حلول عددية لمعادلات فولتيرا التفاضلية – التكاملية الخطية من النوع الثاني باستخدام دوال شرائحية

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتـــــور سامي انجرو**

حسن نواف ضاهر***

(تاريخ الإيداع 19 / 3 / 2019. قُبِل للنشر في 23 / 6 /2019)

ملخّص

نقدم في هذا العمل تقنية عددية تكرارية لإيجاد الحلول التقريبية لبعض معادلات فولتيرا التفاضلية التكاملية. تعتمد التقنية المقترحة على تقريب الحلول لهذه المعادلات بدوال شرائحية من الدرجة السابعة واستخدام أربع نقاط تجميع.

تبين الدراسة أن الحل الشرائحي موجود ووحيد وأن التقنية المقترحة عندما تم تطبيقها لحل نموذج اختبار من هذه المعادلات كانت مستقرة ومتقاربة من الرتبة السابعة بخطأ مقتطع $O(h^7)$.

تم اختبار فعالية ودقة التقنية المقترحة بحل بعض المسائل المختلفة، حيث تشير النتائج والمقارنات إلى أن الطريقة تستطيع تقديم حل شرائحي يتطابق إلى حد كبير مع الحل الدقيق.

الكلمات المفتاحية: ، معادلات فولتيرا التفاضلية التكاملية ، دوال شرائحية، نقاط تجميع، الخطأ المقتطع، التقارب.

* أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com

** اساذ مساعد – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

E-mail: daherhasan64@gmail.com

Numerical Solutions of liner Volterra Integro-Differential Equations of second kind by Spline collocation Function

Dr. Suliman M. Mahmood*
Dr. Samee Enjroo **
Hasan N.Daher ***

(Received 19 / 3 / 2019. Accepted 23 / 6 /2019)

□ ABSTRACT □

In this article, an iterative numerical technique is suggested for finding the approximate solutions of some Volterra integro-differential equations (VIDEs). Basic idea of proposed method depends on approximating the unknown solution by spline function of degree seventh and using four collocation points.

The study shows that the spline solutions of VIDEs are existent and unique, also applied method to test problem is stable and convergent, the convergence rate is seventh with a truncation error $O(h^7)$.

Numerical results are given to illustrate the accuracy and efficiency of the method. Comparisons of the results explain the high accuracy of the proposed spline solution.

Key Words: Volterra Integral differential Equations, Spline functions, Collocation Points, Truncation Error, Convergence.

* **Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com.
** **Assistant Prof, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
*** **Postgraduate Student(Ph.d), Depart. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
E-mail: daherhasan64@gmail.com

مـقدمــة:

عندما تعقدت العلوم المختلفة نتيجة التداخلات فيما بينها وتطورت بشكل كبير وبدأ العلماء بدراسة الظواهر الطبيعية سواء كانت فيزيائية، كيميائيه، بيولوجيه أو هندسية الخ، كان للمعادلات التفاضلية التكاملية بمختلف أنواعها دوراً بارزاً في تفسير هذه الظواهر وإيجاد الحلول المختلفة لها سواء كانت تحليليه أو عددية.

وللمعادلات التفاضلية التكاملية تطبيقات علمية عديدة نذكر منها على سبيل المثال (ديناميكا السكان، انتشار الأوبئة، انتقال الحرارة، عمليات الانتشار العامة، نظرية معالجة الإشارة والشبكات العصبية، هبوب الريح في الصحراء، علم الكهرباء الساكنة والحركية، الميكانيك الحيوي، هندسة الإلكترون، الاقتصاد، الطب الخ).

يمكن القول" إنه لا يوجد علم من العلوم المختلفة إلا وتلعب هذه المعادلات دوراً بارزاً فيه" ولهذا نجد أن كثيراً من الباحثين استطاعوا استنباط طرائق عددية مختلفة لإيجاد حلول تقريبية لمثل هذه المسائل.

بدأ فولتيرا Volterra دراسة المعادلات التكاملية عام 1884، ولكنة وعندما كان يدرس التأثيرات الوراثية لنموذج نمو السكان أدى البحث في مقالته آنذاك إلى ظهور معاملي التكامل والتفاضل معاً في معادلة واحدة وكانت معادلته تفاضلية تكاملية.

قُدِمتْ عدة دراسات [1–7] لإيجاد طرائق عددية للمعالجة حلول معادلات فولتيرا التفاضلية التكاملية نذكر منها:

قدم Gachpazan عام 2009 **[2]** طريقة منشور سلسلة قوى لحل معادلات **فولتيرا** التفاضلية التكاملية الخطية وغير الخطية مع شروط ابتدائية.

قدم Raftari عام 2010 **[3]** طريقة اضطراب الهوموتوبي وقارن مع طريقة الفروق المنتهية لحل معادلات **فولتيرا** التفاضلية التكاملية الخطية من المرتبة الأولى مع شروط ابتدائية، تعتمد الفروق المنتهية على قاعدة سيمبسون وقاعدة شبة المنحرف .

استخدم Ogunlaran & Oke عام 2013 **[4]** طريقة تقريب شرائحية تكعيبية لإيجاد الحل العددي لمعادلات فريدهولم التفاضلية التكاملية الخطية من المرتبة الأولى مع شروط ابتدائية.

قدم Ebrahimia & Rashidinia عام 2014 [5] طريقة تجميع شرائحية تعتمد على B–Splines وتقريب التكامل باستخدام صيغ نيوتن كونس طبقت الطريقة لحل معادلات فولتيرا و فريدهولم التفاضلية التكاملية مع شروط ابتدائية.

قدم Alvandi & Paripour عام 2017 في [6] طريقة عددية لحل معادلات فولتيرا الخطية أعادت الطريقة صياغة النواة باستبدالها بسلسلة منشور تايلور باقتطاع n حداً منه فأنتجت حلاً تقريبياً، حيث تم اختبارها بحل بعض النماذج من المرتبتين الأولى والثالثة للنوع الثاني.

قدم Agbolade & Anake عام 2017 في [7] طريقة عددية تستخدم سلسلة قوى كقاعدة للتقريب بكثيرة حدود واعتمدوا في طريقتهم على اختيار نقاط تجميع غاوص–تشيبتشيف– لوباتو ونقاط معيارية أيضاً وتم تطبيقها لحل معادلات فولتيرا الخطية من المرتبة الأولى.

