مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (3) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (3) 2014

خوارزمية القطع والتفريع الجديدة لحل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة

الدكتور محمد مزيد دريباتي*

(تاريخ الإيداع 7 / 4 / 2014. قُبِل للنشر في 7 / 5 /2014)

□ ملخّص □

يتناول هذا البحث طريقة جديدة لحل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة بالاعتماد على طرق سابقة لحل مثل هذه المسائل، نذكر منها طريقة التفريع والعقد (الحدود) وطريقة قطع المستويات (خوارزمية الاقتطاع لغوماري) المعروفتين. وطريقتنا الجديدة تعتمد على عملية تركيب وربط بين الطريقتين المذكورتين وقد اقترحنا تسميتها بطريقة القطع والتفريع الجديدة.

الأسباب التي أدت إلى الربط بين طريقة التفريع والعقد وطريقة قطع المستويات، هي للتغلب على بعض مساوئ الطريقتين وخاصة عند التكرارات الكبيرة والوقت المستغرق الكبير في الحل، والحصول على نتائج تنحصر بين نتائج كل من الطريقتين، ويمكن القول إن طريقة القطع والتفريع الجديدة أخذت الصفات الجيدة واستبعدت الكثير من الصفات السيئة للطريقتين المذكورتين.

الكلمات المفتاحية: بحوث عمليات ، البرمجة الصحيحة، خوارزمية غوموري ، خوارزميات.

* مدرس – قسم الإحصاء الرياضي – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (3) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (3) 2014

The new Algorithm cutting and unloading to solve Integer linear programming problems

Dr. Mouhamed Maziad Dribate*

(Received 7 / 4 / 2014. Accepted 7 / 5 /2014)

□ ABSTRACT □

This work deals with a new method for solving Integer Linear Programming Problems depending on a previous methods for solving these problems such that Branch and Bound method and Cutting Planes method where this new method is a combination between them and we called it Cut and Branch method, The reasons which led to this combination between Cutting Planes method and Branch and Bound method are to defeat from the drawbacks of both methods and especially the big number of iterations and the long time for the solving and getting of a results between the results of these methods where the Cut and Branch method took the good properties from the both methods. And this work deals with solving a one problem of Integer Linear Programming Problems by Branch and Bound method and Cutting Planes method and the new method, and we made a programs on the computer for solving ten problems of Integer Linear Programming Problems by these methods then we got a good results and by that, the new method (Cut and Branch) became a good method for solving Integer Linear Programming Problems. The combination method which we doing in this research opened a big and wide field in solving Integer Linear Programming Problems and finding the best solutions for them where we did the combination method again between the new method (Cut and Branch) and the Cutting Planes method then we got a new method with a very good results and solutions.

Key words: Operations Research, the correct programming, algorithm Gomary, algorithms.

*Assistant professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.

مقدمة:

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة (Integer of linear programming problem [1−11])هي مسألة برمجة خطية اعتيادية على أن تكون متحولات القرار جميعها أو بعضها مقيدة وذات قيمة صحيحة.إن حل النماذج ذات الأعداد الصحيحة يعتمد بالأساس على مبدأين:

المبدأ الأول هو أن النماذج الصحيحة تستخدم في المرحلة الأولى الطريقة المبسطة (خوارزمية السيمبلكس وتعديلاتها) في الحل، والمبدأ الثاني هو اعتماد النتائج النهائية التي تمثل الحل الأمثل كأساس للوصول للحل الأفضل الذي يجعل قيم المتحولات الأساسية قيماً صحيحة(غير كسرية).

تمثل مسألة البرمجة الصحيحة إحدى فروع البرمجة الرياضية (MP)Mathematical Programming [4] وهي بدورها تهتم بتحديد القيمة القصوى العظمى أو الصغرى لدالة تضم عدة متحولات وتحقق عدداً من القيود (Constrains Set) ويمكن تمثيلها بالشكل: $MP{:}\max(\min)\ f(x); x\in S\subseteq\Re^{n}$ حيث S هي مجموعة قيود أو شروط و f تسمى دالة الهدف (Objective Function) وكل $x\in S$ يسمى بالحل الممكن أو النافذ (Feasible Solution) لمسألة البرمجة الرياضية.

إذا كان $x^{*}\in S$ يحقق: $\left(-\infty\prec f(x^{*})\prec f(x)\right)$ للدالة الصغرى و $\left(-\infty\prec f(x)\prec f(x^{*})\right)$ للدالة العظمى من أجل كل $x\in S$، فإن x^{*} يسمى بالحل الأمثل (Optimal Solution) لمسألة البرمجة الرياضية.

