طريقة نيوتن المنظمة في إيجاد حل مسألة أمثليات–الوجود والوحدانية

الدكتور محمد سويقات*

الدكتورة بشرى عباس**

سومر سويقات***

(تاريخ الإيداع 13 / 12 / 2018. قُبِل للنشر في 17 / 6 /2019)

□ ملخّص □

في هذا البحث H فضاء هلبرت الحقيقي و $M: H \rightrightarrows H$ مؤثر مطّرد أعظمي .
المسألة هي إيجاد أصفار المؤثر المطّرد المركب $M = A + B$ ، حيث A مؤثر متعدد القيم أعظمي ، و B وحيد القيمة ليبشتز، وبالأعتماد على تمثيل مينتي وتحليل ليابونوف قمنا بإعادة صياغة المسألة للحصول على جملة ديناميكية محكومة بمؤثر ليبشتز. وعليه استطعنا إثبات وجود ووحدانية حل وحيد قوي للمسألة.

الكلمات المفتاحية: المؤثرات المطّردة، طريقة نيوتن، الجمل الديناميكية، فضاء هلبرت، نظرية كوشي ليبشتز.

* أستاذ – قسم الرياضيات –كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية .

** مدرسة – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

*** طالب دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

Regularized Newton approach to finding optimal solution for optimization problems – existence and uniqueness

Dr. Mohamed soueycatt*
Dr. Bushra abbas**
Somar Soueycatt ***

(Received 13 / 12 / 2018. Accepted 17 / 6 /2019)

□ ABSTRACT □

In this paper, let H be a real Hilbert space and $M : H \rightrightarrows H$ be a maximal monotone operator.
We restrict the attention on finding zeros of the structured monotone operator $M = A + B$, where A is multi-value maximal operator and B is a single-value Lipschitz operator. By using Minty representation and Lyapunov analysis, we reformulate the problem in order to get a dynamic system governed by Lipschitz operator. As a result, we managed to prove the existence and the uniqueness of a strong global solution.

Key words: monotone operators, Newton method, dynamic systems, Hilbert space, Cauchy-Lipschitz theorem.

* **Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
** **Professor., Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
*** **Master student, Depart. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

ليكن H فضاء هلبرت و $M: H \rightrightarrows H$ مؤثراً مطّرداً أعظمياً متعدد القيم أي بيانه غير محتوى ببيان أي مؤثر مطّرد أعظمي أخر.

المسألة التي سندرسها هي إيجاد أصفار مجموع المؤثرين A و B حيث A : مؤثر مطرد أعظمي ، مؤثراته الحالة سهلة الحساب و B مؤثر مطرد ليبشتز مستمر. كمرجع أساسي لـ دراستنا نستخدم طريقة نيوتن المنظمة المقدمة من قبل Attouch-Svaiter في [2]، سنذكر أولاً بالخطوط الأساسية لهذا النهج ثم نشرح كيفية التكيف معها.

بفرض $M \in C^1$، عندئذ طريقة نيوتن - رافسون الكلاسيكية تولد متتالية $(\boldsymbol{x_k})_{\boldsymbol{k\in N}}$ في الفضاء H تحقق العلاقة التالية:

$$M(x_k) + M'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

عندما تكون الخطوة بعيده عن الحل نجد من المناسب التقسيم على Δt_k :

$$M(x_k) + M'(x_k)\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k}\right) = 0$$

ونشير إلى أنه إذا كانت $M'(x_k) = 0$ فإن طريقة نيوتن-رافسون الكلاسيكية تؤول إلى الفشل لذلك قام Levenberg-Marquardt) بتنظيم هذه الطريقة بالشكل التالي:

$$M(x_k) + \left(I\lambda_k + M'(x_k)\right)\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k}\right) = 0$$

حيث I مؤثر مطابق على H و (λ_k) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة تماماً.