قدم S.Mahmoud في[19,16]طارائق شرائحية مجمعة لحل مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية الخطية.

نقدم في هذا العمل تقنية عددية ذات صياغة تكرارية لإيجاد الحلول العددية لمعادلة فولتيرا من النوع الثاني من الشكل:

$$y'(x) = f[x,\ y(x), \int_a^x K(x,t)\, y(t))dt\ ], \qquad a \le x,t \le b \qquad (1)$$
$$y(a) = \alpha$$

حيث $a \le x \le b$ ، $a \le t \le b$ ، $f \in C[a,b]$ دالة معلومة، λ ثابت له دلالات فيزيائية، الدالة $K(x,y)$ معلومة وتسمى نواة المعادلة التكاملية, وتكون هذه النواة قابلة للفصل، إذا أمكن التعبير عنها كمجموع من الحدود المنتهية من الشكل $K(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(t)$ وقد تكون مستمرة أو غير مستمرة. و $y \in C[a,b]$ دالة مجهولة يتطلب تعيينها تقريبياً بطريقة عددية.

أهمية البحث وأهدافه:

إن إيجاد الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية التكاملية بالطرائق التقليدية أمر معقد في معظم الأحيان وخاصة في التطبيقات العلمية الحديثة. لهذا يلجأ الباحثون إلى تطوير طرائق وتقنيات عددية باستمرار لحل مثل هذه المسائل باستخدام الحاسوب، ويمكن القول إنه لولا الحواسيب لبقت الكثير من المسائل دون حل. وفي حالات كثيرة نجد أنه حتى الطرائق العددية تتسم بالكثير من المزايا السلبية مثل انخفاض الدقة وضعف الاستقرار والفشل في التقارب لهذا نهدف لإيجاد تقنية عددية لتقديم حلول مستقرة ومتقاربة.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طرائق البحث على بعض المفاهيم والمبرهنات الأساسية في نظرية التقريب مثل فضاء التقريبات بكثيرات حدود بالإضافة إلى بعض الأساسيات والمبرهنات في الجبر الخطي، وكذلك تم الاطلاع على طرائق عددية متنوعة في بعض المراجع العلمية التي تتطرق لحل المسألة المطروحة وذلك بغية الاستفادة من المزايا الايجابية وتجنب العيوب والثغرات والمزايا السلبية، ولهذا تم اختيار فضاء التقريبات بكثيرات حدود شرائحية لحل المسألة وتنفيذ النتائج برمجياً بلغة البرمجة Mathematica.

النتائج والمناقشة :

صياغة تقنية تجميع شرائحية لحل المسألة:

وبافتراض أن نواة المسألة(1) قابلة للفصل يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$\begin{cases} y'(x) = f_1[x,\ y(x), u(x)] \\ u(x) = \int_a^x K(x,t)\, y(t))dt = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \int_a^x b_i(t) y(t) dt \ , \quad x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases} \qquad (2)$$

تؤول منظومة المعادلات (2) الى الشكل الاتي :

$$\begin{cases} y'(x) = f_1[x,\ y(x), u(x)] \\ u'(x) = f_2[x,\ y(x), u(x)] \ ,\ \ x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha,\ u(a) = \beta \end{cases} \tag{3}$$

حيث: $u'(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(x) y(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i'(x) \int_0^x b_i(t) y(x) d(t)$ حسب قاعدة Leibnitz للاشتقاق.

وبفرض أن $f_i : [a, b] \times R^2 \to R$ $(i=1,2)$ دوال ملساء كفاية وتحقق شرط ليبتشيز الآتي:

$$|f_i(x, y_1, u_1) - f_i(x, y_2, u_2)| \le L_i(|y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|)$$
$$\forall\ (x, y_1, u_1),\ (x, y_2, u_2) \in [a, b] \times R^2$$

وكذلك بفرض أن النواة $K : [a,\ b] \times [a, b] \times R \to R$ ملساء كفاية ومقيدة وتحقق شرط ليبتشيز :

$$|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)| \le L_3 |u_1 - u_2|,$$
$$\forall\ (x, t_1, u_1),\ (x, t, u_2) \in [a, b] \times [a, b] \times R$$

حيث L_i $(i = 1, 2, 3)$، ثوابت لبيتشيز .

نأخذ تجزئة منتظمة: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ للمجال $[a,b]$، حيث $x_i = a + ih$، $i = 0,1,\dots,n$ ، و $h = (b-a)/n$ طول الخطوة.

تستخدم التقنية الشرائحية في كل مجال جزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}],\ k = 0,1,\dots,n\text{-}1$ ، أربع نقاط تجميع نعرفهم كالآتي:

$$x_{k+z_j} = x_k + z_j h,\ \ j = 1,\dots,4 \tag{4}$$

يرتبطون مع أربع وسطاء تجميع تحدد بالشكل:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 = 1 \tag{4'}$$

ونعرف في كل مجال جزئي I_k كثيرة حدود شرائحية من الدرجة السابعة كالآتي:

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{(x - x_k)^i}{(i)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=4}^{7} \frac{(x - x_k)^j}{(j)!} C_{k,j-2} \ \ , x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0,\dots,n-1 \tag{5}$$

حيث $S^{(i)}(a) = S_0^{(i)} = y_0^{(i)},\ (i = 0,1,2)$ قيم ابتدائية معلومة من شروط البدء، و $S_k^{(i)}$ هي قيمة تقريبية للمشتق من الدرجة *i* لكثيرة الحدود الشرائحية عند x_k ، و $C_{k,j-2}$ مجاهيل يتطلب تعيينها.