مسألة البرمجة الخطية linear programming problem [1, 4, 5, 6] (LPP) هي حالة خاصة من البرمجة الرياضية حيث $f(x)$ هي دالة خطية و S مجموعة من المتحولات x تحقق جملة المعادلات الخطية $Ax=b$, $x\geq 0$ لذلك فإن مسألة البرمجة الصحيحة هي مسألة برمجة رياضية حيث $Z^{n}\subseteq S\subseteq\Re^{n}$ وهي مجموعة من المتجهات الصحيحة ذات البعد n .

مسألة البرمجة الصحيحة integer programming problem [1,4,5,6] وتُكتب اختصاراً (IPP) بدأت عام 1958 من قبل العالم (Ralph Gomary) وهي تبحث في إيجاد الحل الأمثل من حيث التعظيم أو التصغير لدالة الهدف مع متحولات قرار (Decision Variables) تأخذ قيماً صحيحة وتحقق مجموعة من القيود [2].

يوجد نوعان أساسيان من مسائل البرمجة الصحيحة هما:

1− مسألة البرمجة الخطية الصحيحة Integer Linear programming problem (ILPP)

2− مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة Integer Nonlinear programming problem (INLPP)

والفرق بين المسألتين هو خطية ولاخطية دالة الهدف.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في تقديم خوارزمية جديدة لحل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة، وهي عبارة عن تركيب طريقة قطع المستويات مع طريقة التفريع والعقد. تُضاف هذه الخوارزمية لمجموعة الطرق والخوارزميات المعروفة في حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة لتضع أمام المهتمين بهذا الموضوع حلولاً وإمكانيات جديدة تبين لهم أهمية العمل والتفكير بإنشاء خوارزميات أخرى جديدة تختصر الجهد والوقت للحصول على الحل المثالي لمسائل البرمجة الخطية الصحيحة.

طرائق البحث ومواده:

قمنا بدراسة تحليلية شاملة لطريقتي قطع المستويات وطريقة التفريع والعقد المعروفتين من حيث إيجابيات وسلبيات كل من الطريقتين، حيث تم الربط والتركيب بين الطريقتين باستبعاد السلبيات والاستفادة من الإيجابيات.

المسألة العامة للبرمجة الخطية هي إيجاد قيم المتحولات التي تعظم أو تقلل قيمة دالة الهدف تبعاً لقيود تمثل كمية الموارد المتاحة. نحل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة أولاً متجاهلين شروط المتحولات لأخذ قيم صحيحة، أي نحل المسألة على أنها مسألة برمجة خطية يُطلب فيها إيجاد الحل الحقيقي الأمثل، بعد ذلك نستخدم خوارزميات مسألة البرمجة الخطية الصحيحة للانتقال من الحل الحقيقي باتجاه إيجاد الحلول الموجبة الصحيحة أي الحلول التي تكون فيها كل المتحولات صحيحة. خوارزميات البرمجة الخطية الصحيحة تحاول إيجاد الحل الموجب الصحيح ثم تبحث عن حل صحيح آخر أفضل.

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة [1−7] Integer Linear programming problem (ILPP):

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة هي مسألة برمجة خطية بحيث تكون جميع متحولات القرار أو بعضها ذات قيمة صحيحة، وهناك ثلاثة أنواع من مسألة البرمجة الخطية الصحيحة:

1− مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة Pure Integer programming problem (PIPP):

وهي المسألة التي تكون فيها جميع متحولات القرار ذات قيمة صحيحة.

2− مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المختلطة Mixed Integer programming problem (MIPP):

وهي المسألة التي تكون فيها بعض متحولات القرار ذات قيمة صحيحة.

3− مسألة البرمجة الخطية الصحيحة الثنائية [8] Binary Integer programming problem:

وهي المسألة التي تكون فيها جميع متحولات القرار تأخذ إحدى القيمتين الصحيحتين الصفر أو الواحد.

4. طريقة التفريع والعقد(الحدود) [8] Branch and Bound method (B.B):

نشأت طريقة التفريع والعقد من قبل العالمين (Land) و (Doig) في عام 1960 وتم تطويرها من قبل العالم (Dakin) في عام 1965 وهي تقانة عددية منتظمة لحل مسائل البرمجة الصحيحة (IPP).

خوارزمية طريقة التفريع والعقد مع تحسيناتها وتوسعاتها تنتج مجموعة بناءة ومضمونة من الحلول لمسألة البرمجة الصحيحة .

1− خوارزمية طريقة التفريع والعقد:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة الآتية:

$$\left.\begin{array}{l} Maximize\ z = c^T x \\ Subject\ to\ Ax = B\ ,\ x \geq 0 \\ x_j\ ,\ j \in I\ ,\ \text{integer} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

حيث A مصفوفة من القياس $m \times s$ و B مصفوفة من القياس $m \times 1$ و C مصفوفة من القياس $s \times 1$ و x مصفوفة من القياس $s \times 1$.

