهنات الموجودة في هذا البحث.

تمهيدية 1:

ليكن لدينا A و w و B أعداد حقيقية، حيث $w \geq 0$ و $B \geq 0$، عندئذٍ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$Aw - Bw^{\frac{p}{p-1}} \leq \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} A_+^p \frac{1}{B^{p-1}} \qquad (3)$$

حيث $A_+ = \max\{A, 0\}$.

برهان:

نجد برهان التمهيدية في المرجع [9].

تمهيدية 2:

ليكن لدينا $p \geq 2$، وليكن α و β عددان حقيقيان غير سالبين، عندئذٍ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left(\frac{1}{l}\alpha + \frac{1}{l^*}\beta\right)^{p-1} \leq \frac{1}{l}\alpha^{p-1} + \frac{1}{l^*}\beta^{p-1}$$

حيث $l^* > 1$ و $l > 1$ عددان حقيقيان مترافقان يحققان $\frac{1}{l} + \frac{1}{l^*} = 1$.

برهان:

نجد برهان التمهيدية في المرجع [9].

تمهيدية 3:

بفرض أن $\theta(\tau(t)) = \tau(\theta(t))$، عندئذٍ من أجل $p \geq 2$ يتحقق الآتي:

$$l^{p-2}x^{p-1}(\tau(t)) + l^{*p-2}\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}x^{p-1}(\tau(\theta(t))) \geq z^{p-1}(\tau(t)) \quad (4)$$

برهان:

نجد برهان التمهيدية في المرجع [9].

تمهيدية 4:

ليكن $x(t)$ حل للمعادلة(2) حيث $\tau(\theta(t)) > 0$، و $x(\tau(t)) > 0$، بفرض أن $\tau(\theta(t)) = \theta(\tau(t))$، أو أن $x(t)$ متزايد و $\tau(\theta(t)) \geq \theta(\tau(t))$، عندئذ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$l^{p-2}\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]' + l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]' + (p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t)) \leq 0 \quad (5)$$

حيث أن $Q(t) = min\{c(t), \varphi(t)c(\theta(t))\}$، إضافةً لذلك، إذا وجد a_0 عدد حقيقي موجب تماماً يحقق $a(t) \leq a_0 < +\infty$ أياً كانت $t \geq t_0$، والعدد الحقيقي الموجب θ_0 حيث $\theta'(t) \geq \theta_0$، فإنه يتحقق:

$$l^{p-2}[(r(t)z'(t))^{p-1}]' + l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]' + (p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t)) \leq 0 \quad (6)$$

برهان:

لنأخذ المعادلة (2)، ولنضرب طرفيها بـ$(p-1)|\,r(t)z'(t)|^{p-2}$، وبملاحظة العلاقة الآتية:

$$[(r(t)z'(t))^{p-1}]' = (p-1)|\,r(t)z'(t)|^{p-2}[r(t)z'(t)]'$$

تصبح المعادلة(2) كالآتي:

$$[(r(t)z'(t))^{p-1}]' + (p-1)c(t)x^{p-1}(\tau(t)) = 0 \quad (7)$$

نستبدل كل t بـ$\theta(t)$ فتصبح:

$$\frac{1}{\theta'(t)}\left[(r(\theta(t))z'(\theta(t)))^{p-1}\right]' + (p-1)c(\theta(t))x^{p-1}(\tau(\theta(t))) = 0 \quad (8)$$

حيث $z'(\theta(t)) = \frac{dz(s)}{ds}\Big|_{s=\theta(t)}$.