وبشكل عام فإن التجزئة تحدد *n* شريحة $S_k(x)$ ، $k = 0,1,\dots,n\text{-}1,$ ، نسميها كثيرة حدود شرائحية تعطى بالشكل:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ \vdots & \\ S_k(x)\ , & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

وباشتقاق العلاقة (5) بالنسبة لـ *x* نحصل على الحدودية الآتية:

$$S_k'(x)=\sum_{i=1}^{3}\frac{(x-x_k)^{i-1}}{(i-1)!}S_k^{(i)}+\sum_{j=4}^{7}\frac{(x-x_k)^{j-1}}{(j-1)!}C_{k,j-2}\quad ,x\in[x_k,x_{k+1}],\quad k=0,\dots,n-1 \tag{6}$$

بتطبيق الشرائح (5)−(6) مع نقاط التجميع (4) إلى المسألة (3) نحصل على منظومة المعادلات:

$$\begin{cases} S_1'(x_{k+z_j})=f_1[x_{k+z_j},S_1(x_{k+z_j}),S_2(x_{k+z_j})],x\in[a,b] \\ S_2'(x_{k+z_j})=f_2[x_{k+z_j},S_1(x_{k+z_j}),S_2(x_{k+z_j})]\ \ ,j=1(1)4\ \ ;k=0(1)n-1 \\ y(a)=\alpha,\ u(a)=\beta \end{cases} \tag{7}$$

حيث: $S_2(x), S_1(x)$ تقريبات شرائحية لدالتي الحل $u(x), y(x)$ على الترتيب يعطيان بالشكل:

$$S_1(x)=\sum_{i=0}^{3}\frac{(x-x_k)^{i}}{(i)!}S_{1,k}^{(i)}+\sum_{j=4}^{7}\frac{(x-x_k)^{j}}{(j)!}C_{k,j-3}\ \ ,x\in[x_k,x_{k+1}],\quad k=0,\dots,n-1 \tag{8}$$

$$S_2(x)=\sum_{i=0}^{3}\frac{(x-x_k)^{i}}{(i)!}S_{2,k}^{(i)}+\sum_{j=4}^{7}\frac{(x-x_k)^{j}}{(j)!}C_{k,j+1}\ \ ,x\in[x_k,x_{k+1}],\quad k=0,\dots,n-1 \tag{8'}$$

وباستخدام التقريبات الشرائحية (8)−(8') ومشتقاتها مع نقاط التجميع (4) تأخذ المنظومة (7) الشكل:

$$\begin{aligned} &S_{1,k}'+(hz_j)S_{1,k}''+\frac{(hz_j)^2}{2!}S_{1,k}'''+\frac{(hz_j)^3}{3!}C_{k,1}+\frac{(hz_j)^4}{4!}C_{k,2}+\frac{(hz_j)^5}{5!}C_{k,3}+ \\ &\frac{(hz_j)^6}{6!}C_{k,4}=f_{1},_{k+z_j}\ , \\ &S_{2,k}'+(hz_j)S_{2,k}''+\frac{(hz_j)^2}{2!}S_{2,k}'''+\frac{(hz_j)^3}{3!}C_{k,5}+\frac{(hz_j)^4}{4!}C_{k,6}+\frac{(hz_j)^5}{5!}C_{k,7}+ \\ &\frac{(hz_j)^6}{6!}C_{k,8}=f_{2},_{k+z_j}\ ,\ j=1(1)4,\ k=0(1)n-1 \end{aligned} \tag{9}$$

نعيد كتابة المنظومة (9) بصيغة المصفوفات نحصل على الصيغة التكرارية:

$$A_2\overline{C}_{2,k}+R_2\overline{S}_{2,k}=\overline{F}_{2,k}\quad ,\ k=0,1,\dots,n-1 \tag{10}$$

حيث:

$$A_2=\left[\begin{array}{c:c} A_1 & O \\ \hdashline O & A_1 \end{array}\right], R_2=\left[\begin{array}{c:c} R_1 & O \\ \hdashline O & R_1 \end{array}\right],\ \overline{C}_{2,k}=\begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ \vdots \\ C_{k,8} \end{bmatrix}, \overline{F}_{2,k}=\begin{bmatrix} f_{1},_{k+z_1} \\ f_{1},_{k+z_2} \\ \vdots \\ f_{1},_{k+z_4} \\ f_{2},_{k+z_1} \\ f_{2},_{k+z_2} \\ \vdots \\ f_{2},_{k+z_4} \end{bmatrix},\ \overline{S}_{2,k}=\begin{bmatrix} S_{1,k} \\ S'_{1,k} \\ S''_{1,k} \\ S'''_{1,k} \\ S_{2,k} \\ S'_{2,k} \\ S''_{2,k} \\ S'''_{2,k} \end{bmatrix}$$

$$R_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & hz_1 & (hz_1)^2/2 \\ 0 & 1 & hz_2 & (hz_2)^2/2 \\ 0 & 1 & hz_3 & (hz_3)^2/2 \\ 0 & 1 & h & h^2/2 \end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix} \frac{h^3 z_1^3}{3!} & \frac{h^4 z_1^4}{4!} & \frac{h^5 z_1^5}{5!} & \frac{h^6 z_1^6}{6!} \\ \frac{h^3 z_2^3}{3!} & \frac{h^4 z_2^4}{4!} & \frac{h^5 z_2^5}{5!} & \frac{h^6 z_2^6}{6!} \\ \frac{h^3 z_3^3}{3!} & \frac{h^4 z_3^4}{4!} & \frac{h^5 z_3^5}{5!} & \frac{h^6 z_3^6}{6!} \\ \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} \end{bmatrix},$$

$$f_{1},_{k+z_j}=f_1(x_{k+z_j},S_1(x_{k+z_j}),S_2(x_{k+z_j})),$$
$$f_{2},_{k+z_j}=f_2(x_{k+z_j},S_1(x_{k+z_j}),S_2(x_{k+z_j}))$$

و O هي مصفوفة صفرية مربعة من الدرجة الرابعة.

إن منظومة المعادلات (10) قابلة للحل دائما ويمكن تعيين المجاهيل $\overline{C}_{2,k}$ بشكل تكراري والحصول على الحل العددي في كل خطوة على كامل مجال الحل لأن المصفوفة A_2 في المنظومة المذكورة غير شاذة، فهي مرتبطة بالمصفوفة النظامية A_1 حيث نجد:

$$Det(A_2)=Det(A_1).Det(A_1)\neq 0$$

لأن

$$Det(A_1)=\frac{h^8(-1+z_1)(z_1-z_2)(-1+z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3)(-1+z_3)(z_1z_2z_3)^3}{12441600}\neq 0$$

تقدير الخطأ للتقنية الشرائحية: Error Estimation for Spline Technique

تعريف(1) **[20]**: نقول عن طريقة إنها متناسقة (Consistent) من الرتبة p إذا كان $\|T\|_\infty=\max\limits_{0\le k\le n}\|\tau_k\|=O(h^p)$، حيث τ_k هو خطأ الاقتطاع الموضعي للطريقة عند x_k.