في الواقع إن الجملة الديناميكية المستمرة والمتقطعة المحكومة بمؤثر مضطرد أعظمي تلعب دوراً هاماً في الامثليات ونظرية الالعاب والمعادلات التفاضلية الجزئية والميكانيك.. وغيرها

لذلك سوف نعتبر الصيغة المستمرة لنهج Attouch-Svaiter تأخذ الشكل

$$\lambda(t)x^{\cdot}(t) + M'\big(x(t)\big)x^{\cdot}(t) + M\big(x(t)\big) = 0$$

حيث $\dot{(t)}$ هو المشتق بالنسبة للزمن t، و $t \longrightarrow \lambda(t)$ هو تابع حقيقي موجب تماماً. وبملاحظة أن $'\big(x(t)\big)x^{\cdot}(t)$ تمثل مشتق الحد $M\big(x(t)\big)$ يمكننا إعادة صياغة المسألة بالشكل الجبري التالي:

$$\begin{cases} v(t) = M\big(x(t)\big), \\ \lambda(t)x^{\cdot}(t) + \dot{v}(t) + v(t) = 0. \end{cases}$$

عندما $M: H \rightrightarrows H$ مؤثر مطّرد أعظمي، تأخذ الجملة الديناميكية الشكل التالي:

$$\begin{cases} v(t) \in M\big(x(t)\big), \\ \lambda(t)x^{\cdot}(t) + \dot{v}(t) + v(t) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

ومن أجل دراسة الجملة الديناميكية (1) نستخدم تمثيل مينتي للمؤثرات المطّردة الأعظمية.

لتكن $J_\mu^M = (I + \mu M)^{-1}$ و $M_\mu = \frac{1}{\mu}\left(I - J_\mu^M\right)$ على التوالي المؤثر الحال وتقريب يوشيدا ذو الدليل $\mu > 0$ للمؤثر M.

لآجل كل $t \in [0, \infty[$، نضع $\mu(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$، ولنعرّف تابعاً جديداً $Z: [0, \infty[\to H$ بالشكل

$$Z(t) = x(t) + \mu(t)v(t) \qquad (2)$$

وبتطبيق تمثيل مينتي على الجملة الديناميكية (1) نحصل على الجملة:

$$x(t) = J_{\mu(t)}^M\big(z(t)\big)$$

$$v(t) = M_{\mu(t)}\big(z(t)\big)$$

وبحساب مباشر وبسيط نجد أن الجملة الديناميكية (1) تكافئ الجملة:

$$\begin{cases} x(t) = J_{\mu(t)}^M\big(z(t)\big), \\ \dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big)M_{\mu(t)}\big(z(t)\big) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

بملاحظة أن المؤثر M_μ هو ليبشتز، تكون جملتنا الديناميكية محكومة بمؤثر ليبشتز، وعليه نستطيع تطبيق نظرية كوشي ليبشتز.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة الوجود والوحدانية للمسألة من خلال تطبيق نظرية كوشي ليبشتز للجملة الديناميكية وذلك بالاعتماد على تمثيل مينتي، هذه الجمل الديناميكية تلعب دوراً هاماً في الأمثليات، نظرية النقطة الثابتة، نظرية الالعاب والمعادلات التفاضلية الجزئية. حيث أن إيجاد الحل و إثبات الوحدانية في الحالة العامة يمهّد لنا الطريق لدراسة التقارب الضعيف لمسارات الجملة الديناميكية نحو حل لمسألة الأمثليات وهذا ما يتيح لنا بعدها إضافة شروط جديدة للحصول على التقارب القوي.

طرائق البحث ومواده:

نعطي بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بدراسة الوجود والوحدانية في الحالة العامة والتي تساعدنا في عرض الموضوع. نستخدم طريقة نيوتن المنظمة ونعتمد على تحليل ليابونوف في إعادة الصياغة.

1. تعاريف ومفاهيم أساسية:[1],[2],[3]

ليكن H فضاء هلبرت الحقيقي مع الجداء الداخلي $\langle .,. \rangle$ والنظيم $\|.\|$.

- تقول عن $M: H \rightrightarrows H$ أنه مؤثر مطّرد أعظمي إذا تحقق الأتي :

من أجل كل $(x,u) \in graphM \quad ,(y,v) \in graphM$

فإن :

$$\langle x-y, u-v \rangle \geq 0$$

- يعرف تقريب يوشيدا للمؤثر A بالعلاقة التالية:

$$A_\mu = \frac{1}{\mu}\left(I - J_\mu^A\right) \qquad ,\lambda > 0$$

وهو مؤثر مطّرد ليبشتز (مع ثابت $\frac{1}{\lambda}$,).