الآن نضرب المعادلة (7) بـl^{p-2}، ونضرب المعادلة (8) بـ$\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}$، ثم نجمع العلاقتين، وبالاستفادة من الفرضية $\tau(\theta(t)) = \theta(\tau(t))$، وحسب التمهيدية 3، نحصل على الآتي:

$$l^{p-2}\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]' + l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]' + (p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t)) \leq 0$$

وبملاحظة أن المقداران $\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]'$ و $\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]'$ سالبان، فعندما نعوض الشروط الحدية لـ$a(t)$ و $\theta'(t)$ نجد أن:

$$l^{p-2}\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]' + l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]' + (p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t)) \leq 0$$

معايير تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد

مبرهنة 1:

ليكن لدينا $\tau(\theta(t)) = \theta(\tau(t))$ و $\tau(t) \le \theta(t)$، و $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$ من أجل عدد حقيقي t_0، و $\varphi(t)$ و $\rho(t)$ تابعين موجبين تماماً، حيث أن $\rho(t)$ اشتقاقي من المرتبة الأولى على مجال $[t_0, +\infty[$، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to\infty} \sup \int_{t_0}^{t} \rho(s)Q(s) - \frac{1}{(p)^p} \frac{\rho(s) r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}} \times \left(l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p + (l^*)^{p-2} \frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)} \times \left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \left(\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right)' \frac{\theta'(s)}{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p\right) ds = \infty \qquad (9)$$

فإن المعادلة (2) متذبذبة.

برهان:

سنستخدم طريقة نقض الفرض لإنجاز البرهان. لنفرض أن الشرط (9) محقق، وأن المعادلة (2) غير متذبذبة، أي أنه يوجد حـ ل $x(t)$ للمعادلة (2) ويحقق $x(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t > t_0$. لنأخذ $t_1 > t_0$ حيث أن $min\left\{x(t), x(\tau(t)), x(\theta(t)), x\left(\theta(\tau(t))\right)\right\} > 0$ مهما كانت $t > t_1$ ، ومنه حسب تعريف $z(t)$ يكون $z(t) > 0$.

بتعويض الحل $x(t)$ في المعادلة(2) نجد أن:

$$[r(t)z'(t)]' = -c(t)f\left(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\right) < 0$$

ومنه فإن $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً، لنفرض $z'(t) \le 0$ أياً كانت $t > t_1$، أي أنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً m بحيث يحقق $r(t)z'(t) < -m < 0$ أياً كانت $t > T > t_1$، وبالتالي $z'(t) < -\frac{m}{r(t)}$، وبمكاملة الطرفين نجد أن $z(t) < z(T) - \int_T^t \frac{m}{r(t)} dt$. عندما تكون t كبيرة نجد أن $z(t) < 0$ وهذا تناقض، وبالتالي فإن $z'(t) > 0$ أياً كانت $t > t_1$، ومنه يوجد $t_2 > t_1$ بحيث أنه من أجل كل $t > t_2$ يتحقق الآتي:

$$min\left\{x(t), x(\tau(t)), x(\theta(t)), x\left(\tau(\theta(t))\right), z'(t), z'(\tau(t)), z'(\theta(t)), z'\left(\theta(\tau(t))\right)\right\} > 0.$$

لنعرّف الآن التابع w بالعلاقة $w(t) = \rho(t)\frac{\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}$. نلاحظ أن $w(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t > t_2$، باشتقاق التابع $w(t)$ نجد العلاقة الآتية:

$$w'(t) = \rho'(t)\frac{\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}} + \rho(t)\frac{\left(\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}} - (p-1)\rho(t)\frac{\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1} z'(\tau(t))\tau'(t)}{\left(z(\tau(t))\right)^{p}}$$

وبما أن $\tau(t) \le t$، وأن $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً، فإننا نجد أن $z'(\tau(t)) \ge \frac{r(t)z'(t)}{r(\tau(t))}$، وبالتالي:

$$w'(t) \le \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) + \rho(t)\frac{\left(\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}} - (p-1)\frac{\tau'(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t) r(\tau(t))} w^{\frac{p}{p-1}}(t) \qquad (10)$$