<u>الخوارزمية:</u>

الخطوة 1: (الحل الابتدائي):

ابدأْ بحل المسألة (1) كمسألة برمجة خطية باستخدام خوارزمية السيمبلكس (Simplex Method) متجاهلاً القيود الصحيحة على المتحولات x_j . إذا كانت جميع المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ تملك قيماً صحيحة، توقفْ، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (تفرع المتحولات المختارة):

اختر من المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ المتحول الذي تكون قيمته غير صحيحة عند تلك العقدة، ولهذه القيمة أكبر جزء كسري. يجب أن تكون المتحولات المختارة x_j أساسية وإلا قيمتها ستكون صفراً.

نفرض أن المتحول الأساسي المُختار من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية هو المتحول ذو الدليل i وتكون قيمته غير الصحيحة هي x_{Bi}، حيث نستطيع كتابتها على الشكل الآتي:

$x_{Bi} = [x_{Bi}] + f_i$ حيث $0 \prec f_i \prec 1$ ، وبما أن قيمة المتحول x_j يجب أن تكون صحيحة، عندئذ فإنه يحقق إحدى المتراجحتين:

$$x_j \le [x_{Bi}] \tag{2}$$

$$x_j \ge [x_{Bi}] + 1 \tag{3}$$

الخطوة 3: (صياغة العقد الجديدة):

اعملْ على تكوين مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة متمثلة بالعقد الموصوفة في الخطوة 2.

المسألة الأولى مكونة من إضافة القيد (2) ، والمسألة الثانية مكونة من إضافة القيد (3). حلْ كلاً من هاتين المسألتين باعتبارهما مسألتي برمجة خطية مستخدماً خوارزمية السيمبلكس.

الخطوة 4: (اختبار العقدة النهائية):

كل من العقد الحاصلة في الخطوة 3 قد تكون عقدة نهائية، بسبب أحد الأمرين الآتيين:

1- المسألة عند تلك العقدة ليس لها حل ممكن، عند ذلك اذهبْ إلى الخطوة 5.

2- قيم المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ جميعها صحيحة، وبذلك قارنْ قيمة دالة الهدف عند تلك العقدة مع أفضل قيمة توصلت إليها، إذا كانت قيمة دالة الهدف عند العقدة الجديدة أفضل، فغيّرْ قيمة العقدة القديمة بهذه العقدة واذهبْ إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار العقدة):

1- إذا كانت بالضبط عقدة واحدة في الخطوة 4 منتهية، استخدمْ العقدة غير المنتهية واذهبْ إلى الخطوة 2.

2- إذا كانت كل العقد في الخطوة 4 غير منتهية، اخترْ العقدة الأكثر ضمانة للوصول إلى الهدف، وهي العقدة التي تكون عندها قيمة دالة الهدف أكبر ما يمكن، اذهبْ إلى الخطوة 2.

الصفة السلبية الأساسية لهذه الخوارزمية تكمن في حل مسألة البرمجة الخطية كاملة عند كل عقدة وهذا الإجراء، وخاصة عند المسائل الكبيرة سيأخذ وقتاً كبيراً فضلاً عن عدد تكرارات أكبر [4, 5, 6].

2- خواص طريقة التفريع والعقد:

- ايجابيات طريقة التفريع والعقد:

1) الوقت المستغرق في الحل Central Processing Unit (CPU) صغير.

2) يتم الحصول على الحل بوساطة التجزئة، وذلك بتجزئة (تفريع) المتحولات ذات القيم الحقيقية من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية ونستمر بالتجزئة حتى الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على خوارزمية السيمبلكس.

3) طريقة التفريع والعقد طريقة تضمن الوصول إلى الحل الأمثل.

4) إمكانية برمجة هذه الطريقة حاسوبياً بسهولة.

5) إمكانية تطبيق هذه الطريقة على النماذج الخطية ذات المتحولات المختلطة.

- سلبيات طريقة التفريع والعقد:

1) عدد التكرارات Number of Iteration (NOI) في الحل كبير خاصة عند البدء بتفرع قيمة غير كفوءة.

2) الاستمرار بالتفرع حتى ولو حصلنا على الحل، حتى نحصل على عقد مكررة وخارجة عن المنطقة.

3) عدد العقد المولدة ممكن أن يكون كبيراً.

4) حجم العمل للحصول على الحل الأمثل الصحيح كبير جداً، وهو يزداد كلما ازداد عدد المتحولات وعدد القيود.

5. طريقة قطع المستويات [1,4,5,6,7] (Cutting Planes Method) :

طريقة قطع المستويات Cutting Planes Method (C.P) أو Gomary Method هي طريقة فريدة من نوعها وهي الطريقة التقاربية الثانية لحل مسائل البرمجة الصحيحة والتي نُشرت في عام 1958 من قبل العالم Ralph.E.Gomory وقد سُميت الخوارزمية باسمه Gomary Cutting Planes Method.

الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي إضافة قيد (قاطع) للمسألة مرة تلو الأخرى إلى حين الوصول للحل المثالي الصحيح لمسألة البرمجة الصحيحة. لهذا القيد خاصيتان أساسيتان هما:

الأولى، الحل الأمثل غير الصحيح لمسألة البرمجة الخطية لا يحقق هذا القيد،

الثانية، كل الحلول الممكنة الصحيحة للمسألة الأصلية سوف تحقق هذا القيد الجديد [7].

1- خوارزمية طريقة قطع المستويات:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة على الشكل الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} Maximize\ z=c^T x \\ Subject\ to\ Ax=B\ ,\ x\geq 0 \\ \quad x_j\ ,\ j\in I\ ,\ \text{integer} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

حيث A مصفوفة من القياس $m\times s$ و B مصفوفة من القياس $m\times 1$ و C مصفوفة من القياس $s\times 1$ و x مصفوفة من القياس $s\times 1$.

الخوارزمية:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي):

ابدأ بحل المسألة المعطاة في (4) باعتبارها مسألة برمجة خطية مستخدماً خوارزمية السيمبلكس (Simplex Method) متجاهلاً القيود الصحيحة على متحولات القرار x_j. إذا كانت جميع المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ لها قيم صحيحة ، توقفْ، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2 .

الخطوة 2: (اختيار القيد):

اخترْ السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتحول الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدمْ السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتحول لها أكبر جزء كسري، لأن ذلك قد يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قمْ بتوليد أو إنشاء قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات):

افرضْ أن السطر المختار هو السطر ذو الدليل i ومعادلته هي:

$$x_{Bi}+\sum_j a_{ij}x_j=b_i\ \ ,\ \ j\in I$$

$$x_{Bi}+\sum_j \left(\left[a_{ij}\right]+f_{ij}\right)x_j=\left[b_i\right]+f_i$$

$$x_{Bi}+\sum_j \left[a_{ij}\right]x_j-\left[b_i\right]=f_i-\sum_j f_{ij}\ x_j\le 0$$

القيد الجديد:

$$f_i-\sum_j f_{ij}x_j+\delta=0 \qquad (5)$$

حيث $f_{ij}=a_{ij}-\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} وكذلك $0\le f_{ij}\prec 1$

و $f_i=b_i-\left[b_i\right]$ هو الجزء الكسري لـ b_i وكذلك $0\prec f_i\prec 1$

δ متحول مساعد جديد ممكن وصحيح.

الخطوة 4: (إضافة القيد):

قمْ بإضافة القيد(5) للجدول الأخير من حل الطريقة الفردية (Simplex Method) وقمْ بالحل على أنها مسألة برمجة خطية. إذا كانت جميع المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ صحيحة فالمسألة انتهت، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2.

2- خواص طريقة قطع المستويات:

- إيجابيات طريقة قطع المستويات:

1) عدد التكرارات (NOI) قليل.

2) يتم الحصول على الحل بوساطة القواطع (القيود الجديدة) التي يمكن استخراجها من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية حيث يتم الاقتطاع من منطقة الحل حتى الحصول على الحل الأمثل الصحيح بالاعتماد على خوارزميات السيمبلكس.

– سلبيات طريقة قطع المستويات:

1) الوقت المستغرق في الحل (CPU) كبير.

2) في بعض الأحيان لا نحصل على الحل وخاصة حين البدء بالحل بأحد القواطع غير الكفوءة وبذلك تكون طريقة قطع المستويات غير مضمونة الوصول إلى الهدف.

3) عدد القيود المولدة في طريقة قطع المستويات يمكن أن يكون كبيراً.

6. طريقة القطع والتفريع الجديدة [1−11] Method of cutting and new branching

طريقة القطع والتفريع الجديدة Method of cutting and new branching أو Cut And Branch وهي الطريقة المقترحة، هي تقانة جديدة ناجحة جداً في حل مجموعة واسعة من مسائل البرمجة الصحيحة وهي توفر ضمانة الوصول إلى الحل المثالي الصحيح.

سوف نقوم فيما يلي بتوضيح كيفية أداء هذه التقانة، مع الإشارة إلى أن خوارزمية طريقة القطع والتفريع الجديدة يمكن تطويرها وتوسيعها وهي خوارزمية واعدة يمكن برمجتها حاسوبياً وستكون ذات أهمية أكبر مع استغلال سرعة أجهزة الحواسيب الحالية.

