دراسة قابلية حل المعادلتين الديوفانتيتين
$kX^2 + 2lXY - 2kY^2 = \pm 1$ و $X^2 - mY^2 = -2$ في آن واحد

د. حسن عبدو سنكري*

(تاريخ الإيداع 30 / 1 / 2019. قُبِل للنشر في 13 / 5 /2019)

□ ملخّص □

قمنا في هذا البحث بدراسة حل المعادلتين الديوفانتيتين المذكورتين في عنوان البحث معاً في آنٍ واحد في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، وتوصلنا إلى أنه عندما يكون m عدداً أولياً فإن كل من المعادلتين السابقتين قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت احداهما قابلة للحل، وعندما يكون m عدداً فردياً فقد وجدنا الشرط اللازم والكافي لكي تكون أي من المعادلتين السابقتين قابلة للحل عندما تكون الأخرى قابلة للحل، ثم بيّنا أن تعيين حل لإحدى المعادلتين السابقتين يستخدم في إيجاد حل للمعادلة الأخرى. إضافةً إلى ذلك حددنا الشروط اللازمة لقابلية حل معادلة بيل وإحدى الحالات الخاصة لمعادلة بيل المعممة، وأيضاً وجدنا علاقة بين الحل الأساسي لمعادلة بيل والحل الأساسي لحالة خاصة من معادلة بيل المعممة، بالإضافة إلى إثبات بعض النتائج المتعلقة بمجموعة حلول معادلة بيل عندما يكون m عدداً فردياً.

الكلمات المفتاحية: المعادلات الديوفانتية، حلقة الأعداد الجبرية، الكسور المستمرة، معادلة بيل، معادلة بيل المعممة.

* أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سوريا. البريد الالكتروني hasan.sankari2@gmail.com .

Solvability of both Diophantine equations $kX^2 + 2lXY - 2kY^2 = \pm 1$ and $X^2 - mY^2 = -2$

Dr. Hasan Abdo Sankari*

(Received 30 / 1 / 2019. Accepted 13 / 5 /2019)

□ ABSTRACT □

In this research, we investigate solving both of Diophantine equations in the title of research in $\mathbb{Z}$. If m is a prime number, then both of Diophantine equations are solvability if and only if one of them is solvability, and we find conditions to make one of equations solvability if and only if the other is solvability, and use the solution of one to find the solution of other. Besides of determine conditions to solvability of the Pell's equation and one case of generalizations Pell's equation, and we find relation of main solution of Pell's equation and other case of generalization Pell's equation. Adding of them we prove some results about solution of Pell's equation, where m is an odd number.

Keywords: Diophantine equations, Ring of integrals, Continued fractions, Pell's equation, generalizations Pell's equation.

***Assistant Professor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia– Syria - Email :Hasan.Sankari2@gmail.com.**

مقدمة:

إن تاريخ نظرية الأعداد مليئ بتخمينات شهيرة وأسئلة مفتوحة، وتعتبر تخمينات ومسائل المعادلات الديوفانتية من التخمينات والمسائل المهمة في نظرية الأعداد الحديثة، وإن كثيراً من المعادلات الديوفانتية التربيعية لم تحل لحد الأن، وهناك عديدٌ منها تم حلها بطرقٍ معقدةٍ تفوق ذوي الاختصاص والمهتمين بهذا الموضوع.

تعد معادلة بيل $X^2-mY^2=1$ حيث m عددٌ صحيحٌ موجبٌ من أهم المعادلات الديوفانتية وقد درست هذه المعادلة في القرن السابع عشر من قبل كل من العلماء اولر (Euler) وويلس (Wiles) وبراونكر (Brounker) وأخرين، وفي القرن الثامن عشر استخدم العالم لاغرانج الكسر المستمر الممثل لـ $\sqrt{m}$ ليعطي البرهان الأول لقابلية حل معادلة بيل دوماً في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، وحديثاً في أواخر القرن الماضي **[1]** درس الباحثان كابلان (Kapaln) وويليامس (Williams) قابلية حل المعادلتين $X^2-mY^2=-1$ و $X^2-mY^2=-4$ معاً في أن واحد.

وضع مولن (Mollin) عام 2001 **[2]** معياراً لقابلية حل المعادلتين $X^2-mY^2=\pm c$ في آن واحد، وعمم عام **[3]** دراسة قابلية حل المعادلتين السابقتين إلى دراسة قابلية حل المعادلتين $X^2-mY^2=m_1$ و $X^2-mY^2=m_2$ معاً في آن واحد، ودرس عام **[4]** معادلة بيل المعممة $X^2-DY^2=c^n$.

وجد الباحثون تيكان (Tekcan) وجيزر (Gezer) وبيزيم (Bizim) عام 2007 **[5]** حلولاً صحيحاً لمعادلة بيل ذات الشكل $X^2-dY^2=2^t$، واستخدم تيكان عام 2011 **[6]** الكسر المستمر الممثل للعدد $\sqrt{d}$ في حل معادلة بيل $X^2-dY^2=1$، ودرس الباحثان سابار (Sapar) وسيهابودن (Sihabudin) عام 2015 **[7]** قابلية حل المعادلتين $X^2-mY^2=1$ و $X^2-5Z^2=1$، والباحثان تشين (Chen) وزان (Zhan) عام 2015 **[8]** قابلية حل المعادلتين $X^2-24y^2=1$ و $Y^2-pZ^2=1$.

درس الباحثان ويليام (William) وهاردي (Hardy) عام 1986 **[9]** قابلية حل المعادلة $dV^2-2eVW-dW^2=1$، والباحثان زارزيكي (Zarzycki) وماريليسكي (Marlewski) عام 2004 **[10]** المعادلة $X^2-kXY+Y^2+X=0$، والباحثون كيسكن (Keskin) وكاراتلي (Karaatli) وسيار (Siar) عام 2012 **[11]** قابلية حل المعادلة $X^2-kXY+Y^2+2^4=0$.