- نقول عن مؤثر M أنه يحقق شرط ليبشتز على X مع ثابت L إذا حقق الشرط التالي:

$$\|M_x - M_y\| \leq L\|x-y\|$$

- نقول عن مؤثر M أنه ضاغط على X إذا حقق الشرط التالي:

$$\|M_x - M_y\| \leq \|x-y\|$$

- نقول عن المؤثر M أنه مؤثر الحال على X إذا كان:

1) $M: H \rightrightarrows H$ مؤثر ضاغط
2) 1- ليبشتز
3) معرف على كامل الفضاء

- يعرف فوق بيان الدالة $f: X \to R \cup \{\infty\}$ ويرمز له $epi\ f$ بالعلاقة:

$$epi\ f := \{(x,\alpha) \in X \times R \quad ; \quad f(x) \leq \alpha\}$$

- نقول عن الدالة f أنها محدبة إذا كان $epi\ f$ مجموعه محدبة.

- نقول عن f أنها نصف مستمرة من الأدنى إذا كان $epi\ f$ مجموعة مغلقة.
- نقول عن الدالة f أنها خاصة إذا كان $epi\ f \neq \emptyset$.

ويرمز عادة لمجموعة الدوال المحدبة نصف المستمرة من الأدنى والخاصة المعرف على بالرمز $\Gamma(X)$.

- نقول عن الدالة $f: [0,b] \to \infty$ إنها مستمرة مطلقاً إذا وفقط إذا تحققت أحد الشروط المتكافئة الأتية:

i. يوجد تابع قابل للمكاملة $g: [0,b] \to H$ بحيث أن

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds\,, \qquad \forall t \in [0,b]$$

ii. f مستمر ومشتقاته التوزيعية قابلة للمكاملة على المجال $[0,b]$.

iii. من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\eta > 0$ بحيث من أجل كل أسرة منتهية من المجالات $_k = (a_k, b_k)$ غير المتقاطعة مثنى مثنى المحققة للعلاقة:

$$\left(\sum_k |b_k - a_k| \leq \eta \text{ و } k \neq j \qquad (I_k \cap I_j) = \emptyset\right)$$

فإن:

$$\left(\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \varepsilon\right)$$

نظرية كوشي ليبشتز:[5]

ليكن M مؤثر ليبشتز على فضاء هلبرت H ولتكن مسألة كوشي الأتية:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = M(t, x(t)) \\ x(0) = x_0\,. \end{cases}$$

عندئذ يوجد حل وحيد لهذه المسألة.

طريقة نيوتن المنظمة لمجموع مؤثرين مطّردين:

حتى تكون المسألة أكثر ملاءمة للتطبيقات رأينا أن نقسم المؤثر M إلى مجموع مؤثرين على الشكل $M = A + B$، B مطّرد وحيد القيمة و A مطّرد أعظمي متعدد القيم.

بالنظر إلى الجملة (1) ندرس الجملة الديناميكية التالية:

$$\begin{cases} v(t) \in A\big(x(t)\big), \\ \lambda(t) x^{\cdot}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + B\big(x(t)\big) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

بتطبيق تمثيل مينتي على المؤثر المطّرد الأعظمي والمتعدد القيم A نحصل على جملة ديناميكية جديدة بالشكل :

$$\begin{cases} x(t) = J^A_{\mu(t)}\big(z(t)\big), \\ \dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big) A_{\mu(t)} z(t) + \mu(t) B\left(J^A_{\mu(t)} z(t)\right) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

وبالنظر إلى كون B مؤثر ليبشتز فرضاً والمؤثر الحال للمؤثر A ليبشتز بالدليل μ و $A_\mu = \frac{1}{\mu}\left(I - J^A_\mu\right)$ ليبشتز، تكون الجملة الديناميكية (5) محكومة بمؤثر ليبشتز وبالتالي أصبح بالإمكان تطبيق نظرية كوشي ليبسشتز.

الوجود والوحدانية:

ندرس مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} v(t) \in A\big(x(t)\big), & (6a) \\ \lambda(t)x^{\cdot}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + B\big(x(t)\big) = 0. & (6b) \\ x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0, \quad v_0 \in A(x_0) & (6c) \end{cases}$$

نقوم أولاً بتعريف الحل القوي للجملة الديناميكية. ومن ثم سنعيد صياغة الجملة وذلك باستخدام تمثيل مينتي للمؤثر A . أخيراً سوف نبرهن وجود ووحدانية الحل القوي للجملة $(6a), (6c)$.