خوارزمية طريقة القطع والتفريع الجديدة هي تركيب بين طريقة قطع المستويات وطريقة التفريع والعقد وهي تعمل كسابقاتها في حل سلسلة متتابعة من مسائل البرمجة الخطية للحصول على حل مسألة البرمجة الصحيحة.

طريقة قطع المستويات التي تم توضيحها في الفقرة 5 السابقة لا تبدو طريقة قوية، فهي تسعى للحصول على الحل المثالي الصحيح بتقارب بطيء، وربما لا تعطي الحل الأمثل ولا تضمن الحصول عليه، كما في طريقة التفريع والعقد التي تكون أكثر سرعة وضمانة في الوصول إلى الحل الأمثل، لذلك حاولنا جعل طريقة قطع المستويات أفضل من السابق وذلك بإجراء تركيب وربط بينها وبين طريقة التفريع والعقد، وأسمينا هذا التركيب الجديد طريقة القطع والتفريع، مع الإشارة هنا إلى أنه قد تم بناء هذا التركيب الجديد من خلال الخوارزميتين الموضحتين في الفقرتين 1.6 و 2.6 الآتيتين:

1– خوارزمية أولى لطريقة القطع والتفريع الجديدة:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة على الشكل الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} Maximize\ z=c^{T}x \\ Subject\ to\ Ax=B\ ,\ x\geq 0 \\ x_j\ ,\ j\in I\ ,\ integer \end{array}\right\} \qquad (6)$$

حيث A مصفوفة من القياس $m\times s$ و B مصفوفة من القياس $m\times 1$ و C مصفوفة من القياس $s\times 1$ و x مصفوفة من القياس $s\times 1$.

الخوارزمية:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي):

ابدأ بحل المسألة المعطاة في (6) باعتبارها مسألة برمجة خطية مستخدماً خوارزمية سيمبلكس متجاهلاً القيود الصحيحة على متحولات القرار x_j.

إذا كانت جميع المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ ذات قيم صحيحة، توقفْ، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (اختيار القيد):

اخترْ السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتحول الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة تساوي b_i (استخدمْ السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتحول لها أكبر جزء كسري، لأن ذلك قد يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات):

افرضْ أن السطر المُختار هو السطر i ومعادلته هي:

$$x_{Bi}+\sum_j a_{ij}x_j=b_i \quad , \quad j\in I$$

$$x_{Bi}+\sum_j \left(\left[a_{ij}\right]+f_{ij}\right)x_j=\left[b_i\right]+f_i$$

$$x_{Bi}+\sum_j\left[a_{ij}\right]x_j-\left[b_i\right]=f_i-\sum_j f_{ij}\,x_j\le 0$$

القيد الجديد:

$$f_i-\sum_j f_{ij}\,x_j+\delta=0 \qquad (7)$$

حيث $f_{ij}=a_{ij}-\lfloor a_{ij}\rfloor$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} وكذلك $0\le f_{ij}\prec 1$

و $f_i=b_i-[b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i وكذلك $0\prec f_i\prec 1$

δ متحول مساعد جديد ممكن وصحيح.

الخطوة 4: (إضافة القيد):

قمْ بإضافة القيد (7) للجدول الأخير من حل خوارزمية السيمبلكس وقمْ بالحل على أنها مسألة برمجة خطية. وهنا نناقش الحالات الآتية:

1− المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ ذات قيم صحيحة وممكنة فالمسألة انتهت، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2.

2− بعض المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ ذات قيم غير صحيحة، فاذهبْ إلى الخطوة 2. وإلا اذهبْ إلى 3.

3− متحول واحد من المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ له قيمة صحيحة، عندها ابدأ باستخدام طريقة التفريع والعقد لتفرع المتحول غير الصحيح أي اذهبْ إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار المتحول المتفرع):

اخترْ المتحول ذا القيمة غير الصحيحة من المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ والذي سيستخدم لتكوين قيود التفرع والذي له أكبر جزء كسري.

المتحول x_j الذي تم اختياره يجب أن يكون متحولاً أساسياً وإلا ستكون قيمته صفراً. افرضْ أن المتحول هو المتحول الأساسي i من الجدول الأخير لحل خوارزمية السيمبلكس ولتكن قيمته x_{Bi} .

سوف نكتب $x_{Bi}=\left[x_{Bi}\right]+f_i$ حيث $0\prec f_i\prec 1$. وبما أن المتحول x_j يجب أن تكون له قيم صحيحة، عندئذ فإنه يحقق إحدى المتراجحتين:

$$x_j\le\left[x_{Bi}\right] \qquad (8)$$

$$x_j\ge\left[x_{Bi}\right]+1 \qquad (9)$$

الخطوة 6: (صياغة العقد الجديدة):

اعملْ على تكوين مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بالقيود المتمثلة في الخطوة 5.