لنعرف الآن التابع V بالعلاقة $V(t)=\rho(t)\frac{\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}$، نلاحظ أن $V(t)>0$ وذلك من أجل كل $t>t_2$، وباشتقاق التابع $V(t)$ نحصل على العلاقة الآتية:

$$V'(t)=\rho'(t)\frac{\left(r(\theta(t))\,z'(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}+\rho(t)\frac{\left(\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}$$
$$-(p-1)\rho(t)\frac{\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}z'(\tau(t))\tau'(t)}{\left(z(\tau(t))\right)^{p}}$$

وبما أن $\tau(t)\le\theta(t)$، وأن $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً، فإننا نجدأن $z'\left(\tau(t)\right)\ge\frac{r(\theta(t))z'(\theta(t))}{r(\tau(t))}$، وبالتالي:

$$V'(t)\le\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}V(t)+\rho(t)\frac{\left(\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}-(p-1)\frac{\tau'(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\tau(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)\qquad(11)$$

نضرب(10) بـl^{p-2}، ونضرب(11) بـ$\frac{l^{*p-2}\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}$ ثم نجمع العلاقتين، وبالاستفادة من التمهيدية 4 نحصل على:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V'(t)\le-(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+l^{p-2}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t)-(p-1)\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$
$$+l^{*p-2}\left[\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}V(t)-(p-1)\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$

ومنه نحصل على الآتي:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)\right)'\le-(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+l^{p-2}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t)-(p-1)\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$
$$+l^{*p-2}[(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)})')V(t)$$
$$-(p-1)\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)]$$

وحسب التمهيدية 1:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)\right)'\le-(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+l^{p-2}\frac{1}{p^p}\left(\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}\right)^p\frac{\rho(t)(r(\tau(t)))^{p-1}}{(\tau'(t))^{p-1}}+l^{*p-2}\frac{1}{p^p}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\right)'\right)_+^p$$

$$\times \frac{\left(\theta'(t)\right)^{p-1}}{\left(a(\tau(t))\right)^{(p-1)^2}\varphi^{p-1}(t)} \frac{\rho(t)\left(r(\tau(t))\right)^{p-1}}{\left(\tau'(t)\right)^{p-1}} \le -(p-1)\rho(t)Q(t) + \frac{\rho(t)\left(r(\tau(t))\right)^{p-1}}{\left(\tau'(t)\right)^{p-1}} \frac{1}{p^p}$$
$$\times \left[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}\right)^p + l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + \left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\right)' \frac{\theta'(t)}{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}\right)_+^p\right]$$

بما أن $p \ge 2$، وبمكاملة الطرفين نجد أن:

$$-\lim_{t\to\infty}\sup \int_{t_0}^{t} \rho(s)Q(s) - \frac{1}{(p)^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}$$
$$\times \left[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p + (l^*)^{p-2}\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \left(\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right)' \frac{\theta'(s)}{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p\right]ds \ge l^{p-2}\,w(t)$$
$$+l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t) - l^{p-2}\,w(t_0) - l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t_0))\right)^{p-1}\varphi(t_0)}{\theta'(t_0)}V(t_0)$$

وبالتالي ينتج لدينا أن $l^{p-2}\,w(t) + l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t) \le -\infty$، لكن بما أن $w(t)$ و $\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)$ توابع موجبة فإننا نحصل على تناقض.

نتيجة 1:

بفرض أن $\tau(\theta(t)) = \theta(\tau(t))$ و $\tau(t) \le \theta(t)$، وليكن $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{r(t)} = +\infty$ من أجل عدد حقيقي t_0 ، وليكن $\rho(t)$ و $\varphi(t)$ توابع موجبة تماماً، حيث أن $\rho(t)$ اشتقاقي من المرتبة الأولى على مجال $[t_0, +\infty[$، وبفرض أنه يوجد عددان حقيقيان $a_0 \ge 0$ و $\theta_0 > 0$ يحققان أنه من أجل كل $t \ge t_0$ فإن $a(t) \le a_0 < +\infty$ وأن $\theta'(t) \ge \theta_0$، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to+\infty}\sup \int_{t_0}^{t} \rho(s)Q(s) - \frac{1}{(p)^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}$$
$$\times \left[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p + (l^*)^{p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\right)' \frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p\right]ds = +\infty \qquad (12)$$

فإن المعادلة (2) متذبذبة.