درس الباحثان هامدان (Hamdam) وسامياد (Samiad) عام 2016 **[12]** المعادلات الديوفانتية من الشكل $X^2-DY^2=2Z^2$، ووجد الباحثون سومانات (Somanath) وكانان (Kannan) ورجا (Raja) عام 2017 **[13]** حلولاً كسريةً للمعادلات الديوفانتية التربيعية، ومثّل الباحث زامان (Zaman) عام 2018 **[14]** الأعداد الأولية بصيغ تربيعية معرفة موجباً. وفي هذا البحث سوف ندرس قابلية حل المعادلتين (I) و(II) معاً بآن واحد في $\mathbb{Z}$.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة قابلية حل المعادلتين (I) و(II) معاً بآن واحد في $\mathbb{Z}$، وتكمن أهمية البحث بأنه يحدد الشروط اللازمة والكافية لكي تكون هاتان المعادلتان قابلتين للحل معاً في آن واحد، كما يبين أن تعيين حل لأي من هاتين المعادلتين يكفي لتعيين حل للمعادلة الأخرى.

طرائق البحث ومواده:

استفدنا في هذا البحث من نظرية الحقول الجبرية التربيعية والتطابقات التربيعية والكسور المستمرة ومفهوم النظيم المركزي ومعيار لاغرانج ومن بعض النتائج المتعلقة في دارسة بعض المعادلات الديوفانتية التربيعية.

التعاريف الأساسية:

نذكر فيما يأتي بعضاً من التعاريف والمبرهنات والأفكار التي اعتمدنا عليها في هذا البحث.

تعريف (1) [15]: إذا كان (x_0, y_0) حلاً للمعادلة (I) أو (II) فإنه يسمى حلاً موجباً إذا كان $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}$، ويسمى حلاً أولياً إذا كان $\gcd(x_0, y_0) = 1$، ويسمى حلاً أساسياً إذا كان (x_0, y_0) أصغر عددين موجبين يحققان هذه المعادلة (أي أن $x_0 \le x$ و $y_0 \le y$ لكل حل موجب (x, y) لهذه المعادلة).

تعريف (2) [16]: ليكن m عدداً صحيحاً حراً من التربيع، يعرف الحقل التربيعي $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ بأنه المجموعة:

$$k = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m}; a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

وتعرف حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة $\mathcal{O}_k$ في هذا الحقل بأنها المجموعة:

$$\mathcal{O}_k = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{m}]; & m \not\equiv 1(mod\ 4), \\ \mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{m}}{2}\right]; & m \equiv 1(mod\ 4). \end{cases}$$

تعريف (3) [16]: ليكن $\alpha = a + b\sqrt{m} \in \mathcal{O}_k$، يعرف مرافق α، ويرمز له بـ $\overline{\alpha}$، بأنه المقدار $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{m}$. ويعرف نظيم α، ويرمز له بـ $N(\alpha)$، بأنه المقدار:

$$N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2.$$

تمهيدية (1) [16]: ليكن $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{m}$ و $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{m}$ عنصرين في $\mathcal{O}_k$، عندئذٍ:

- $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$.
- $N\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{N(\alpha_1)}{N(\alpha_2)}$.
- $N(\alpha) = N(\overline{\alpha})$.
- إذا كان α عدداً كسرياً فإن $N(\alpha) = \alpha^2$.

ملاحظة (1): نجد من تعريف النظيم أنه يوجد علاقة بين الحقول التربيعية $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ والمعادلة $X^2 - mY^2 = N$، وذلك عندما يكون (x, y) حلاً للمعادلة $X^2 - mY^2 = N$ فإنه يوجد $\alpha = x + y\sqrt{m} \in \mathcal{O}_k \subseteq k$ بحيث أن $N(\alpha) = N(x + y\sqrt{m}) = N$، وبالتالي إذا عرفنا التطبيق σ بين المجموعتين $\{\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]; N(\alpha) = N\}$ و $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; X^2 - mY^2 = N\}$ بالشكل $\sigma(x + y\sqrt{m}) = (x, y)$، فإن σ تقابل 1−1، ومنه يمكن القول إن $\alpha = x + y\sqrt{m}$ حلٌ للمعادلة $X^2 - mY^2 = N$ بدلاً من القول إن (x, y) حل لها.

تعريف (4) [16]: يسمى العدد $\alpha \in \mathcal{O}_k$ عنصر واحدة في $\mathcal{O}_k$ إذا كان $N(\alpha) = \pm 1$.

ملاحظة (2): إذا كان $m \not\equiv 1(mod\ 4)$ و $\alpha = x + y\sqrt{m}$ عنصر واحدة في $\mathcal{O}_k$ فإن $X^2 - mY^2 = \pm 1$ وبالتالي لإيجاد عناصر الواحدة في $\mathcal{O}_k$ نحل المعادلة $X^2 - mY^2 = \pm 1$ حيث أن الحلول (x_n, y_n) لهذه المعادلة تحقق العلاقة:

$$x_n + y_n\sqrt{m} = \left(x_0 + y_0\sqrt{m}\right)^n,$$

حيث $\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt{m}$ حلٌ أساسيٌ لمعادلة بيل $X^2 - mY^2 = \pm 1$ والذي يسمى أيضاً عنصر الواحدة الأساسي في الحلقة $\mathcal{O}_k$.

ملاحظة (3): إذا كان $m \equiv 1(mod\ 4)$ و $\alpha = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{m}$ عنصر الواحدة في $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right]$ فإن $N(\alpha) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - m\left(\frac{y}{2}\right)^2$ وبالتالي $x^2 - my^2 = \pm 4$، أي لإيجاد الواحدات في $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right]$ نحل المعادلة $x^2 - my^2 = \pm 4$.

تمهيدية (2) [16]: إذا كان ε_m عنصر الواحدة في $k = \mathbb{Q}\left(\sqrt{m}\right)$ فإن $N(\varepsilon_m) = (-1)^l$ حيث l طول دور الكسر المستمر البسيط الممثل لـ $\sqrt{m}$ ويكون $\varepsilon_m \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ أو $\varepsilon_m^3 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$.

تعريف (5) [16]: يسمى العدد $\alpha \in \mathcal{O}_k$ غير مختزل إذا كانت قواسمه عناصر واحدة، أو يكتب بالشكل $\alpha = \varepsilon\eta$ حيث ε عنصر واحدة، ويسمى العدد $\alpha \in \mathcal{O}_k$ أولي إذا كان $\alpha|\beta\gamma$ فإن $\alpha|\beta$ أو $\alpha|\gamma$.