المسألة الأولى مكونة من إضافة القيد (8) ، والمسألة الثانية مكونة من إضافة القيد (9)، قمْ بحل كلٍ من هاتين المسألتين على أنهما مسألتي برمجة خطية باستخدام خوارزمية السيمبلكس.

الخطوة 7: (اختبار العقدة المنتهية):

كل عقدة من العقد الحاصلة في الخطوة 6 تكون عقدة منتهية في إحدى الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى: المسألة المتمثلة بهذه العقدة ليس لها حل ممكن.

الحالة الثانية: جميع المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ صحيحة وهذا هو الحل الأمثل للمسألة (6)، أما إذا كانت تلك العقدة غير منتهية فاذهبْ إلى الخطوة 5.

2- خوارزمية ثانية لطريقة القطع والتفريع الجديدة (قطع ، تفريع ، قطع):

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة على الشكل الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} Maximize\ z=c^T x \\ Subject\ to\ Ax=B\ ,\ x\geq 0 \\ x_j\ ,\ j\in I\ ,\ \text{integer} \end{array}\right\} \qquad (10)$$

حيث A مصفوفة من القياس $m\times s$ و B مصفوفة من القياس $m\times 1$ و C مصفوفة من القياس $s\times 1$ و x مصفوفة من القياس $s\times 1$.

الخوارزمية:

الخطوة 1: (الحل الابتدائي):

ابدأ بحل المسألة المعطاة في (10) باعتبارها مسألة برمجة خطية مستخدماً خوارزمية السيمبلكس متجاهلاً القيود الصحيحة على متحولات القرار x_j.

إذا كانت جميع المتحولات $x_j\ ,\ j\in I$ ذات قيم صحيحة، توقفْ، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (اختيار القيد):

اخترْ السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتحول الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدمْ السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتحول لها أكبر جزء كسري، لأن ذلك قد يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد (إنشاء) قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات):

افرضْ أن السطر المُختار هو السطر i ومعادلته هي:

$$x_{Bi}+\sum_j a_{ij}x_j=b_i\ \ ,\ \ j\in I$$

$$x_{Bi}+\sum_j \left(\left[a_{ij}\right]+f_{ij}\right)x_j=\left[b_i\right]+f_i$$

$$x_{Bi}+\sum_j \left[a_{ij}\right]x_j-\left[b_i\right]=f_i-\sum_j f_{ij}\,x_j\leq 0$$

القيد الجديد:

$$f_i - \sum_j f_{ij}\, x_j + \delta = 0 \qquad (11)$$

حيث $f_{ij} = a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} وكذلك $0 \le f_{ij} \prec 1$

و $f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i وكذلك $0 \prec f_i \prec 1$

δ متحول مساعد جديد ممكن وصحيح.

الخطوة 4: (إضافة القيد):

قمْ بإضافة القيد (11) للجدول الأخير من حل خوارزمية السيمبلكس وقمْ بالحل على أنها مسألة برمجة خطية. إذا كانت :

1- المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ ذات قيم صحيحة وممكنة فالمسألة انتهت، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2.

2- بعض المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ ذات قيم غير صحيحة فاذهبْ إلى الخطوة 2. وإلا اذهبْ إلى 3.

3- متحول واحد من المتغيرات $x_j\ ,\ j \in I$ له قيمة صحيحة، عندها ابدأ باستخدام طريقة التفريع والعقد لتفرع المتحول غير الصحيح أي اذهبْ إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار المتحول المتفرع):

اخترْ المتحول ذا القيمة غير الصحيحة من المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ والذي سيستخدم لتكوين قيود التفرع والذي له أكبر جزء كسري.المتحول الذي تم اختياره يجب أن يكون متحولاً أساسياً وإلا ستكون قيمته صفراً.

افرضْ أن المتحول هو المتحول الأساسي i من الجدول الأخير لحل خوارزمية السيمبلكس ولتكن قيمته x_{Bi} . سوف نكتب $x_{Bi} = [x_{Bi}] + f_i$ حيث $0 \prec f_i \prec 1$. وبما أن المتحول x_j يجب أن تكون له قيم صحيحة، عندئذ فإنه يحقق إحدى المتراجحتين:

$$x_j \le [x_{Bi}] \qquad (12)$$

$$x_j \ge [x_{Bi}] + 1 \qquad (13)$$

الخطوة 6: (صياغة العقدة الجديدة):

اعملْ على تكوين مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بالقيود المتمثلة في الخطوة 5.

المسألة الأولى مكونة من إضافة القيد (12)، والمسألة الثانية مكونة من إضافة القيد (13)، حلْ كلاً من هاتين المسألتين على أنهما مسألتي برمجة خطية باستخدام خوارزمية السيمبلكس.إذا كانت:

1- كل المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ ذات قيم صحيحة وممكنة فالمسألة (10) انتهت، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 2.