تعريف الحل القوي 1.1: [2]

نقول عن الحل $\big(x(.), v(.)\big)$ بأنه حل قوي شامل لـ $(6a), (6c)$ إذا تحققت الشروط التالية:

1) أن تكون المسارات $\big(x(.), v(.)\big): [0, \infty[\to H$ مستمرة مطلقاً على كل مجال $[0, b]$ حيث $0 < b < \infty$

2) $v(t) \in A\big(x(t)\big)$ لكل $t \in [0, \infty[$

3) $\lambda(t)x^{\cdot}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + B\big(x(t)\big) = 0$ تقريباً من أجل كل $\in [0, \infty[$.

4) $x(0) = x_0 \quad , \quad v(0) = v_0$

من أجل الحل سنفرض أن التابع $\lambda: [0, \infty[\to]0, \infty[$ مستمر مطلقاً على كل مجال $[0, b]$ و $0 < b < \infty$.

بفرض $\lambda(t) > 0$ لأجل كل $t \geq 0$، وبما أن $\lambda(.)$ مستمر مطلقاً عندئذٍ من أجل كل $b > 0$ و $t \in [0, \infty[$ تكون العلاقة التالية محققة:

$$0 < \lambda_{b,min} < \lambda(t) < \lambda_{b,max} < +\infty \qquad (7)$$

وهذه العلاقة ستلعب دوراً هاماً في إثبات الوجود والوحدانية.

لنعيد صياغة الجملة الديناميكية باستخدام تمثيل مينتي، ولنضع $\mu(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$.عندئذٍ نعيد كتابة المعادلة $(7a)$ من خلال استخدام المعادلات التالية: لأجل كل $t \in [0, \infty[$

$$v(t) \in A\big(x(t)\big) \Leftrightarrow \qquad (8)$$

$$x(t) + \mu(t)v(t) \in x(t) + \mu(t)\, A\big(x(t)\big) \Leftrightarrow \qquad (9)$$

$$x(t) = (I + \mu(t)\, A)^{-1}\big(x(t) + \mu(t)v(t)\big). \qquad (10)$$

نعرف الآن دالة جديدة $Z: [0, \infty[\to H$ بالعلاقة التالية:

$$Z(t) = x(t) + \mu(t)v(t) \qquad (11)$$

ومن العلاقات (11) , (10) نحصل على :

$$x(t) = (I + \mu(t)\, A)^{-1}\big(Z(t)\big),$$

$$v(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big(Z(t) - (I + \mu(t)\, A)^{-1}\big(Z(t)\big)\Big).$$

وهذا يكافئ:

$$x(t) = J^A_{\mu(t)}\big(z(t)\big) \qquad (12)$$

$$v(t) = A_{\mu(t)}\big(z(t)\big) \qquad (13)$$

حيث $J^A_\mu = (I + \mu\, A)^{-1}$ و $A_\mu = \frac{1}{\mu}\big(I - J^A_\mu\big)$ هما على التوالي المؤثر الحال وتقريب يوشيدا ذو الدليل μ للمؤثر المطّرد الأعظمي A.

العلاقتان (13) .(12) هما تمثيل مينتي للمؤثر المضطرد الأعظمي A. [9]

سوف نبين الآن كيف يمكن إعادة صياغة $(6b)$ كمعادلة تفاضلية كلاسيكيه، المعادلة $(6b)$ تكتب بالشكل:

$$x^{\cdot}(t) + \mu(t)\dot{v}(t) + \mu(t)v(t) + \mu(t)B\big(x(t)\big) = 0 \qquad (14)$$

باشتقاق العلاقة (11) وباستخدام (14) نحصل على:

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + \mu(t)\dot{v}(t) + \dot{\mu}(t)\, v(t) \qquad (15)$$

$$= -\mu(t)v(t) + \dot{\mu}(t)\, v(t) - \mu(t)B\big(x(t)\big). \qquad (16)$$

من العلاقة (13) ,(12) و (16) نستنتج ذلك

$$\dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big)A_{\mu(t)}z(t) + \mu(t)B\left(J_{\mu(t)}^{A}z(t)\right) = 0.$$