ملاحظة (4): يكون العدد $\alpha \in \mathcal{O}_k$ أولي إذا كان $N(\alpha) = p$ حيث p عدد أولي في $\mathbb{Z}$.

تعريف (6) [16]: تسمى الحلقة $\mathcal{O}_k$ ساحة تحليل وحيد إذا كان كل عنصر $\alpha \in \mathcal{O}_k$ حيث $\alpha \neq 0$ وليس واحدة يكتب كجداء منته لعناصر غير مختزلة.

تمهيدية (3) [15]: إن التطابق $x^2 \equiv 2(mod\ m)$ قابلٌ للحل في $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة الأعداد الأولية التي تقسم m هي من الشكل $8k \pm 1$. ويكون التطابق $x^2 \equiv -2(mod\ m)$ قابلاً للحل في $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة الأعداد الأولية التي تقسم m هي من الشكل $8k \pm 3$.

تمهيدية (4) [16]: إذا كانت $\mathcal{O}_k$ ساحة تحليل وحيد و $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_k$ حيث $(\alpha, \beta) = 1$ فإنه يوجد $\eta, \delta \in \mathcal{O}_k$ بحيث $\alpha = \varepsilon\eta^2$ و $\beta = \varepsilon'\delta^2$ و $\gamma = \eta\delta$ حيث $\varepsilon, \varepsilon'$ عناصر واحدة في $\mathcal{O}_k$.

تعريف (7) [17]: يعرف طول دور الكسر المستمر البسيط الممثل لـ $\sqrt{m}$، ويرمز له بالرمز $l = l\left(\sqrt{m}\right)$ ، بالشكل:

$$\sqrt{m} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_l}],$$

حيث $a_0 = \left\lceil\sqrt{m}\right\rceil$ (الجزء الصحيح لـ $\sqrt{m}$) و a_i أعداد صحيحة موجبة من أجل كل $i \geq 1$ (وتدعى بالمقامات الجزئية للكسر المستمر الممثل للعدد $\sqrt{m}$).

فمثلاً العدد $\sqrt{23}$ يمثل على شكل كسر مستمر بسيط لانهائي بالشكل:

$$\sqrt{23} = [4,1,3,1,8,1,3,1,8,1,3,1,8, \dots \dots]$$

ويرمز له إختصاراً بـ $\sqrt{23} = [4, \overline{1,3,1,8}]$. ويدعى مثل هذا الكسر بكسر مستمر بسيط لانهائي دوري ودوره $l = 4$.

تعريف (8) [17]: يعرف المقارب من المرتبة k من أجل كل $k \geq 0$ بالعلاقة:

$$\frac{A_k}{B_k} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k],$$

حيث:

$$A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2}; A_0 = a_0, A_1 = a_0 a_1 + 1,$$
$$B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}; B_0 = 1, B_1 = 1.$$

تعريف (9) [17]: تعرف المقامات التامة بأنها الأعداد $\alpha_k = \frac{P_k+\sqrt{m}}{Q_k}$ حيث $P_0 = a_0, Q_0 \neq 0$، ومن أجل كل $k \geq 1$ يكون:

$$P_k = a_{k-1}Q_{k-1} - P_{k-1},$$
$$Q_k = \frac{m - P_k^2}{Q_{k-1}},$$

حيث:

$$a_k = \left[\frac{P_k + \sqrt{m}}{Q_k}\right],$$

ولدينا:

$$A_{k-1}^2 - mB_{k-1}^2 = (-1)^k Q_k,$$

وتسمى القيمة $Q_{\frac{l}{2}}$ بالنظيم المركزي للكسر المستمر الممثل لـ $\sqrt{m}$.

تمهيدية (5) معيار لاغرانج [17]: يكون $l = l(\sqrt{m})$ عدداً زوجياً إذا تحقق أحد الشرطين:

-1 يوجد تحليل $m = ab$ حيث $1 < a < b$ تكون من أجله إحدى المعادلتين:

$$aX^2 - mY^2 = \pm 1$$

قابلة للحل، وفي هذه الحالة يكون $Q_{\frac{l}{2}} = a$.

-2 يوجد تحليل $m = ab$ حيث $1 \leq a < b$ تكون من أجله إحدى المعادلتين:

$$aX^2 - mY^2 = \pm 2$$

قابلة للحل، وفي هذه الحالة يكون $Q_{\frac{l}{2}} = 2a$.

النتائج والمناقشة:

نستفيد فيما يلي من النتائج والمبرهنات والأفكار التي ذكرناها والمتعلقة بالكسور المستمرة وبحقول وحلقات الأعداد التربيعية وبحلول بعض المعادلات الديوفانتية والتطابقات غير الخطية في دراسة قابلية حل المعادلتين:

$$kX^2 + 2lXY - 2kY^2 = \pm 1 \qquad (I)$$

و

$$X^2 - mY^2 = -2 \qquad (II)$$

معاً في أن واحد حيث k, l, m أعداد صحيحة.

إذا سنبين أن هاتين المعادلتين قابلتان للحل معاً عندما يكون m عدداً أولياً، كما سنجد الشرط اللازم والكافي لقابلية حل كل منهما عندما تكون الأخرى قابلة للحل، كذلك سنوجد علاقة بين الحل الأساسي للمعادلتين (II) ومعادلة بيل $x^2 - my^2 = 1$، بالإضافة إلى إيجاد بعض النتائج المتعلقة بهما.

نلاحظ أنّ المعادلة (I) غير قابلة للحل في حال:

- إذا كان k عدداً زوجياً فإنّ $0 \equiv \pm 1 (mod\ 2)$ وهذا تناقض.

- إذا كان $(k, l) = d$ فإنّ $0 \equiv \pm 1(mod\ d)$ وهذا تناقض.

لذلك سنفرض أن k عدد فردي وأن k, l أوليان فيما بينهما، وأن المعادلة (I) قابلة للحل إذا كانت المعادلة $kX^2 + 2lXY - 2kY^2 = 1$ أو المعادلة $kX^2 + 2lXY - 2kY^2 = -1$ قابلة للحل، إضافة إلى ذلك سنفرض أن $m = l^2 + 2k^2$ حيث k, l عددان فرديان أوليان فيما بينهما ونسميه مميز المعادلة (I). ولنناقش قابلية حل المعادلتين (I) و (II) معاً في أن واحد فيما يأتي.