بفرض أن $u(x),y(x)\in C^8[a,b]$ هو حل وحيد للمنظومة (3) وأن $\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{x})$ هو الحل التقريبي الشرائحي لها. وبفرض أن $\boldsymbol{T}=(\overline{\tau}_{\boldsymbol{k}})$ هو شعاع من البعد 8، حيث $\overline{\tau}_{\boldsymbol{k}}$ يرمز للخطأ المتقطع الموضعي

الناتج عن المنظومة(10) عند x_k . نطبق التقريبات الشرائحية (8),('8) مع نقاط التجميع $x_{k+z_j} = x_k + z_j h$ ، (j=1(1)5)، نحصل على صيغة الخطأ المقتطع الموضعي:

$$\bar{\tau}_k = \bar{A}\,\bar{C}_{2,k} + \bar{\Psi}_k\,, \qquad (11)$$

حيث

$$\bar{\Psi}_{v,k} = \begin{bmatrix} S_{1,k} + (hz_1)S_{1,k} + \frac{h^2 z_1^2}{2} S''_{1,k} + \frac{h^3 z_1^3}{3!} S'''_{1,k} - y(x_k + z_1 h) \\ S_{1,k} + (hz_2)S'_{1,k} + \frac{h^2 z_2^2}{2} S''_{1,k} + \frac{h^3 z_2^3}{3!} S'''_{1,k} - y(x_k + z_2 h) \\ S_{1,k} + (hz_3)S'_{1,k} + \frac{h^2 z_3^2}{2} S''_{1,k} + \frac{h^3 z_3^3}{3!} S'''_{1,k} - y(x_k + z_3 h) \\ S_{1,k} + (h)S'_{1,k} + \frac{h^2}{2} S''_{1,k} + \frac{h^3}{3!} S'''_{1,k} - y(x_k + h) \\ S_{2,k} + (hz_1)S'_{2,k} + \frac{(hz_1)^2}{2} S''_{2,k} + \frac{h^3 z_1^3}{3!} S'''_{2,k} - u(x_k + z_1 h) \\ S_{2,k} + (hz_2)S'_{2,k} + \frac{(hz_2)^2}{2} S''_{2,k} + \frac{h^3 z_2^3}{3!} S'''_{2,k} - u(x_k + z_2 h) \\ S_{2,k} + (hz_3)S'_{2,k} + \frac{(hz_3)^2}{2} S''_{2,k} + \frac{h^3 z_3^3}{3!} S'''_{2,k} - u(x_k + z_3 h) \\ S_{2,k} + (h)S'_{2,k} + \frac{(h)^2}{2} S''_{2,k} + \frac{h^3}{3!} S'''_{2,k} - u(x_k + h) \end{bmatrix}$$

,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{h^4 z_1^4}{4!} & \frac{h^5 z_1^5}{5!} & \frac{h^6 z_1^6}{6!} & \frac{h^7 z_1^7}{7!} \\ \frac{h^4 z_2^4}{4!} & \frac{h^5 z_2^5}{5!} & \frac{h^6 z_2^6}{6!} & \frac{h^7 z_2^7}{7!} \\ \frac{h^4 z_3^4}{4!} & \frac{h^5 z_3^5}{5!} & \frac{h^6 z_3^6}{6!} & \frac{h^7 z_3^7}{7!} \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} \end{bmatrix}$$

وبحساب متجهة المجاهيل $\bar{C}_{2,k}$ من المنظومة (10) ينتج لدينا:

$$\bar{C}_{2,k} = -A_2^{-1} R_2 \bar{S}_{2,k} + A_2^{-1} \bar{F}_{2,k} \qquad (12)$$

نعوض العلاقة (12) في العلاقة (11)، نحصل على:

$$\bar{\tau}_k = \bar{A}(-A_2^{-1} R_2 \bar{S}_{2,k} + A_2^{-1} \bar{F}_{2,k}) + \bar{\Psi}_k \qquad (13)$$

وباستخدام منشور تايلور للدوال $u(x), y(x)$ حول x_k والتعويض في (13)، وبإعطاء وسطاء التجميع القيم المعيارية $z_1=7/10$، $z_2=8/10$, $z_3=9/10$ ينتج لدينا متجه الخطأ الموضعي في المجال الجزئي I_k :

$$\bar{\tau}_k = h^8\{-\frac{1414189\, y^{(8)}(x_k)}{8640000000000}, -\frac{2108 y^{(8)}(x_k)}{12919921875}, -\frac{2565351 y^{(8)}(x_k)}{15680000000000}, -\frac{43 y^{(8)}(x_k)}{264600000}, -\frac{1414189\, u^{(8)}(x_k)}{8640000000000}, -\frac{2108\, u^{(8)}(x_k)}{12919921875}, -\frac{2565351\, u^{(8)}(x_k)}{15680000000000}, -\frac{43\, u^{(8)}(x_k)}{264600000}\}^T$$

وعليه فإن الخطأ الموضعي محدود من الأعلى بالمقدار:

$$\|\bar{\tau}_k\|_\infty = \frac{1414189\,\mathrm{Max}\{|\,y^{(8)}(x_k)\,|, |\,u^{(8)}(x_k)\,|\}\,\|}{8640000000000} h^8 = O(h^8) \qquad (14)$$

نلاحظ من العلاقة (14) أن الخطأ الموضعي عند الخطوة k يكون من المرتبة الثامنة للطريقة الشرائحية المقترحة وبالتالي فالخطأ الشامل من أجل n خطوة يعطى بالعلاقة $\|T\|_{\infty}=nO(h^8)=O(h^7)$، حيث $n=(b-a)/h$.

نتيجة1: بما أن الخطأ المقتطع للتقنية الشرائحية محدد بدالة من الشكل $O(h^7)$ عندئذ فهي متناسقة من المرتبة السابعة.

استقرار الطريقة الشريحية :Stability of spline method

لاستقرار العددي [1]:

يقال عن تقنية عددية إنها مستقرة إذا كان تأثير كل خطوة مثبتة لخطأ التدوير يكون محدودة بشكل مستقل عن عدد نقاط التجزئة المستخدمة. بمعنى أدق من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كان $|y_0-\bar{y}_0|<\delta(\varepsilon)$ عند نقطة البدء x_0 فإن الفرق بين أي حلين عددين مختلفين y_k , $\bar{y}_k$ عند x_k يحقق:

$|y_k-\bar{y}_k|<\varepsilon$

من أجل أي $0\le h\le h_0$، حيث $y_0,\bar{y}_0$ حلان ابتدائيان مختلفان قليلاً.