وأخيراً، الجملة الديناميكية يمكن كتابتها بالشكل:

$$x(t) = J_{\mu(t)}^{A}\big(z(t)\big), \tag{17a}$$

$$\dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big)A_{\mu(t)}z(t) + \mu(t)B\left(J_{\mu(t)}^{A}z(t)\right) = 0. \tag{17b}$$

على العكس إذا كان هو حل لـ (17b)، إذن (x, v) مع $x(t) = J_{\mu(t)}^{A}\big(z(t)\big)$، $v(t) = A_{\mu(t)}\big(z(t)\big)$ هي حل للجملة $(6a), (6c)$. هذا التفصيل موجود في برهان النظرية (2.4).[2] .مع التأكيد على أن المؤثرات $J_{\mu}^{A} : H \rightarrow H$ و $A_{\mu}: H \rightarrow H$ معرفة في كل مكان وليبشتز، مما يجعل نظرية كوشي ليبشتز قابلة للتطبيق.

من أجل تحديد نتائج الوجود والوحدانية سوف نستخدم المبرهنة الأتية [3]:

مبرهنة 1.2 : لآجل كل $\lambda > 0$، $\mu > 0$، $x \in H$ الخصائص التالية محققه:

i) $$J_{\lambda}^{A}x = J_{\mu}^{A}\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)J_{\lambda}^{A}x\right)$$

ii) $$\left\|J_{\lambda}^{A}x - J_{\mu}^{A}x\right\| \leq |\lambda - \mu| \left\| A_{\lambda}x\right\|$$

وبالتالي مما سبق نجد أنه لأجل كل λ, μ تنتمي إلى المجال $[\delta, \infty[$، ولأجل $0 < \delta < \infty$ فإن

$$\left\|J_{\lambda}^{A}x - J_{\mu}^{A}x\right\| \leq |\lambda - \mu| \| A_{\delta}x\| \tag{18}$$

النتائج والمناقشة:

مبرهنه 2.1 :

بفرض $\lambda: [0, \infty] \rightarrow]0, \infty[$ دالة مستمرة مطلقاً على كل مجال محدود $[0, b]$ و $b > 0$. وبوضع $\mu(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$ ولتكن $A: H \rightrightarrows H$ مؤثراً مطّرداً أعظمياً و $B: H \rightarrow H$ مؤثر مطّرد أعظمي وليبشتز مستمر على فضاء هلبرت H.

عندئذٍ من أجل كل قيمة ابتدائية $(x_0, v_0) \in H \times H$ بحيث $v_0 \in A(x_0)$:

1) يوجد حل عام قوي ووحيد $\big(x(.), v(.)\big): [0, \infty] \rightarrow H \times H$ لمسألة كوشي $(6a), (6c)$،

2) يمكن تمثيل الحل لمسألة كوشي $(6a), (6c)$ كما يلي: من أجل كل $t \in [0, \infty[$ فإن:

$$x(t) = J_{\mu(t)}^{A}\big(z(t)\big) \tag{19}$$

$$v(t) = A_{\mu(t)}\big(z(t)\big) \tag{20}$$

حيث أن $Z : [0, \infty[\rightarrow H$ تمثل الحل القوي العام الوحيد لمسألة كوشي:

$$\dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big)A_{\mu(t)}z(t) + \mu(t)B\left(J_{\mu(t)}^{A}z(t)\right) = 0, \tag{21a}$$

$$z(0) = x_0 + \mu(0)v_0 \tag{21b}$$

البرهان:1) نثبت أولاً الوجود والوحدانية للحل القوي لمسألة كوشي$(21a), (21b)$. باشتقاق العلاقة $\mu(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$ نحصل على $\dot{}(t) = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}$. وبالتالي المعادلة $(21a)$ تكتب بالشكل:

$$\dot{z}(t) + \left(1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\right)\frac{1}{\lambda(t)}A_{\frac{1}{\lambda(t)}}z(t) + \frac{1}{\lambda(t)}B\left(J_{\frac{1}{\lambda(t)}}^{A}z(t)\right) = 0. \tag{22}$$