مبرهنة (1): إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً وفردياً، عندئذٍ:

1) إذا كانت إحدى المعادلتين $X^2 - mY^2 = \pm 2$ قابلة للحل وكان (u, v) حلاً لها، فإن u, v عددان فرديان.

2) إذا كانت المعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ قابلة للحل فإن $m \equiv 3(mod\ 8)$.

3) إذا كانت المعادلة $X^2 - mY^2 = 2$ قابلة للحل فإن $m \equiv 7(mod\ 8)$.

البرهان:

1) إذا كان (u, v) حلاً لإحدى المعادلتين $X^2 - mY^2 = \pm 2$، عندئذٍ:

$$u^2 - mv^2 = \pm 2,$$

ومنه نجد أن u, v إما فرديان معاً أو زوجيان معاً.

إذا كان u, v عددين زوجيين فإن $4|2$ وهذا غير ممكن، وبالتالي u, v عددان فرديان.

2) نفرض أن (u, v) حلٌ للمعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ عندئذٍ:

$$u^2 - mv^2 = -2,$$

وحسب (1) يكون u, v عددين فرديين، علاوة على ذلك يكون $u^2 \equiv -2(mod\ m)$ لذلك يكون التطابق $x^2 = -2(mod\ m)$ قابلاً للحل وبالتالي حسب () يكون $m \equiv 1,3(mod\ 8)$.

إذا كان $m \equiv 1(mod\ 8)$ عندئذٍ:

$$u^2 - mv^2 \equiv u^2 - v^2 \equiv 1 - 1 \equiv 0(mod\ 8).$$

من جهة ثانية لدينا:

$$u^2 - mv^2 \equiv -2(mod\ 8).$$

نجد مما سبق وحسب خواص المتطابقات أنّ:

$$-2 \equiv 0(mod\ 8)$$

وهذا غير ممكن، وبالتالي $m \equiv 3(mod\ 8)$.

3) نفرض أن (u, v) حلٌ للمعادلة $X^2 - mY^2 = 2$ عندئذٍ:

$$u^2 - mv^2 = 2,$$

وحسب (1) يكون u, v عددين فرديين، علاوة على ذلك يكون $u^2 \equiv 2(mod\ m)$ لذلك يكون التطابق $x^2 = +2(mod\ m)$ قابلاً للحل وبالتالي حسب () يكون $m \equiv 3,7(mod\ 8)$.

إذا كان $m \equiv 3(mod\ 8)$ عندئذٍ:

$$2 = u^2 - mv^2 \equiv u^2 - 3v^2 \equiv 1 - 3 \times 1 \equiv -2(mod\ 8)$$

وهذا غير ممكن، وبالتالي $m \equiv 7(mod\ 8)$.

نتيجة (1): إذا كان m عدداً فردياً وكانت إحدى المعادلتين $x^2 - my^2 = \pm 2$ قابلة للحل فإن المعادلة الأخرى غير قابلة للحل. وهذا ينتج مباشرةً من برهان (2) و(3) في المبرهنة (1).

مبرهنة (2): ليكن m عدداً صحيحاً موجباً أولياً فردياً،

-1 إذا كان (t_0, u_0) حلاً أساسياً للمعادلة $x^2 - my^2 = 1$ عندئذٍ:

.i إذا كان $m \equiv 1(mod\ 4)$ فإن t_0 عددٌ فرديٌ و u_0 عددٌ زوجيٌ.

.ii إذا كان $m \equiv 3(mod\ 4)$ فإن t_0 عددٌ زوجيٌ و u_0 عددٌ فرديٌ.

-2 إذا كان (t, u) حلاً أساسياً للمعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ فإن $(t^2 + 1, tu)$ حلاً أساسياً للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$.

البرهان:

-1 لدينا $t_0^2 - mu_0^2 = 1$ و $m \equiv 1(mod\ 4)$، عندئذٍ إذا كان t_0 عدداً زوجياً فإن u_0 عددٌ فرديٌ، وبالتالي:

$$1 = t_0^2 - mu_0^2 \equiv 0 - 1 \times 1 \equiv -1(mod\ 4)$$

وهذا غير ممكن. إذاً t_0 عددٌ فرديٌ و u_0 عددٌ زوجيٌ، وهذا يبرهن **(i)**.

لدينا $t_0^2 - mu_0^2 = 1$ و $m \equiv 3(mod\ 4)$، عندئذٍ إذا كان t_0 عدداً فردياً فإن u_0 عددٌ زوجيٌ، وبالتالي كل من العددين $t_0 + 1$ و $t_0 - 1$ زوجيين، والعددين $\frac{t_0+1}{2}$ و $\frac{t_0-1}{2}$ أوليين فيما بينهما، وذلك لأنه إذا كان $d|\frac{t_0+1}{2}$ و $d|\frac{t_0-1}{2}$ فإن $d|t_0$ و $d|2$ وبالتالي $d = 1$.

نجد مما سبق أنّ:

$$\left(\frac{t_0 + 1}{2}\right)\left(\frac{t_0 - 1}{2}\right) = m\left(\frac{u_0}{2}\right)^2,$$

ومنه يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون:

$$\frac{t_0 + 1}{2} = a^2, \frac{t_0 - 1}{2} = mb^2 \qquad (1)$$

أو

$$\frac{t_0 - 1}{2} = a^2, \frac{t_0 + 1}{2} = mb^2 \qquad (2)$$

ينتج من العلاقة (1) أن $a^2 - mb^2 = 1$ وبالتالي يكون (a, b) حلاً للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$، وهذا غير ممكن لأن (t_0, u_0) الحل الأساسي لهذه المعادلة و $a_0 < t_0$.

ينتج من العلاقة (2) أن $a^2 - mb^2 = -1$ وهذا يعني أن المعادلة $X^2 - mY^2 = -1$ قابلة للحل، وهذا غير ممكن لأنها غير قابلة للحل عندما $m \equiv 3(mod\ 4)$. مما سبق نجد أن t_0 لا يمكن أن يكون عدداً فردياً، إذاً t_0 عددٌ زوجيٌ و u_0 عددٌ فرديٌ، وهذا يبرهن **(ii)**.