برهان:

نتبع الخطوات نفسها في برهان المبرهنة 1، إذ نضرب العلاقة (10) بـ l^{p-2}، ونضرب العلاقة(11) بـ $\frac{l^{*p-2}(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}$ ثم نجمع العلاقتين، وبالاستفادة من العلاقة(6) في التمهيدية 4 نحصل على:

$$l^{p-2}w'(t) + l^{*p-2}\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)\right)' \le -(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+\frac{\rho(t)\left(r(\tau(t))\right)^{p-1}}{\left(\tau'(t)\right)^{p-1}}\frac{1}{p^p}\left[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}\right)^p\right.$$
$$\left.+l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + \left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}\right)' \frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}\right)_+^p\right]$$

بما أن$p \geq 2$، وبالمكاملة منt_0 إلىt نحصل على:

$$-\lim_{t\to\infty} sup \int_{t_0}^{t} \rho(s)Q(s) - \frac{1}{p^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}$$

$$\times [l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p + (l^*)^{p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}$$
$$\times \left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\right)'\frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p]ds \geq l^{p-2}\, w(t)$$
$$+l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t) - l^{p-2}\, w(t_0) - l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t_0)$$

ومنه فإن $-\infty \leq V(t)$، ولكن التابعان $w(t)$ و $\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)$ موجبين $l^{p-2}\, w(t) + l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)$ وبالتالي لدينا تناقض.

مبرهنة 2:

بفرض أن $\tau\big(\theta(t)\big) = \theta\big(\tau(t)\big)$ مع$\tau(t) \geq \theta(t)$، و$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{r(t)} = +\infty$ من أجل عدد حقيقي t_0 ، وليكن$\rho(t)$ و$\varphi(t)$ تابعين موجبين تماماً، حيث أن$\rho(t)$ اشتقاقي من المرتبة الأولى على مجال $[t_0, +\infty[$، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to\infty}\sup \int_{t_0}^{t} \rho(s)Q(s) - \frac{1}{p^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\theta(s))}{(\theta'(s))^{p-1}}$$
$$\times [l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p + (l^*)^{p-2}\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}$$
$$\times \left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \left(\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right)'\frac{\theta'(s)}{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p]ds = \infty \qquad (13)$$

فإن المعادلة (2) متذبذبة.

برهان:

سنستخدم طريقة نقض الفرض لإنجاز البرهان. لنفرض أن الشرط (13) محقق، وأن المعادلة (2) غير متذبذبة، أي أنه يوجد حل $x(t)$ للمعادلة (2) ويحقق أن $x(t) > 0$ وذلك أياً كانت $t > t_0$. لنأخذ $t_1 > t_0$ حيث أن $min\left\{x(t), x\big(\sigma(t)\big), x\big(\tau(t)\big), x\left(\tau\big(\sigma(t)\big)\right)\right\} > 0$ وذلك أياً كانت $t > t_1$ ، ومنه حسب تعريف $z(t)$ يكون $z(t) > 0$، بتعويض الحل$x(t)$ في المعادلة (2) نحصل على:

$$[r(t)z'(t)]' = -c(t)f\left(x\big(\tau(t)\big), r(t)z'(t)\right) < 0$$

ومنه نجد أن$r(t)z'(t)$ متناقص تماماً.