مسألة كوشي $(21a), (21b)$ تكافئ

$$\dot{z}(t) = F\big(t, z(t)\big), \tag{23a}$$

$$z(0) = x_0 + \mu(0)v_0 \qquad (23b)$$

مع

$$F(t,z) = \theta(t)G(t,z) + k(t,z), \qquad (24a)$$
$$\theta(t) = -\left(1 - \frac{\dot\lambda(t)}{\lambda(t)}\right), \qquad (24b)$$
$$G(t,z) = \frac{1}{\lambda(t)} A_{\frac{1}{\lambda(t)}}(z), \qquad (24c)$$
$$k(t,z) = -\frac{1}{\lambda(t)} B\left(J^A_{\frac{1}{\lambda(t)}}(z)\right), \qquad (24d)$$

من أجل تطبيق نظرية كوشي ليبشتز لـ $(23a),(23b)$ ندرس أولاً خصائص استمرار ليبشتز لـ $F(t,.)$.

نأخذ $z_1, z_2 \in H$ ولأجل كل $t \geq 0$, يكون لدينا $G(t,z): H \to H$ مؤثر ضاغط، هذا يعني

$$\|G(t,z_2) - G(t,z_1)\| \leq \|z_2 - z_1\| \qquad (25)$$

L ثابت ليبشتز للمؤثر B. وعلى اعتبار المؤثر الحال ضاغط نحصل على

$$\left\|B\left(J^A_{\frac{1}{\lambda(t)}}(z_2)\right) - B\left(J^A_{\frac{1}{\lambda(t)}}(z_1)\right)\right\| \leq L\|z_2 - z_1\|. \qquad (26)$$

ومن خلال تعريف $(24),(24d)$ لـ F , و(26) نحصل على:

$$\|F(t,z_2) - F(t,z_1)\| \leq L_F(t)\|z_2 - z_1\|, \qquad (27)$$

(2) بالعودة إلى المسألة $(6a),(6c)$. وبفرض $Z : [0,\infty[\to H$ هو الحل القوي العام والوحيد لمسألة كوشي$(21a),(21b)$,

ولنعرف $((.),v(.)): [0,\infty] \to H$ بالعلاقة التالية:

$$x(t) = J^A_{\mu(t)}(z(t)), \qquad v(t) = A_{\mu(t)}(z(t)) \qquad (28)$$

(a) حتى يكون $(x(.),v(.))$ حل عام وقوي لمسألتنا يتوجب علينا بداية إثبات أنه مستمر مطلقاً على كل مجال محدود ويحقق الجملة $(6a),(6c)$.

تأخذ $z_1 \in H, z_2 \in H$ كيفيين و $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$. وبجمع (العلاقة (2) المبرهنة 1.2) مع كون المؤثر الحال مؤثر ضاغط نحصل على العلاقة

$$\left\|J^A_{\mu_2}(z_2) - J^A_{\mu_1}(z_1)\right\| \leq \left\|J^A_{\mu_2}(z_2) - J^A_{\mu_1}(z_2)\right\| + \left\|J^A_{\mu_2}(z_1) - J^A_{\mu_1}(z_1)\right\| \qquad (29)$$

$$\leq \|z_2 - z_1\| + |\mu_2 - \mu_1|\left\|A_{\mu_1} z_1\right\|. \qquad (30)$$

بفرض$s,t \in [0,b]$, وبإخذ $z_1 = z(s), z_2 = z(t)$ و $\mu_1 = \mu(s), \mu_2 = \mu(t)$ في العلاقة (30). وبنفس الرموز السابقة (لأجل كل $t \in [0,b[$, لدينا $0 < \lambda_{b,min} \leq \lambda(t) \leq \lambda_{b,max} < +\infty$), وبوضع $\Lambda = \lambda_{b,max}$ نحصل على

$$\left\|J^A_{\mu(t)}(z(t)) - J^A_{\mu(s)}(z(s))\right\| \leq \|z(t) - z(s)\| + |\mu(t) - \mu(s)|\left\|A_{\mu(t)}(z(t))\right\| \qquad (31)$$

$$\leq \|z(t) - z(s)\| + |\mu(t) - \mu(s)|\left\|A_{\frac{1}{\Lambda}}(z(t))\right\|. \qquad (32)$$

بملاحظة أن $\left\|A_{\frac{1}{\Lambda}}(z(t))\right\| \leq \left\|A_{\frac{1}{\Lambda}}(0)\right\| + \Lambda\|z(t)\|$ محدودة على $[0,b]$, وبما أن $z(.),\mu(.)$ مستمر مطلقاً نستنتج أن $x(t) = J^A_{\mu(t)}(z(t))$ مستمر مطلقاً على المجال$[0,b]$ لإجل كل $b > 0$. ونفس المناقشة يكون $v(t) = \lambda(t)(z(t) - x(t))$ حيث $\lambda(.)$ مستمر مطلقاً على $[0,b]$ لإجل كل $b > 0$.