-2 نفرض أن $w = t + u\sqrt{m}$ حلاً أساسياً للمعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ عندئذٍ:

$$\frac{w^2}{2} = \frac{t^2 + mu^2}{2} + tu\sqrt{m} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$$

حلٌ موجبٌ للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$ لأنّ:

$$n\left(\frac{w^2}{2}\right) = \left(\frac{t^2 + mu^2}{2}\right)^2 - mt^2u^2$$
$$= \frac{t^4 + 2mt^2u^2 + m^2u^4}{4} - mt^2u^2$$
$$= \frac{(t^2 - mu^2)^2}{4} = \frac{(-2)^2}{4} = 1,$$

كذلك يكون أيضاً $\frac{w^2}{2}$ حلاً أساسياً لهذه المعادلة، لأنه إذا كان $\varepsilon = t_0 + u_0\sqrt{m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ حلاً أساسياً للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$، فنجد مما سبق بأنه يوجد عددٌ صحيحٌ موجبٌ n بحيث أن:

$$\frac{w^2}{2} = \varepsilon^n. \qquad *$$

إذا كان $n = 1$ فإن $\varepsilon = \frac{w^2}{2}$ وبالتالي يكون $\frac{w^2}{2}$ حلاً أساسياً للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$.

إذا كان $n > 1$ فإننا نميز حالتين إما n عددٌ زوجيٌ أو n عددٌ فرديٌ.

- إذا كان n عدداً زوجياً أي أن $n = 2t$ عندئذٍ حسب $(*)$ يكون $\frac{w^2}{2} = \varepsilon^{2t}$ ومنه $\left(\frac{w}{\varepsilon^t}\right)^2 = 2$. من جهة ثانية يكون $\frac{w}{\varepsilon^t} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ لأن ε^t عنصر واحدة في هذه الحلقة، لذلك يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث $\frac{w}{\varepsilon^t} = a + b\sqrt{m}$ ومنه:

$$2 = \left(\frac{w}{\varepsilon^t}\right)^2 = \left(a + b\sqrt{m}\right)^2 = a^2 + mb^2 + 2ab\sqrt{m},$$

وبالتالي:

$$a^2 + mb^2 - 2 + 2ab\sqrt{m} = 0,$$

ومنه:

$$\begin{cases} a^2 + mb^2 - 2 = 0 & (3) \\ 2ab = 0 & (4) \end{cases}$$

من (4) نجد أن $2ab = 0$ إذا وفقط إذا $a = 0$ أو $b = 0$.

- إذا كان $a = 0$ فإنه حسب (3) يكون $b^2 = \frac{2}{m}$ وهذا يناقض $b \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $b = 0$ فإنه حسب (3) يكون $a^2 = 2$ وهذا يناقض $a \in \mathbb{Z}$.

- إذا كان n عدداً فردياً أي أن $n = 2t + 1$ عندئذٍ حسب $(*)$ يكون $\frac{w^2}{2} = \varepsilon^{2t+1}$ ومنه $\left(\frac{w}{\varepsilon^t}\right)^2 = 2\varepsilon$

وبالتالي:

$$\left(a + b\sqrt{m}\right)^2 = 2\left(t_0 + u_0\sqrt{m}\right)$$
$$a^2 + mb^2 + 2ab\sqrt{m} = 2\left(t_0 + u_0\sqrt{m}\right)$$

أي أنّ:

$$\begin{cases} a^2 + mb^2 = 2t_0 & (5) \\ ab = u_0 & (6) \end{cases}$$

بما أن u_0, t_0 أعداد موجبة فإن $ab > 0$ وبالتالي a, b عددين موجبين. بالإضافة إلى ذلك:

$$n\left(\frac{w}{\varepsilon^t}\right) = n\left(a + b\sqrt{m}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{n(w)}{\left(n(\varepsilon)\right)^t} = a^2 - mb^2 \Rightarrow -2 = \frac{-2}{1^t} = a^2 - mb^2.$$

نجد مما سبق أنّ (a, b) حلٌ موجبٌ للمعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ ومنه $w \leq \frac{w}{\varepsilon^t}$ وبالتالي $\varepsilon^t \leq 1$ وهذا تناقض.

نستنتج من الحالتين السابقتين أنه لا يمكن أن يكون $n > 1$، لذلك $n = 1$ و $\varepsilon = \frac{w^2}{2}$. أي أن $\frac{w^2}{2}$ حل أساسي للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$ وبالتالي:

$$\frac{w^2}{2} = \frac{t^2 + mu^2}{2} + tu\sqrt{m}$$

$$t_0 + u_0\sqrt{m} = \frac{t^2 + t^2 + 2}{2} + tu\sqrt{m} = t^2 + 1 + tu\sqrt{m},$$

أي أن $(t_0, u_0) = (t^2 + 1, tu)$ وبالتالي يكون $(t^2 + 1, tu)$ حلاً أساسياً للمعادلة:

$$x^2 - my^2 = 1.$$

مبرهنة (3): إذا كان l, k عددين فرديين أوليين فيما بينهما و $m = l^2 + 2k^2$ عدداً أولياً عندئذٍ تكون المعادلة (I) قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت المعادلة (II) قابلة للحل.

البرهان:

نفرض أن المعادلة (I) قابلة للحل، بما أن $m = l^2 + 2k^2$ فإن $m \equiv 3(mod\ 8)$، ومنه حسب المبرهنة (2) نجد أنه إذا كان (t_0, u_0) حلاً أساسياً للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$ فإن t_0 عددٌ زوجيٌ و u_0 عددٌ فرديٌ، ومنه نجد أن:

$$(t_0 + 1)(t_0 - 1) = mu_0^2$$

وأن $(t_0 + 1)$ و $(t_0 - 1)$ عددان فرديان أوليان فيما بينهما، لذلك يكون لدينا إحدى الحالتين:

$$\begin{cases} t_0 + 1 = ma^2 \\ t_0 - 1 = b^2 \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} t_0 + 1 = b^2 \\ t_0 - 1 = ma^2 \end{cases}$$

وبالتالي تكون إحدى المعادلتين $X^2 - mY^2 = -2$ و $X^2 - mY^2 = 2$ قابلة للحل ومنه حسب المبرهنة (1) فإن المعادلة $X^2 - mY^2 = 2$ غير قابلة للحل والمعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ قابلة للحل.