لنفرض$z'(t) \leq 0$ أياً كانت$t > t_1$، فإنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً m بحيث $r(t)z'(t) < -m < 0$ أياً كانت$t > T > t_1$، وبالتالي $z'(t) < -\frac{m}{r(t)}$ وبمكاملة الطرفين نجد $z(t) < z(T) - \int_T^t \frac{m}{r(t)}dt$، وعندما تكون t كبيرة نجد أن $z(t) < 0$، وهذا تناقض مع تعريف $z(t)$ حيث $x(t) > 0$، وبالتالي فإن $z'(t) > 0$ أياً كانت$t > t_1$، ومنه يوجد $t_2 > t_1$ بحيث من أجل كل $t > t_2$ يتحقق الآتي:

$$min\left\{x(t), x\big(\tau(t)\big), x\big(\theta(t)\big), x\left(\tau\big(\theta(t)\big)\right), z'(t), z'\big(\tau(t)\big), z'\big(\theta(t)\big), z'\left(\theta\big(\tau(t)\big)\right)\right\} > 0.$$

لنعرف الآن التابع w بالعلاقة $w(t)=\rho(t)\frac{\left(r(t)z^{'}(t)\right)^{p-1}}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}$، نلاحظ أن $w(t)>0$ أياً كانت $t>t_2$، باشتقاق التابع $w(t)$ نحصل على:

$$w'(t)=\rho^{'}(t)\frac{\left(r(t)z^{'}(t)\right)^{p-1}}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}+\rho(t)\frac{\left(\left(r(t)z^{'}(t)\right)^{p-1}\right)^{'}}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}-(p-1)\rho(t)\frac{\left(r(t)z^{'}(t)\right)^{p-1}z^{'}(\theta(t))\theta^{'}(t)}{\left(z(\theta(t))\right)^{p}}$$

وبما أن $\theta(t)\le t$، وأن $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً، فإننا نجد أن $z'\left(\theta(t)\right)\ge\frac{r(t)z'(t)}{r(\theta(t))}$، وبالتالي:

$$w'(t)\le\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t)+\rho(t)\frac{\left(\left(r(t)z^{'}(t)\right)^{p-1}\right)^{'}}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}-(p-1)\frac{\theta^{'}(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\theta(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)\qquad(14)$$

لنعرف الآن التابع V بالعلاقة $V(t)=\rho(t)\frac{\left(r(\theta(t)z^{'}(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}$. نلاحظ أن $V(t)>0$ أياً كانت $t>t_2$. باشتقاق التابع $V(t)$ نحصل على:

$$V'(t)=\rho^{'}(t)\frac{\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}+\rho(t)\frac{\left(\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}$$
$$-(p-1)\rho(t)\frac{\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}z'(\theta(t))\theta'(t)}{\left(z(\theta(t))\right)^{p}}$$

وبما أن $\theta(t)\le\tau(t)$، وأن $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً، فإننا نجد أن $z'\left(\theta(t)\right)\ge\frac{r(\tau(t))z'(\tau(t))}{r(\theta(t))}$، وبالتالي:

$$V'(t)\le\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}V(t)+\rho(t)\frac{\left(\left(r(\theta(t)z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\theta(t))\right)^{p-1}}-(p-1)\frac{\theta^{'}(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\theta(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)\qquad(15)$$

نضرب العلاقة(14) بـl^{p-2}، ثم نضرب العلاقة(15) بـ$l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta^{'}(t)}$، ثم نجمع العلاقتين، و بالاستفادة من تزايد$z(t)$، ومن كون $\tau(t)\ge\theta(t)$ نجد أن$\frac{Q(t)z(\tau(t))}{z(\theta(t))}\ge Q(t)$، ومن التمهيدية 4 نجد أن:

$$l^{p-2}w'(t)+\frac{l^{*p-2}\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta^{'}(t)}V'(t)\le-(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+l^{p-2}\left[\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t)-(p-1)\frac{\theta^{'}(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\theta(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$
$$+l^{*p-2}\left[\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta^{'}(t)}\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}V(t)-(p-1)\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta^{'}(t)}\frac{\theta^{'}(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\theta(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$

ومنه نجد الآتي:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta^{'}(t)}V(t)\right)'\le-(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+l^{p-2}\left[\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t)-(p-1)\frac{\theta^{'}(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\theta(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$

$$+l^{*p-2}[\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\right)'\right)V(t)$$
$$-(p-1)\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\theta'(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\theta(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)]$$