إن استخدام التقريبات (8),('8) مع نقاط التجميع $\boldsymbol{x_{k+z_j}=x_k+z_j\,h}$ (j=1(1)5) يعطينا المنظومة التكرارية:

$$\bar{S}_{2,k+1}=\bar{R}\,\bar{S}_{2,k}+\bar{A}\,\bar{C}_{2,k} \qquad (15)$$

حيث $\bar{S}_{2,k},\bar{C}_{2,k}$ هما المتجهتان في المنظومة (10)، و $\bar{A}$ هي مصفوفة المنظومة (11) و تعطى $\bar{R}$ بالشكل:

$$\bar{R}=\begin{bmatrix} R & O\\ O & R\end{bmatrix}, \qquad R=\begin{bmatrix} 1 & h & (hz_1)^2/2 & (hz_1)^3/6\\ 1 & h & (hz_2)^2/2 & (hz_2)^3/6\\ 1 & h & (hz_3)^2/2 & (hz_3)^3/6\\ 1 & h & h^2/2 & h^3/6\end{bmatrix}$$

وبتعويض المتجهة $\bar{C}_{2,k}$ المعطاه بالعلاقة (12) في المنظومة (15)، ينتج لدينا المنظومة التكرارية:

$$\bar{S}_{2,k+1}=(\bar{R}-\bar{A}A_2^{-1}R_2)\,\bar{S}_{2,k}+A_2^{-1}\bar{F}_{2,k} \quad , \quad k=0,1,\ldots,n\text{-}1$$

فإذا أخذنا الآن، $\hat{S}_{2,k+1}$ تقريب شرائحي آخر بشروط بدء مختلفة قليلاً، عندئذ نستطيع أن نكتب:

$$E_{k+1}=\bar{S}_{2,k+1}-\hat{S}_{2,k+1}=(\bar{R}-\bar{A}A_2^{-1}R_2)^k.(\bar{S}_0-\hat{S}_0) \qquad (16)$$

حيث $\bar{S}_0,\hat{S}_0$ شرطان ابتدائيان.

تعريف(2) [1]: يقال عن طريقة عددية إنها مستقرة إذا وجد عدد ثابت r من أجلة يتحقق $\|D^r\|_{\infty}\le c$ مهما تكن $r\ge 1$، حيث إن $D=(\bar{R}-\bar{A}A_2^{-1}R_2)$ هي مصفوفة المنظومة (16)، ونظيم المصفوفة معرف بالشكل $\|D\|=\underset{\|X\|=1}{Max}\|DX\|$.

نجد باستخدام برمجة Mathematica أنه من أجل الخطوة h=0.9 واستخدام القيم المعيارية لوسطاء التجميع:

$$z_1=0.7, z_2=0.8, z_3=0.9,\ z_4=1$$

تأخذ المصفوفة D القيم المميزة:

$$\{1, -0.0001126, \quad 3.59734\times 10^{-7}, \quad -1.29314\times 10^{-8}\}$$

مضاعفة مرتين وتقع جمعها داخل قرص الواحدة وجذر بسيط يقع على محيطه.

ولإثبات الاستقرار بحسب التعريف(2) يكفي إثبات أن تكون $\|D^r\|_\infty$ محدودة من الأعلى مهما تكن $r \geq 1$.

نحسب بعض القيم لـ $\|D^r\|_\infty$ من أجل r=1,5,10,20,40,80 و ندرجها في الجدول(1).

الجدول(1): بعض القيم لـ $\|D^r\|_\infty$.

r=1	r=5	r=10	r=20	r=40	r=80
1.35835	1.00321	1.00001	1.00000000	1	1

حيث يتضح أن $\lim_{r\to\infty}\|D^r\|_\infty = 1$ وهذا يعني أن $\|D^r\|_\infty < 1.4$ مهما تكن $r \geq 1$، نستنتج بحسب **التعريف**(2) أن الطريقة المقترحة مستقرة. أما التقارب لطريقة عددية فيصح فيه الاقتضاء الآتي [14]:

الاستقرار + التناسق ⇐ التقارب.

نتيجة(2):

بما أن الطريقة الشرائحية مستقرة وبالاضافة إلى كونها متناسقة من المرتبة السابعة ومنه بحسب النتيجة (1) فهي متقاربة من المرتبة السابعة.

حيث نجد بحسب العلاقة (14) وبأخذ النهاية ينتج لدينا $\lim_{h\to 0}\|\bar{\tau}_l\| = \lim_{h\to 0} O(h^7) = 0$.

اختبارات عددية :Numerical Tests

نختبر فعالية الطريقة المقترحة بحل بعض الأمثلة المتنوعة المحلولة في مراجع مختلفة والمقارنة معها، حيث تمت برمجة الطريقة باستخدام برنامج Mathematica للحصول على النتائج العددية والرسوم البيانية.

المثال(1): معادلة فولتيرا التفاضلية التكاملية من النوع الثاني **[13]** :

$$y'(x) = -xe^x + \tfrac{1}{2}x^2 - 1 + \int_0^x t\; y(t)\,dt\;,\quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0$$

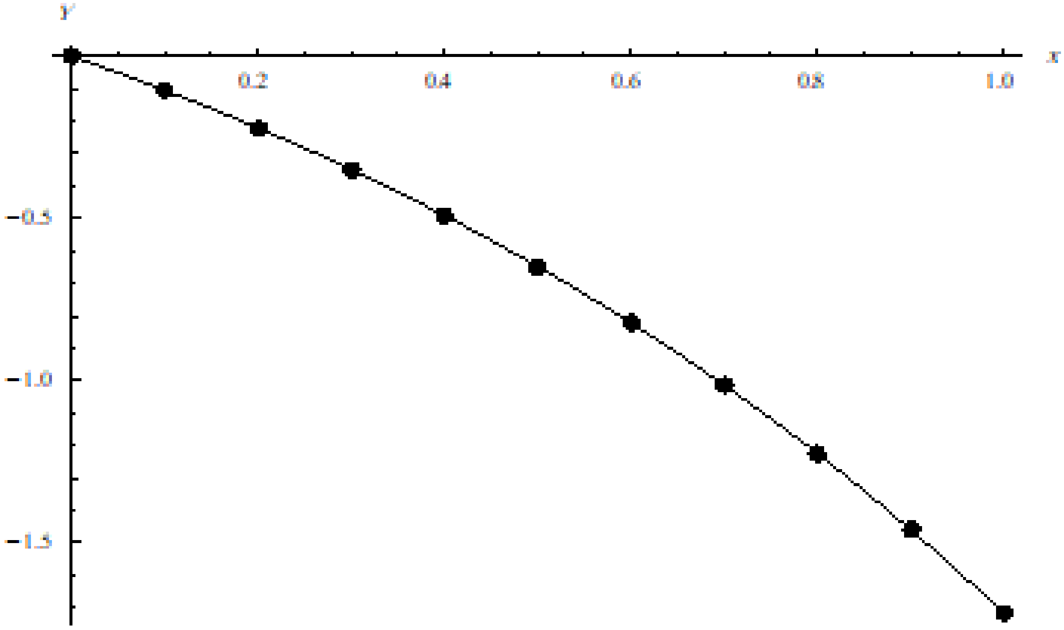
مع الحل الدقيق. $y(x) = 1 - e^x$.