<u>العكس</u>: نفرض أن (u, v) حلاً للمعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ عندئذٍ:

$$u^2 - mv^2 = -2 \qquad **$$

وكل من العددين $\alpha = l + k\sqrt{-2}$ و $\beta = u - \sqrt{2}$ عنصراً في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

لنكتب m في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ بالشكل الآتي:

$$m = \left(l + k\sqrt{-2}\right)\left(l - k\sqrt{-2}\right),$$

عندئذٍ يكون $\alpha = l + k\sqrt{-2}$ عدداً أولياً في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ لأنّ:

$$n(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (l + k\sqrt{-2})(l - k\sqrt{-2}) = m.$$

كذلك نكتب المعادلة (**) في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ بالشكل الآتي:

$$(u + \sqrt{-2})(u - \sqrt{-2}) = (l + k\sqrt{-2})(l - k\sqrt{-2})v^2 \qquad ***$$

نجد مما سبق أن $l + k\sqrt{-2}|(u + \sqrt{-2})(u - \sqrt{-2})$ لأن $(l + k\sqrt{-2})|m$ و $m|(u + \sqrt{-2})(u - \sqrt{-2})$. وبما أن $l + k\sqrt{-2}$ عددٌ أوليٌ في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ فإن $l + k\sqrt{-2}|u + \sqrt{-2}$ أو $l + k\sqrt{-2}|u - \sqrt{-2}$.

إذا كان $l + k\sqrt{-2}|u + \sqrt{-2}$ فإن $l - k\sqrt{-2}|u - \sqrt{-2}$ ومنه نجد أن كل من العددين $\frac{u+\sqrt{-2}}{l+k\sqrt{-2}}$ و $\frac{u-\sqrt{-2}}{l-k\sqrt{-2}}$ عنصراً في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ وهما عددان أوليان فيما بينهما لكون $(u - \sqrt{-2})$ و $(u + \sqrt{-2})$ أوليين فيما بينهما، علاوة من (***) نجد أن:

$$\left(\frac{u + \sqrt{-2}}{l + k\sqrt{-2}}\right)\left(\frac{u - \sqrt{-2}}{l - k\sqrt{-2}}\right) = v^2,$$

ومنه يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ بحيث أنّ:

$$\frac{u + \sqrt{-2}}{l + k\sqrt{-2}} = \varepsilon\left(x_0 + y_0\sqrt{-2}\right)^2,$$

وبالتالي:

$$u + \sqrt{-2} = \varepsilon\left[(lx_0^2 - 4kx_0y_0 - 2ly_0^2) + (kx_0^2 + 2lx_0y_0 - 2ky_0^2)\sqrt{-2}\right].$$

نجد من مطابقة المعاملات بأنه يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون:

$$kx_0^2 + 2lx_0y_0 - 2ky_0^2 = \pm 1.$$

إذاً (x_0, y_0) حلٌ للمعادلة (I) وبالتالي فإنها قابلة للحل.

إذا كان $l + k\sqrt{-2}|u - \sqrt{-2}$ فإن $l - k\sqrt{-2}|u + \sqrt{-2}$ ومنه نجد أن كل من العددين $\frac{u-\sqrt{-2}}{l+k\sqrt{-2}}$ و $\frac{u+\sqrt{-2}}{l-k\sqrt{-2}}$ عنصراً في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$، وبنفس المناقشة السابقة نجد أن المعادلة (I) قابلة للحل.

مبرهنة (4): إذا كان l, k عددين صحيحين فرديين أوليين فيما بينهما، و$m = l^2 + 2k^2$ عدداً صحيحاً حراً من التربيع، والمعادلة (I) قابلة للحل، عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة (II) قابلة للحل هو أن يكون $Q_{\frac{l}{2}} = 2$ و $n(\varepsilon_m) = 1$ حيث ε_m عنصر الواحدة الأساسي في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

البرهان: نفرض أن المعادلة (II) قابلة للحل وأن $w = t + u\sqrt{m}$ حلٌ أساسيٌ للمعادلة (II) عندئذٍ حسب المبرهنة (2) يكون $\frac{w^2}{2} = t^2 + 1 + tu\sqrt{m}$ حلاً أساسياً للمعادلة $X^2 - mY^2 = 1$.

إذاً $\varepsilon_m = \frac{w^2}{2}$ وبالتالي $n(\varepsilon_m) = 1$ لأنّ:

$$n(\varepsilon_m) = (t^2 + 1)^2 - mt^2u^2$$

$$= t^4 + 2t^2 + 1 - mt^2u^2$$

$= t^2(t^2 - mu^2) + 2t^2 + 1$
$= t^2(-2) + 2t^2 + 1 = 1.$

ومنه حسب المبرهنة (1) يكون t, u فرديين، وحسب معيار لاغرانج (بوضع $b = m$ و $a = 1$) نجد أن $Q_{\frac{l}{2}} = 2$.

العكس: نفرض أن $n(\xi_m) = (-1)^l = 1$ عندئذٍ l عددٌ زوجيٌ، وبالتالي حسب مبرهنة لاغرانج من أجل $k = \frac{l}{2}$ نجد أنّ:

$$A^2_{\frac{l}{2}-1} - mB^2_{\frac{l}{2}-1} = (-1)^{\frac{l}{2}} Q_{\frac{l}{2}} = \pm 2.$$

إذاً $A_{\frac{l}{2}-1} + B_{\frac{l}{2}-1}\sqrt{m}$ حل لإحدى المعادلتين $X^2 - mY^2 = \pm 2$، ولكن حسب المبرهنة (1) فإن المعادلة $X^2 - mY^2 = 2$ غير قابلة للحل لأن $m \equiv 3(mod\ 8)$ وبالتالي المعادلة $X^2 - mY^2 = -2$ قابلة للحل.