وحسب التمهيدية 1:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)\right)'\leq-(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+l^{p-2}\frac{1}{p^p}\left(\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}\right)^p\frac{\rho(t)\left(r(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(\theta'(t)\right)^{p-1}}+l^{*p-2}\frac{1}{p^p}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\right)'\right)_+^p$$
$$\times\frac{\left(\theta'(t)\right)^{p-1}}{\left(a(\theta(t))\right)^{(p-1)^2}\varphi^{p-1}(t)}\frac{\rho(t)\left(r(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(\theta'(t)\right)^{p-1}}\leq-\rho(t)Q(t)+\frac{\rho(t)\left(r(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(\theta'(t)\right)^{p-1}}\frac{1}{p^p}$$
$$\times[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}\right)^p+l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\right)'\frac{\theta'(t)}{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}\right)_+^p]$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على الآتي:

$$-\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_0}^{t}\rho(s)Q(s)-\frac{1}{p^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\theta(s))}{(\theta'(s))^{p-1}}[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p+(l^*)^{p-2}\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}$$
$$\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\left(\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right)'\frac{\theta'(s)}{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p]ds$$
$$\geq l^{p-2}\,w(t)+l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)$$
$$-l^{\alpha-1}\,w(t_0)-l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t_0))\right)^{p-1}\varphi(t_0)}{\theta'(t_0)}V(t_0)\qquad(16)$$

ولكن $w(t)$ و $V(t)$ $\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}$ تابعين موجبين وهذا تناقض.

نتيجة 2:

بفرض أن $\tau\left(\theta(t)\right)=\theta(\tau(t))$ و $\tau(t)\geq\theta(t)$، و أن $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$ من أجل عدد حقيقي t_0، و بفرض أن $\rho(t)$ و $\varphi(t)$ تابعين موجبين تماماً، حيث أن $\rho(t)$ اشتقاقي من المرتبة الأولى على مجال $[t_0,+\infty[$، وبفرض أنه يوجد عددان حقيقيان $a_0\geq 0$ و $\theta_0>0$ يحققان أنه من أجل كل $t\geq t_0$ فإن $a(t)\leq a_0<+\infty$ وأن $\theta'(t)\geq\theta_0$، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_0}^{t}\rho(s)Q(s)-\frac{1}{(p)^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\theta(s))}{(\theta'(s))^{p-1}}\times\left[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p+(l^*)^{p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\right)'\frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p\right]ds=\infty \qquad (17)$$

فإن المعادلة (2) متذبذبة.

برهان:

بنفس أسلوب برهان المبرهنة 2 وباستخدام التمهيدية 1 والتمهيدية 4 نحصل على:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}V(t)\right)'\le-(p-1)\rho(t)Q(t)+\frac{\rho(t)(r(\theta(t)))^{p-1}}{(\theta(t))^{p-1}}\frac{1}{p^p}\left[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}\right)^p+l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\right)'\frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p\right]$$

بما أن $p\ge 2$، وبالمكاملة نجد أن:

$$-\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_0}^{t}\rho(s)Q(s)-\frac{1}{p^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}\times\left[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p+(l^*)^{p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\right)'\frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p\right]ds\ge l^{p-2}\,w(t)+l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)-l^{p-2}\,w(t_0)-l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t_0)}{\theta_0}V(t_0)$$

ولكن $w(t)$ و $\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)$ تابعين موجبين و بالتالي لدينا تناقض مع الفرض.

أمثلة:

نقدم فيما يأتي مثالين عن معادلتين تفاضليتين نصف خطيتين، ولندرس تذبذبهما وفق النتائج التي حصلنا عليها.