تم حل المثال(1) باستخدام الطريقة الشريحية وحساب الخطأ المطلق، ومقارنة النتائج مع طريقة غاليركين تشيبتيف[13] ونضع النتائج في الجدول (2) ونرسم الشكل (1) الحل الشرائحي مع الحل الدقيق وفي الشكل (1) الخطاء للحل الشرائحي .

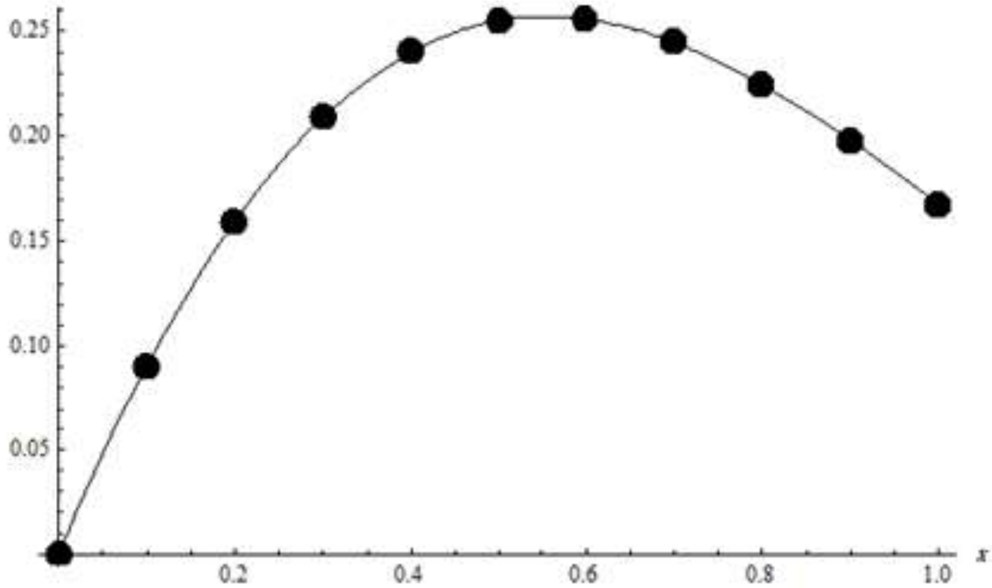
الجدول(2) : مقارنة الطريقة المقترحة مع طريقة غاليركين تشيبتشيف

الخطأ المطلق للطريقة الشرائحية N=4	الخطأ المطلق لطريقة غاليركين تشيبتشيف[13] N=4	
لخطأ المطلق	الخطأ المطلق	x
2.220446049250313 E−16	1.7.8696 E−6	0.1
1.110223024625156 E−15	1.1.3565 E−4	0.2
1.77635683940025 E−15	1.9086 E−4	0.3

0.4	1.4192 E −4	2.442490654175344 E−15
0.5	3.6209 E−5	2.664535259100375 E−15
0.6	5.5319 E −5	2.442490654175344 E−15
0.7	7.6735 E −5	4.440892098500626 E−16
0.8	1.4665 E −5	2.220446049250313 E−15
0.9	8.1616 E −5	7.10542735760'1002 E−15
1.0	8.5267 E−5	1.376676550535194 E−14



الشكل(1): الحل بالطريقة الشرائحية ●●● والحل الدقيق ــــ للمثال (1) بخطوة h=0.1 .



الشكل(2): الخطأ المطلق في طريقة الشرائحية للمثال (1) بخطوة h=0.1.

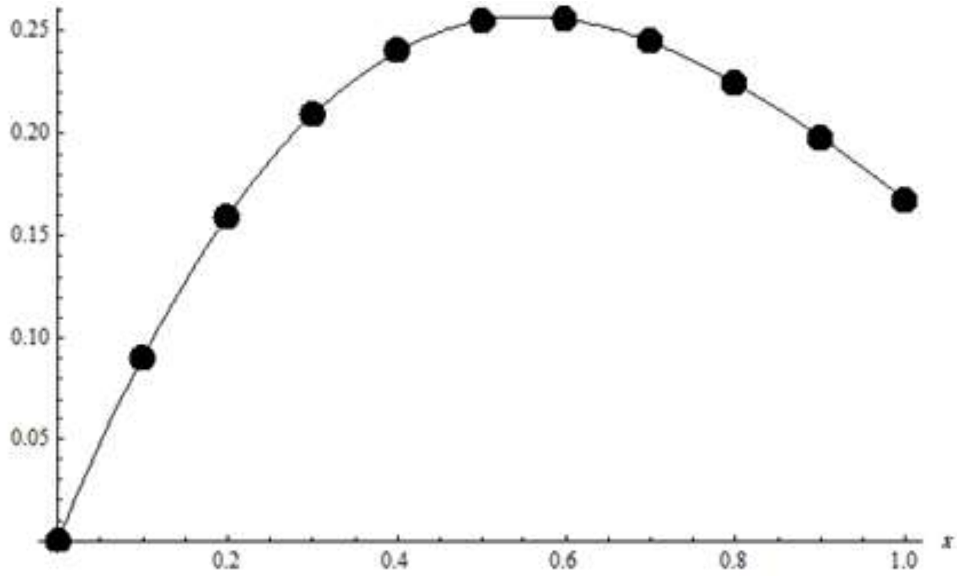
المثال(2): معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني **[12]**:

$$y'(x)+2y(x)+5\int_0^x y(t)dt=1\,,\;\; y(0)=0$$

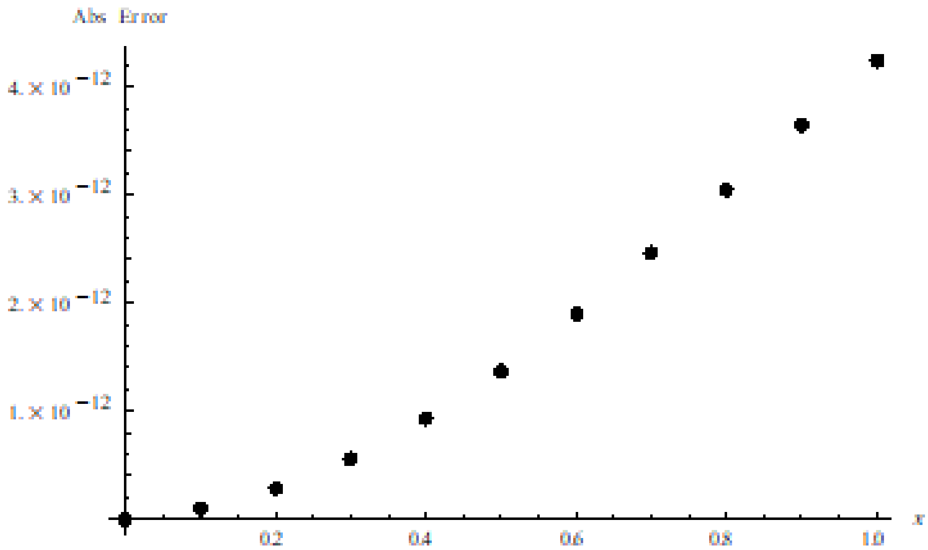
الحل الدقيق:

$$.\, y(x)=\frac{1}{2}e^{-x}Sin(2x)$$

تم حل المثال (2) باستخدام الطريقة الشرائحية المقترحة ومقارنة النتائج مع طريقة تجميع حدوديات شرائحية قياسية وطريقة تجميع القوى ومتسلسلات القوى:



الشكل (3): الشرائحي التقريبي••• والحل الدقيق ــــ للمثال (2) بخطوة h=1/10 .



الشكل(4): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي للمثال (2) بخطوة h=1/10

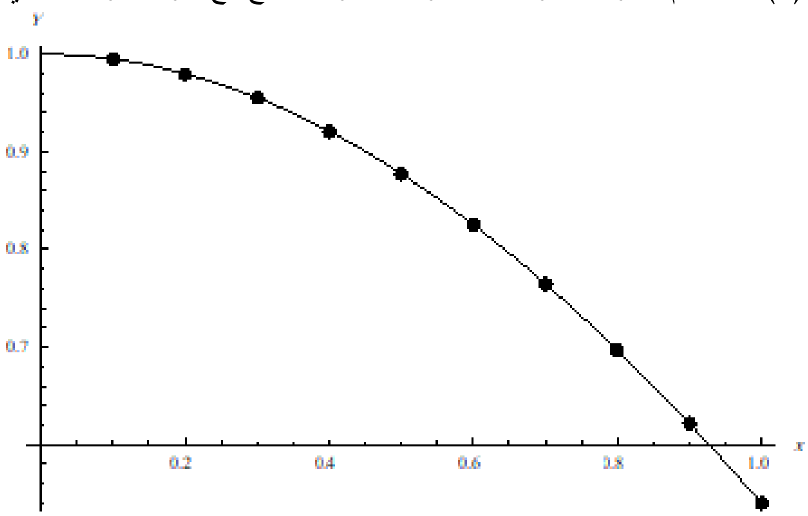
الجدول(3): مقارنة الطريقة المقترحة مع طريقة التجميع وحساب اكبر الاخطاء			
الطريقة الطريقة الشريحية	طريقة تجميع كثيرات الحدود القياسية [13]	طريقة تجميع سلسة القوى القياسية[13]	*N*
1.0501493008518992 E−9	8.01922E−2	3.30842 E−3	4
8.850561949991231 E−11	3.48756E−4	1.77942E−3	6
1.5800444286284687 E−11	5.78564E−6	7.34987E−3	8

المثال(3): معادلة فولتيرا التفاضلية التكاملية من النوع الثاني [14] :

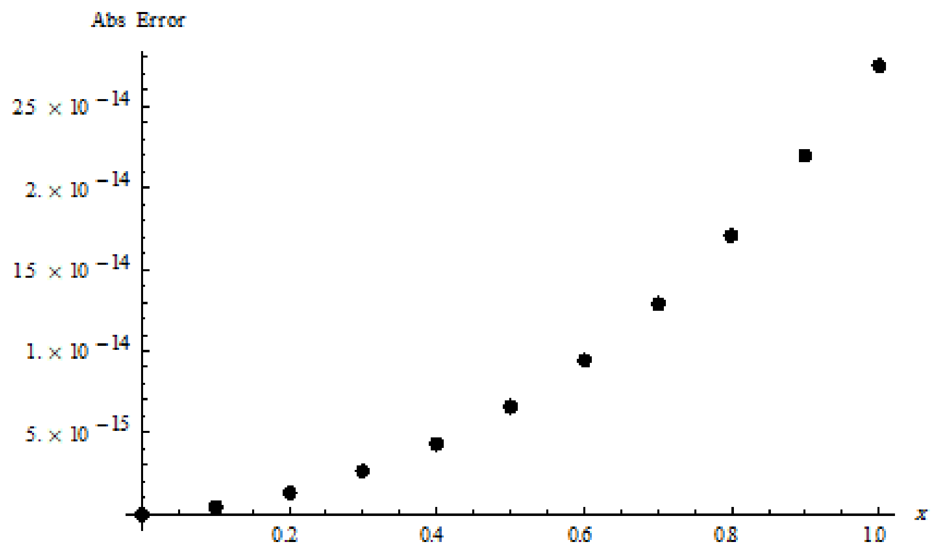
$$y'(x)-\int_0^x y(t)dt=+1,\ \ y(0)=0$$

الحل الدقيق: $y(x)=\mathrm{Cos}(x)$.