مبرهنة (5): إذا كان l, k عددين صحيحين فرديين أوليين فيما بينهما بحيث أنّ $m = l^2 + 2k^2$ عددٌ صحيحٌ موجبٌ حرٌ من التربيع وأن المعادلة (II) قابلة للحل، عندئذٍ إذا كان (t, u) حلاً للمعادلة (II) فإن المعادلة (I) قابلة للحل في $\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كان:

$$l + k\sqrt{-2} = \begin{cases} \gcd(t + \sqrt{-2}, m) \\ \gcd(t - \sqrt{-2}, m) \end{cases} \text{أو}$$

البرهان: نفرض أولاً أن المعادلة (I) قابلة للحل وأن (x_0, y_0) حلٌ لها، عندئذٍ:

$$kx_0^2 + 2lx_0y_0 - 2ky_0 = \pm 1,$$

كما يكون $\alpha = l + k\sqrt{-2}, \beta = (x_0 + y_0\sqrt{-2})^2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$، بالإضافة إلى أنّ:

$\alpha\beta = (l + k\sqrt{-2})(x_0 + y_0\sqrt{-2})^2$
$= (l + k\sqrt{-2})(x_0^2 - 2y_0^2 + 2x_0y_0\sqrt{-2})$
$= (lx_0^2 - 4kx_0y_0 - 2ly_0^2) + (kx_0^2 + 2lx_0y_0 - 2ky_0^2)\sqrt{-2}.$

ليكن $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ بحيث أن $\varepsilon(kx_0^2 + 2lx_0y_0 - 2ky_0^2) = 1$ ولنضع $t = \varepsilon(lx_0^2 - 4kx_0y_0 - 2ly_0^2)$ فنجد مما سبق أن:

$$t + \sqrt{-2} = \varepsilon\alpha\beta$$

وينتج من أخذ نظيم الطرفين أنّ:

$$t^2 + 2 = m(x_0^2 + 2y_0^2)^2.$$

لنضع $u = x_0^2 + 2y_0^2$ فنجد مما سبق أن (t, u) حلاً للمعادلة (II) و $\alpha | m, \alpha | t + \sqrt{-2}$ وبالتالي:

$$\gcd(t + \sqrt{-2}, m) = \alpha \times \gcd\left(l - k\sqrt{-2}, (x_0 + y_0\sqrt{-2})^2\right)$$
$$= l + k\sqrt{-2} \times \gcd\left(l - k\sqrt{-2}, (x_0 + y_0\sqrt{-2})^2\right).$$

لنبرهن أن $\gcd\left(l - k\sqrt{-2}, (x_0 + y_0\sqrt{-2})^2\right) = 1$.

ليكن $0 \neq \delta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ حيث $\delta | l - k\sqrt{-2}, \delta | x_0 + y_0\sqrt{-2}$ وبالتالي $x_0 + y_0\sqrt{-2} \equiv 0 (mod\ \delta)$ ومنه $x_0 \equiv -y_0\sqrt{-2} (mod\ \delta)$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} t &\equiv \varepsilon\left(l(-y_0\sqrt{-2})^2 - 4k(-y_0\sqrt{-2})y_0 - 2ly_0^2\right) (mod\ \delta) \\ &\equiv \varepsilon(-2ly_0^2 + 4ky_0^2\sqrt{-2} - 2ly_0^2)(mod\ \delta) \\ &\equiv -4\varepsilon y_0^2(l - k\sqrt{-2})(mod\ \delta) \equiv 0(mod\ \delta). \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\delta | t$ وبالتالي $N(\delta) | N(t) = t^2$، وكذلك لدينا $\delta | x_0 + y_0\sqrt{-2}$ وبالتالي:

$$N(\delta) | N(x_0 + y_0\sqrt{-2}) = u.$$

بما أن t, u أوليان فيما بينهما نجد أن $N(\delta) | \gcd(t, u) = 1$ وبالتالي:

$$\gcd\left(l - k\sqrt{-2}, \left(x_0 + y_0\sqrt{-2}\right)^2\right) = 1$$

ومنه $l + k\sqrt{-2} = \gcd(t + \sqrt{-2}, m)$.

__العكس:__ نفرض أن

$$l + k\sqrt{-2} = \begin{cases} \gcd(t + \sqrt{-2}, m) \\ \gcd(t - \sqrt{-2}, m) \end{cases} \text{أو}$$

وأن (t, u) حل للمعادلة (II)، عندئذٍ $l + k\sqrt{-2} | t + \sqrt{-2}$ أو $l + k\sqrt{-2} | t - \sqrt{-2}$.

إذا كان $l + k\sqrt{-2} | t + \sqrt{-2}$ فإن $l - k\sqrt{-2} | t - \sqrt{-2}$ وبالتالي:

$$\alpha = \frac{t + \sqrt{-2}}{l + k\sqrt{-2}}, \beta = \frac{t - \sqrt{-2}}{l - k\sqrt{-2}}$$

عنصران أوليان فيما بينهما في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$، بالإضافة إلى:

$$\left(\frac{t + \sqrt{-2}}{l + k\sqrt{-2}}\right)\left(\frac{t - \sqrt{-2}}{l - k\sqrt{-2}}\right) = u^2,$$

ومنه يكون:

$$\frac{t + \sqrt{-2}}{l + k\sqrt{-2}} = \varepsilon\left(x_0 + y_0\sqrt{-2}\right)^2; \varepsilon \in \{\pm 1\}, u = x_0^2 + 2y_0^2,$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} t + \sqrt{-2} &= \varepsilon(l + k\sqrt{-2})(x_0 + y_0\sqrt{-2})^2 \\ &= \varepsilon(l + k\sqrt{-2})(x_0^2 - 2y_0^2 + 2x_0y_0\sqrt{-2}) \\ &= \varepsilon(lx_0^2 - 4kx_0y_0 - 2y_0^2) + (kx_0^2 + 2lx_0y_0 - 2ky_0^2)\sqrt{-2}. \end{aligned}$$

نجد بمطابقة معاملات $\sqrt{-2}$ أنه يوجد $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ بحيث أن:

$$kx_0^2 + 2lx_0y_0 - 2ky_0^2 = \pm 1.$$

وهذا يعني أن المعادلة (I) قابلة للحل.

إذا كان $l + k\sqrt{-2} | t - \sqrt{-2}$ فإن $l - k\sqrt{-2} | t + \sqrt{-2}$ وبالتالي يكون المقداران:

$$\alpha = \frac{t+\sqrt{-2}}{l+k\sqrt{-2}}, \beta = \frac{t-\sqrt{-2}}{l-k\sqrt{-2}}$$

عنصرين أوليين فيما بينهما في الحلقة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$، وبنفس المناقشة السابقة نجد أن المعادلة (I) قابلة للحل.