مثال1:

لتكن لدينا المعادلة الآتية:

$$\left(t\left(x(t)+a_0x(\tfrac{t}{2})\right)'\right)'+\lambda f\left(x(t),t\left(x(t)+a_0x(\tfrac{t}{2})\right)'\right)=0 \qquad (18)$$

علماً أن $a_0\in[0,1]$، وأن $\lambda\in[1,+\infty[$، و $p=2$، و $\tau(t)=t$. لندرس تذبذب المعادلة (18) على المجال $[1,+\infty[$. بما أن التابعين $\rho(t)$ و $\varphi(t)$ الواردين في بناء المعيار (17) موجبان واختياريان، لذلك نجرب و نختار $\varphi(t)=\rho(t)=1$ وذلك أياً يكن $t\in[1,+\infty[$، فنلاحظ أن $\tau\big(\theta(t)\big)=\theta(\tau(t))$، وأن $\tau(t)\ge\theta(t)$، كما أن $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}=+\infty$. ومنه باستخدام المعيار (17)، نجد أن $\lim_{t\to\infty}\sup\int_1^t\lambda\,ds=\lim_{t\to\infty}\lambda(t-1)=\infty$، وبالتالي المعادلة(18) متذبذبة.

مثال2:

لتكن لدينا المعادلة الآتية:

$$\left(x(t)+\tfrac{1}{3}x(\tfrac{t}{2})\right)''+t^4f\left(x\left(\tfrac{t}{2}\right),\left(x(t)+\tfrac{1}{3}x(\tfrac{t}{2})\right)'\right)=0 \qquad (19)$$

علماً أن $p = 4$، ولندرس تذبذب المعادلة(19) على المجال $[1, +\infty[$. بما أن التابعين$\rho(t)$ و$\varphi(\mathrm{t})$ الواردين في بناء المعيار (12) موجبان واختياريان، لذلك نختار $\varphi(t) = \rho(t) = 1$ وذلك أياً يكن $t \in [1, +\infty[$، نلاحظ أن $\tau\big(\theta(t)\big) = \theta(\tau(t))$، وأن $\tau(t) = \theta(t)$، وأن $\int_1^{+\infty} dt = +\infty$، ومنه باستخدام المعيار (12)، نجد أن$\limsup_{t\to\infty} \int_1^t \left(\frac{s}{2}\right)^4 ds = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^5-1}{80}\right) = \infty$ ، وبالتالي المعادلة(19) متذبذبة.

الاستنتاجات والتوصيات:

درسنا في هذا البحث تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، مع$p \geq 2$، وتوصلنا إلى معايير تحدد فيما إذا كانت هذه المعادلة متذبذبة أم لا، ثم قدما مثالين يدعمان صحة النتائج التي حصلنا عليها.

المراجع

[1] DOŠLÝ, O. *half-linear differential equation*. 2005.

[2] DOŠLÝ, O; BOGNÁR, G. *Conditional oscillation and principal solution of generalized half-linear differential equation*. Submitted,Debrecen, pp. 459-451, 2013.

[3] DOŠLÝ,O; ŘEZNÍČKOVÁ, J. *Conjugacy and principal solution of generalized half-linear second order differential equations*. Qual, no 5, pp 1-13,2012.

[4] ELBERT, A. *On the half-linear second order differential equations*. pp 487–508, 1987.

[5] ELBERT,A. *Generalized Riccati equation for half-linear second order differential equations*. J´anos Bolyai, pp, 227–249, 1984.

[6] ELBERT,A; Kusano, T; Tanigawa, T. *an oscillatory half-linear differential equation*. 1997.

[7] FIŠNAROVÁ, S; MARÍK, R. *Modified Riccati technique for half-linear differential equations with delay*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No 64, pp 1-14, 2014.

[8] FIŠNAROVÁ, S; R. MARÍK, *Oscillation of half-linear differential equations with delay*, Abstr. Appl. Anal. Art. ID 583147, 6 pp, 2013.

[9] FIŠNAROVA, S; R. MARÍK. *Oscillation criteria for neutral second-order half-linear differential equations with applications to Euler type equations*. Boundary Value Problems, pp1-14, 2014.