2- الحل غير ممكن أي خارج منطقة الحل، عندها توقفْ واخترْ عقدة أخرى، وإلا اذهبْ إلى الخطوة 3.

3- متحول واحد من المتحولات $x_j\ ,\ j \in I$ له قيمة صحيحة، عندها ابدأْ باستخدام طريقة قطع المستويات كما في الخطوة 3 على المتحول غير الصحيح في كل من العقدتين الناتجتين من طريقة التفريع والعقد، عندها سوف نحصل على الحلين الآتيين من كل عقدة:

1- الحل الأمثل الممكن (Optimal Solution) للمسألة (10) .

2- الحل غير ممكن (خارج منطقة الحل) (Infeasible Solution) للمسألة (10)، عندها توقفْ.

3.6 خواص طريقة القطع والتفريع الجديدة:

1) عدد التكرارات (NOI) قليل نسبياً (محصور بين عدد تكرارات طريقتي قطع المستويات والتفريع والعقد).

2) الوقت المستغرق في الحل (CPU) قليل نسبياً أيضاً (محصور بين الوقت المستغرق في حل طريقتي قطع المستويات والتفريع والعقد).

3) يتم الحصول على الحل أولاً بوساطة القيود أو القواطع التي يمكن استخراجها من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية، ثم بعد ذلك نقوم بتجزئة (تفرع) المتحولات ذات القيم غير الصحيحة (الحقيقية)، ونستمر بالتجزئة إلى حين الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على خوارزمية السيمبلكس.

4) من الخواص الثلاثة السابقة تصبح طريقة القطع والتفريع الجديدة والمقترحة مضمونة الوصول للحل الأمثل لأنها تنتهي بطريقة التفريع والعقد.

7. النتائج العددية:

تم اختيار عشرة مسائل من البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة وتم إيجاد حلها بالحاسوب بالطرق الثلاث المعروضة في بحثنا من أجل ملاحظة مدى دقة النتائج ومقارنة هذه النتائج بين الطرق الثلاث وبيان نجاح طريقتنا المقترحة وهذه المسائل مع حلولها نعرضها من خلال الجدول الآتي:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Problems</th><th colspan="2">Branch and Bound
التفريع والعقد</th><th colspan="2">Cutting planes
قطع المستويات</th><th colspan="2">New Algorithm
الخوارزمية الجديدة</th></tr>
<tr><th>NOI
عدد التكرارات</th><th>CPU (sec)
الزمن</th><th>NOI
عدد التكرارات</th><th>CPU (sec)
الزمن</th><th>NOI
عدد التكرارات</th><th>CPU (sec)
الزمن</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$Max\ Z = 5x_1 + 2x_2$
$s.t \quad 5x_1 + 4x_2 \le 21$
$x_1, x_2 \ge 0$, integer</td><td>4</td><td>0.24</td><td>3</td><td>0.62</td><td>3</td><td>0.46</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$Max\ Z = 10x_1 + x_2$
$s.t \quad 2x_1 + 5x_2 \le 11$
$x_1, x_2 \ge 0$, integer</td><td>4</td><td>0.22</td><td>2</td><td>0.38</td><td>3</td><td>0.29</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$
$s.t \quad 3x_1 + 2x_2 \le 18$
$x_1, x_2 \ge 0$, integer</td><td>2</td><td>0.11</td><td>1</td><td>0.32</td><td>1</td><td>0.20</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$Max\ Z = 120x_1 + 80x_2$
$s.t \quad 2x_1 + x_2 \le 6$
$7x_1 + 8x_2 \le 28$
$x_1, x_2 \ge 0$, integer</td><td>7</td><td>0.33</td><td>4</td><td>0.90</td><td>5</td><td>0.70</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$Min\ Z = 5x_1 + 8x_2$
$s.t \quad x_1 + x_2 \le 6$
$5x_1 + 9x_2 \le 49$
$x_1, x_2 \ge 0$, integer</td><td>8</td><td>0.37</td><td>3</td><td>0.87</td><td>3</td><td>0.65</td></tr>
</table>

6	$Min\ Z = 3x_1 + x_2$ $s.t \quad x_1 + 2x_2 \le 8$ $3x_1 - 4x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$, integer	9	0.49	4	1.03	5	0.74
7	$Min\ Z = 4x_1 + 3x_2$ $s.t \quad 2x_1 + x_2 \le 11$ $-x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$, integer	7	0.31	4	0.98	6	0.77
8	$Min\ Z = 6x_1 + 7x_2$ $s.t \quad x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \le 4$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$, integer	9	0.72	2	1.07	3	0.84
9	$Min\ Z = x_1 + 9x_2 + x_3$ $s.t \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$, integer	5	0.38	2	0.85	3	0.56
10	$Min\ Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ $s.t \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5$ $-x_1 + x_2 + 3x_3 \le -2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$, integer	2	0.31	1	0.66	1	0.49
Total		57	3.48	26	7.68	33	5.70

يبين الجدول الآتي النسبة المئوية لتحسين الأداء في الخوارزمية الجديدة مقارنة مع طريقتي قطع المستويات والتفريع والعقد.