تم حل المثال (3) باستخدام الطريقة الشرائحية المقترحة ومقارنة النتائج مع طريقة تقريبات بادي:



الشكل(5): الحل الشرائحي التقريبي●●● والحل الدقيق ــــــ للمثال (2) بخطوة h=1/10 .



الشكل(6): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي للمثال (2) بخطوة h=1/10.

الجدول(4): مقارنة الطريقة المقترحة مع طريقة تقريبات بادي وحساب اكبر الاخطاء:

الطريقة الشرائحية	طريقة تقريبات بادي[14]	N
7.001510482496087E−12	1.99E−2	4
5.853095785823825E−13	2.47E−4	6
1.0369483049998962E−13	2.47E−5	8
2.7533531010703882E−14	4.64E−7	10
9.547918011776346E−15	6.32E−9	12
3.774758283725532E−15	6.51E−11	14
1.4432899320127035E−15	5.24E−13	16
7.771561172376096E−16	4.33E−15	18

الخاتمة

تم تطوير تقنية شرائحية باربع نقاط تجميع تعتمد على التقريب بكثيرات حدود شرائحية من الدرجة السابعة . تم إثبات أن الطريقة مستقرة ومتقاربة.

كما تم تعيين الحد الأعلى للخطأ و تحديد التقارب بالرتبة السابعة .

تم جراء اختبارات عددية للطريقة بحل ثلاث مسائل اختبار محلولة في مراجع مختلفة، أشارت المقارنات والنتائج المدرجة في الجداول(2) و(3) و (4) إلى أن طريقتنا تفوقت على: طريقة غالركين تشيبتشيف في **[13]** طريقة طريقة تجميع سلسة القوى القياسية في **[12]** و طريقة تجميع كثيرات الحدود القياسية في **[12]**، وطريقة تقريبات بادي **[14]**.

وكذلك وتبين الأشكال (1)−(3)− (5) أن التقنية الشرائحية قدمت حل شرائحي يتطابق إلى حد كبير مع الحل الدقيق وهذا ما يؤكد الاستقرار والتقارب.

وتبين الأشكال (2)−(4)− (6) أن دالة الخطاء مستقرة على كامل المجال .

الاستنتاجات والتوصيات:

نظراً لنجاح التقنية الشرائحية إلى حد كبير في إيجاد الحل التقريبي لمعادلات فولتيرا التفاضلية التكاملية نقترح تطبيق التقنية لحل معادلات فريدهولم التفاضلية التكاملية و لحل معادلات فولتيرا –فريدهولم التفاضلية التكاملية.

المراجع:

1. BURDEN, R. L. and J. D. FAIRES, *Numerical Analysis*, BROOKS/COLE ,Japan, UK, United States, (2011), 863 page.
2. Gachpazan M.. *Numerical Scheme to Solve Integro-Differential Equations System*. Journal of Advanced Research in Scientific Computing. Vol. 1, Issue. 1, 2009, pp. 11-21.
3. Raftari *B., Numerical Solutions of the Linear VolterraIntegro-differential Equations: Homotopy Perturbation Method and Finite Difference Method*. World Applied Sciences Journal 9 (Special Issue of Applied Math): 07-12, 2010.
4. Ogunlaran O. M. and M. O. Oke. *A Numerical Approach for Solving First Order Integro-Differential Equations*. American Journal of Computational and Applied Mathematics 2013, 3(4): 214-219.
5. Ebrahimia N. and J. Rashidinia. *Spline Collocation for Fredholm and Volterra Integro-Differential Equations*. International Journal of Mathematical Modelling& Computations. Vol. 04, No. 03, Summer 2014, 289- 298.
6. Alvandi A., M. Paripour. *Reproducing kernel method with Taylor expansion for linear Volterra integro-differential equations*, Communications in Numerical Analysis. No.1 (2017) pp.40-49.
7. Agbolade O. A. and T. A. Anake, *Solutions of First-Order Volterra Type Linear Integro Differential Equations by Collocation Method*, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2017, pp. 1-5.
8. Wang Y. and L. Zhu, *Solving nonlinear Volterra integro-differential equations of fractional order by using Euler wavelet method*, Advances in Difference Equations, (2017) :27, pp. 1-16.
9. Al-Mazmumy M., S. O. Almuhalbedi, *Modified Decomposition Method by Adomian and Rach for Solving Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations*, Nonlinear Analysis and Differential Equations, Vol. 5, 2017, no. 4, pp. 157 – 170.
10. Deepmala, V. N. Mishra, H. Marasi, H. Shabanian and M. N. Sahlan, *Solution of Voltra-Fredholm Integro-Differential Equations using Chebyshev Collocation Method*, Global Journal of Technology & Optimization, Vol. 8, No 1, 2017,pp.1-4.
11. RANDALL J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Differential Equations, University of Washington*, Version of September, 2005, 261.
12. TaiwoO. A.,Jimoh, A.K, Bello, *Comparison Of Some Numerical Methods For The Solution Of First And Second Orders Linear Integro Differential Equations*., AAmerican Journal of Engineering Research (AJER), Volume-03(2014),pp-245-250
13. K.Issa,F.Salehi, *Approximate Solution of Perturbed Volterra-Fredholm Integrodifferential Equations by Chebyshev-Galerkin Method*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics Volume (2017),pp 6

14. S. K.Vanani , A. Aminataei, *Numerical solution of Volterra integro-differential equations,*Volume13,Number4(2011)

15. MAHMOUD S. M*., Spline Function Method for Solving General Nonlinear Third-Order Boundary Value Problems*, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (43) No (1) 2012.

16. MAHMOUD S. M., *The Numerical Solution of Linear Fifth-Order Boundary-Value Problems by Using Spline functions*, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (35) No (1) 2013.

17. MAHMOUD, S. M., *Spline Collocation Method with Four parameters for Solving A System of Fourth-Order Boundary-Value Problems*. International J Computer Mathematics, Vol 88, No16,November pp. 3468-3482(2011).

18. MAHMOUD, S. M., *Three Point Spline Collocation Method For Solving General Linear And Nonlinear Eighth-Order Boundary-Value Problems*, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (36) No (4) 2014.

19. MAHMOUD, S. M. Osman, M. Sh., Al Kabath, A., C^3*-Seventh Spline Methods with Four Collocation Points for Solving Linear Third-Order Boundary Value Problems*, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (30) No (1) 2008.

20. RANDALL J. LeVeque, Finite Difference Methods for Differential Equations, University of Washington, Version of September, 2005, 261.10.