بالإضافة إلى ذلك ,لآجل كل $t \in [0,\infty[$

$$v(t) \in A(x(t)), \qquad Z(t) = x(t) + \mu(t)v(t).$$

وباشتقاق المعادلة أعلاه نحصل على

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + \mu(t)\dot{v}(t) + \dot{\mu}(t)\, v(t).$$

ومن جهة أخرى, بما إن $x(t) = J^{A}_{\mu(t)}\big(z(t)\big)$, $v(t) = A_{\mu(t)}\big(z(t)\big)$ عندئذ المعادلة $(21a)$ تكتب بالشكل التالي

$$\dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big)v(t) + \mu(t)B\big(x(t)\big) = 0.$$

وبجمع المعادلتين أعلاه نحصل على

$$x^{\cdot}(t) + \mu(t)\dot{v}(t) + \mu(t)v(t) + \mu(t)B\big(x(t)\big) = 0.$$

من العلاقة $\mu(t) = \lambda(\ \ )^{-1}$ نستنتج أن $\big(x(.), v(.)\big)$ هو حل للجملة $(6a), (6c)$.

وفيما يتعلق بالشرط الابتدائي, نلاحظ أن

$$z(0) = x_0 + \mu(0)v_0 \qquad (33)$$
$$= x(0) + \mu(0)v(0). \qquad (34)$$

حيث $v_0 \in A(\ \ _0)$ و $v(0) \in A\big(x(0)\big)$. وبالتالي

$$x(0) = x_0 = (I + \mu(0)\, A)^{-1}(x_0 + \mu(0)v_0).$$

وبالعودة إلى العلاقات $(33), (34)$, بعد التبسيط نحصل على $v(0) = v_0$.

(b) لنبرهن الآن وحدانية الحل :

بفرض أن $\big(x(.), v(.)\big): [0, \infty] \to H \times \mathrm{H}$ هو حل للجملة $(6a), (6c)$.

ولنعرف $\mu(t)$ بالعلاقة $\mu(t) = \lambda(t)^{-1}$ و

$$Z(t) = x(t) + \mu(t)v(t). \qquad (35)$$

لدينا $z(.)$ مستمر مطلقاً $z_0 = x_0 + \mu v_0$, و $\forall\ \ t \in [0, \infty[$

$$x(t) = (I + \mu(t)\, A)^{-1}\big(Z(t)\big) \quad , v(t) = A_{\mu(t)}\big(z(t)\big). \qquad (36)$$

هذه التوابع المرتبطة بالتعريف (42) لـ z , (أي $x(.), v(.), \mu(.)$ قابلة للاشتقاق تقريباً لإجل كل $t > 0$). وبالتالي من خلال استخدام قاعدة الاشتقاق للجمع والضرب للتوابع وباستخدام $(6b)$ نستنتج أنه تقريباً لآجل كل $t \in [0, \infty[$

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + \mu(t)\dot{v}(t) + \dot{\mu}(t)\, v(t)$$
$$= -\mu(t)\left(\dot{v}(t) + v(t) + B\big(x(t)\big)\right) + \mu(t)\dot{v}(t) + \dot{\mu}(t)\, v(t)$$
$$= \big(-\mu(t) + \dot{\mu}(t)\big)v(t) - \mu(t)\, B\big(x(t)\big).$$

بما أن $(t) = A_{\mu(t)}\big(z(t)\big)$, نحصل على

$$\dot{z}(t) + \big(\mu(t) - \dot{\mu}(t)\big)A_{\mu(t)}z(t) + \mu(t)B\left(J^{A}_{\mu(t)}z(t)\right) = 0.$$

بالإضافة إلى :

$$z(0) = x_0 + \mu(0)v_0.$$

كما وجدنا سابقا ,ومن خلال نظرية كوشي ليبشتز , لذلك $z(.)$ موجود ووحيد ومستمر مطلقاً.