نتيجة (2): إذا كان l,k عددين صحيحين فرديين أوليين فيما بينهما، و$m = l^2 + 2k^2$ عدداً صحيحاً حراً من التربيع، عندئذٍ نستنتج من إثبات المبرهنة (5) الآتي:

1) إذا كان (x_0, y_0) حلاً للمعادلة (I) فإن (t,u) حلٌ للمعادلة (II) حيث:

$$t = \pm(lx_0^2 - 4kx_0y_0 - 2y_0^2),$$
$$u = x_0^2 + 2y_0^2.$$

2) إذا كانت المعادلة (I) قابلة للحل وكان (t,u) حلاً للمعادلة (II) حيث $u = x_0^2 + 2y_0^2$ فإن (x_0, y_0) يكون حلاً للمعادلة (I).

مثال (1): لتكن المعادلة $kX^2 + 2lXY - 2kY^2 = \pm 1$ عندئذٍ من أجل $l = 1, k = 1$ يكون $m = 3$، كما نجد أن $(x_0, y_0) = (1,1)$ حلٌ للمعادلة $X^2 + 2XY - 2Y^2 = \pm 1$ وبالتالي حسب النتيجة (2) يكون (t,u) حلاً للمعادلة $X^2 - 3Y^2 = -2$ حيث:

$$t = \pm(lx_0^2 - 4kx_0y_0 - 2y_0^2) = \pm 5,$$
$$u = x_0^2 + 2y_0^2 = 3.$$

إذاً $(t,u) = (\pm 5,3)$ حلاً للمعادلة $x^2 - 3y^2 = -2$.

مثال (2): لتكن المعادلة $kX^2 + 2lXY - 2kY^2 = \pm 1$ عندئذٍ من أجل $l = 3, k = 5$ نجد أن $m = 59$ عددٌ أوليٌ و $(t,u) = (23,3)$ حلٌ للمعادلة $X^2 - 59Y^2 = -2$، عندئذٍ:

$$3 = 1 + 2 \times 1 = x_0^2 + 2y_0^2$$

وبالتالي حسب المبرهنة (3) تكون المعادلة $5X^2 + 6XY - 10Y^2 = \pm 1$ قابلة للحل وحسب النتيجة (2) يكون

$$(x_0, y_0) = (1,1).$$

الاستنتاجات والتوصيات:

إن دراسة قابلية حل المعادلتين الديوفانتيتين (I) و(II) تفيد في دراسة مسألتي تمثيل الأعداد الصحيحة بصيغ تربيعية ومسألة القيمة الأصغرية، بالإضافة إلى أنها تفيد في دراسة حالات أخرى من المعادلات الديوفانتية.

المراجع:

(1) KAPLAN, P., WILLIAMS, K., *Pell's equations* $X^2 - mY^2 = -1, -4$ *and continued fraction,* Journal of number theory, Vol. 23, 1986, 169-182.

(2) MOLLIN, R,. *A simple criterion for solvability of both* $X^2 - DY^2 = c$ *and* $x^2 - Dy^2 = -c$, New York J. math. Vol. 7, 2001, 87-97.

(3) MOLLIN, R,. *Ideal criteria for both* $x^2 - Dy^2 = m_1$ *and* $x^2 - Dy^2 = m_2$ *to have primitive solutions* , serdica math. J., Vol. 28, 2002, 175-188.

(4) MOLLIN, R. *Quadratic Diophantine Equations* $x^2 - Dy^2 = c^n$, Irish Math. Soc. Bulletin, Vol. 58, 2006,55-68.

(5) TEKCAN, A., GEZER, B. BIZIM, O. *On the Integer Solutions of the Pell Equation* $x^2 - dy^2 = 2^t$, International Journal of Mathematical and Computational Sciences, Vol. 1, 2007, 104-108.

(6) TEKCAN, A. *Continued Fractions Expansion of* $\sqrt{D}$ *and Pell Equation* $x^2 - Dy^2 = 1$, Mathematica Moravica. Vol. 15, 2011, 19-27.

(7) SIHABUDIN, N. SAPAR, S. *Simultaneous Pell Equations* $x^2 - my^2 = 1$ *and* $y^2 - 5z^2 = 1$, Menemui Matematik, Vol. 37, 2015, 49 – 53.

(8) AI, X., CHEN, J., ZHANG, S., HU, H. *Complete Solutions of the Simultaneous Pell Equations* $x^2 - 24y^2 = 1$ *and* $y^2 - pz^2 = 1$, Journal of Number theory, Vol 147, 2015, 103-108.

(9) HARDY , K., WILLIAMS, K.,On the solvability of the diophantine equation $dV^2 - 2eVW - dW^2 = 1$, pacific journal of mathematics, Vol 124, 1986, 145-158.

(10) MARLEWSKI, A., ZARZYCKI, P., In finitely many solutions of the diophantine equation $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$, Comput math. Appl., Vol. 47, 2004, 115-121.

(11) KESKIN, R., KARAATLI, O., SIAR, Z., On the diophantine equation $x^2 - kxy + y^2 + 2^n$, Miskolc Math., Vol. 13, 2012, 375-388.

(12) HAMDAN, N. SAMIAN, A. MUSLIM, N., *Diophantine equation of the form* $x^2 - Dy^2 = 2z^2$, *IOSR Journal of Mathematics*, Vol. 12, 2016, 82-91.

(13) SOMANATH, M., KANNAN, J., RAJA, K. *On Polynomial Solutions of Quadratic Diophantine Equation*, International Journal of Mathematics And its Applications, Vol. 5, 2017, 839-844.

(14) ZAMAN, A. *Primes represented by positive definite binary quadratic forms*, The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 69, 2018, 1353–1386.

(15) COHEN, H. *Number Theory: Volume I: Tools and Diophantine Equations*, Springer New York, 2007,560.

(16) ROSEN, M., IRELAND, K. *A classical introduction to modern number theory*, springer Verlag-New York, 2013, 389.

(17) WAADELAND, H., LORENTZEN, L., *Continued fractions with applications*, North Holland, 1992, 606.