Total	New Algorithm الخوارزمية الجديدة	Branch and Bound التفريع والعقد	Cutting planes قطع المستويات
NOI عدد التكرارات	100%	172.72%	78.79%
CPU زمن الحل	100%	61.05%	134.73%

من جدول النسبة المئوية نلاحظ تحقق الصفتين الأولى والثانية من صفات طريقة القطع والتفريع الجديدة.

الاستنتاجات والتوصيات:

نستنتج من هذا العمل أنه يمكن تركيب طريقتين للحصول على طريقة ثالثة ذات نتائج أفضل أو مشابهة لنتائج خوارزميات أخرى، فمن الممكن ربط طريقة قطع المستويات وطريقة التفريع والعقد أكثر من مرة ، كما لاحظنا في الفقرة 2.6 حيث تم الربط مرة أخرى بقطع المستويات أي حصلنا على (قطع، تفريع، قطع) فانتهى الناتج إلى حلين، حل خارج عن منطقة الحل (غير ممكن) (Infeasible Solution)، وحل أمثل صحيح للمسألة (10) (Optimal

(Solution، فأصبح هذا التركيب الثلاثي الجديد تركيباً ممتازاً حيث أخذ الصفات الجيدة بين الطريقة الجديدة (القطع والتفريع) وطريقة قطع المستويات، وهذا يفتح أبواباً واسعة وجديدة في مسائل البرمجة الخطية الصحيحة (المطلقة والمختلطة) وإيجاد أفضل الحلول لها. من الخواص الثلاث السابقة تصبح طريقة القطع والتفريع الجديدة مضمونة الوصول للحل الأمثل لأنها تنتهي بطريقة التفريع والعقد.

من خلال الخواص الثلاث المذكورة في الفقرة 3.6 والتي تشير إلى أن طريقة القطع والتفريع الجديدة مضمونة الوصول للحل الأمثل لأنها تنتهي بطريقة التفريع والعقد وهي مضمونة الوصول للحل الأمثل، لذلك نوصي باستخدام هذه الطريقة والبحث عن تراكيب أخرى لخوارزميات معروفة في البرمجة الخطية الصحيحة من أجل الوصول لطرق جديدة مستغلين السرعات الكبيرة لأجهزة الحواسيب الحالية. كما نوصي باستخدام الخوارزمية الجديدة (NEW) في حل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة كونها تقانة ناجحة جداً في حل مجموعة واسعة من مسائل البرمجة الصحيحة وهي توفير ضمانة الوصول إلى الحل الأمثل.

المراجع:

[1] العلي، إبراهيم. *مدخل إلى بحوث العمليات*.الطبعة (ثانية معدلة)، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية،2004، 177-208.

[2] البلخي، زيد تميم. *مقدمة في بحوث العمليات*.الطبعة الأولى جامعة الملك سعود،المملكة العربية السعودية ، 1998، 52-65 .

[3] المحمد، صبحي; إبراهيم، نائب. *بحوث العمليات*.جامعة حلب، حلب، سورية، 2008، 111-155 .

[4] TAHA,H.A. *Operations Research An Introduction* ,Pearson Precintle hall, 8th Edition ,New Jersey , USA . 2007,

[5] TAHA, H.A. *Operations Research, An Introduction*. Seven Edition, U.S.A,2005, 381-428.

[6] TAHA, H.A. *Operations Research, An Introduction*. Macmillan Publishing Company, Fifth Edition U.S.A, 1992, 612.

[7] TAHA, H. A. *Operations research an introduction*, Macmillan, New York, USA. Chapter 8, 1979, 258.

[8] [8] ADAM, N. LETCHFORD AND ANDREA LODI, *Primal Cutting Plane Algorithm Revisited* , Lancaster LA 14 YW, V, K, ,2000 .

[9] GRAFINKEL R. S. AND G. L. NEMHAUSER. *Integer Rogramming*", Math3902 Operation Research , 2003, CHAPTER 1, (1-15).

[10] RALPH, E. GOMORY. *An All-Integer Programming Algorithm*, Rand Report, R. M. 25797, New York Chapter 3, Pp (46-66).

[11] Villalobos, J. R.; Hogg, G. L. And Griffin, P. M. *Introduction to integer programming*. Arizona state University and George institute of technology, 2002, 40-70.