وبالتالي من خلال العلاقة (36) يكون $v(.)$ و $x(.)$ موجوداً ووحيداً.

في النهاية نعطي مثالاً توضيحياً لنتائجنا حيث يأخذ A المؤثر التفاضلي لدالة من $\Gamma(X)$ ويأخذ B التدرج لدالة محدبة وقابلة للاشتقاق.

مثال 2.2 : (التفاضل الجزئي لتابع محدب)

نفرض أن المؤثر $A = \partial\varphi$ حيث $\varphi: X \to R \cup \{\infty\}$ محدب ونص مستمر من الأدنى وخاص وأن المؤثر $B = \nabla\psi$ حيث $\psi: X \to R$ دالة محدبة وقابلة للاشتقاق.

في هذه الحالة تأخذ الجملة (4) الشكل التالي:

$$\begin{cases} v(t) \in \partial\varphi\big(x(t)\big), \\ \lambda(t)x^{\cdot}(t) + \dot{v}(t) + v(t) + \nabla\psi\big(x(t)\big) = 0. \end{cases} \qquad (37)$$

وبما أن $\partial\varphi$ و $\nabla\psi$ مؤثران مطّردان اعظميان [1] فنجد أن المبرهنة (2.1) محققة في هذه الحالة.

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا البحث بدراسة الجملة الديناميكية التي تهدف إلى إيجاد أصفار المؤثر المطّرد المركب $M = A + B$ ، حيث A مؤثر مطّرد متعدد القيم ، و B مطّرد وحيد القيمة ثم بينا الوجود والوحدانية لحل قوي لهذه الجملة.

سيكون توجهنا في البحث القادم دراسة تقارب الحل القوي في الحالة العامة نحو صفر للمؤثر المطّرد المركب M.

المراجع

1. PEYPOUQUET, J., SORIN, S.: *Evolution equations for maximal monotone operators: asymptotic analysisin continuous and discrete time*. J. Convex Anal. **17**, 1113–1163 (2010)

2. ATTOUCH, H., SVAITER, B.F.: *A continuous dynamical Newton-like approach to solving monotone inclusions*.SIAM J. Control Optim. **49**, 574–598 (2011)

3. B. ABBAS, H. ATTOUCH, B.F. SVAITER, Newton-like dynamics and forward-backward methods for structured monotone inclusions in Hilbert spaces, J. Optim. Theory Appl., 161 No. 2, pp. 331-360

4. ATTOUCH, H., REDONT, P., SVAITER, B.F.: *Global convergence of a closed-loop regularized Newtonmethod for solving monotone inclusions in Hilbert spaces*. J. Optim. Theory Appl. **157**(3), 624–650
(2013)

5.BRÉZIS, H.: Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris (1983)

6. BECK, A., TEBOULLE, M.*: Gradient-based algorithms with applications in signal recovery problems. In:Palomar*,
D., Eldar, Y. (eds.*) Convex Optimization in Signal Processing and Communications*, pp.33–88. Cambridge University Press, Cambridge (2010)

7. COMBETTES, P.L., PESQUET, J.-C.: *Proximal splitting methods in signal processing. In: Bauschke*, H.,Burachik, R., Combettes, P.L., Elser, V., Luke, D.R., Wolkowicz, H. (eds.) *Fixed-Point Algorithmsfor Inverse Problems in Science and Engineering*, pp. 185–212. Springer, New York (2011)

8. BRÉZIS, H.: *OpérateursMaximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces deHilbert.* North-Holland/Elsevier, New York (1973)

9. BAUSCHKE, H., COMBETTES, P.L.: *Convex Analysis and Monotone Operator Theory*. CMS Books inMathematics. Springer, Berlin (2011)

10. ZEIDLER, E.*: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, Part II: Monotone Operators.Springer, New York (1990)

11. MINTY, G.J.: *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces*. Duke Math. J. **29**, 341–346 (1962)10. Rockafellar, R.T.: *Maximal monotone relations and the second derivatives of nonsmooth functions*.Ann. Inst. Henri Poincaré**2**, 167–184 (1985)