

## حساب البارامترات الترموديناميكية اللازمة لاستقرار خلية روتونية

د. ناصر إسماعيل\*

(تاريخ الإيداع 5 / 2 / 2019. قُبِلَ للنشر في 20 / 5 / 2019)

### □ ملخص □

قدمنا من خلال هذا العمل تصور عن الخصائص الترموديناميكية للفونونات والروتونات في الهليوم II (الكمون الترموديناميكي، الطاقة، عدد أشباه الجسيمات، والكثافة الموافقة للمكونات العادية للهليوم II). لاحظنا من خلال المنحنيات البيانية أن عمق الفجوة الطاقية في الخلية الروتونية يبلغ القيمة  $\epsilon = 9.61 K$ ، الموافقة لعدد موجي  $p_z / \hbar = 2.09 \text{ \AA}^{-1}$ . كما بيّنا لنا المنحني البياني للكثافة النسبية بتابعة درجة الحرارة مقدرة بالكلفن الفرق بين المركبتين الأولى  $(\frac{\rho_n}{\rho})_I$  والثانية  $(\frac{\rho_n}{\rho})_{II}$ ، حيث يقع الفرق في المجال  $K (0.9 - 1.8)$ .

الكلمات المفتاحية: روتون، فونون، طيف طاقة الهليوم II، كثافة المركبة العادية للهليوم II.

\* أستاذ مساعد - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

## Calculation the thermodynamic parameters required for stability of roton

Dr. Nasser Ismail\*

(Received 5 / 2 / 2019. Accepted 20 / 5 / 2019)

### □ ABSTRACT □

This work aims to search about the thermodynamic properties of phonons and rotons in Helium II (thermodynamic potential, roton energy, particles number). It is noticed from the curves the energy gap depth in roton cell has a value of  $\epsilon = 9.61 K$

Correspond to wave number  $p_z / \hbar = 2.09 \text{ \AA}^{-1}$ . In addition, the curve of the ratio between normal component density  $\rho_n$  to the total density of liquid helium  $\rho$  as a function of temperature. The diagram illustrated the difference between  $(\frac{\rho_n}{\rho})_I$  and  $(\frac{\rho_n}{\rho})_{II}$  in the range (0.9 – 1.8)K.

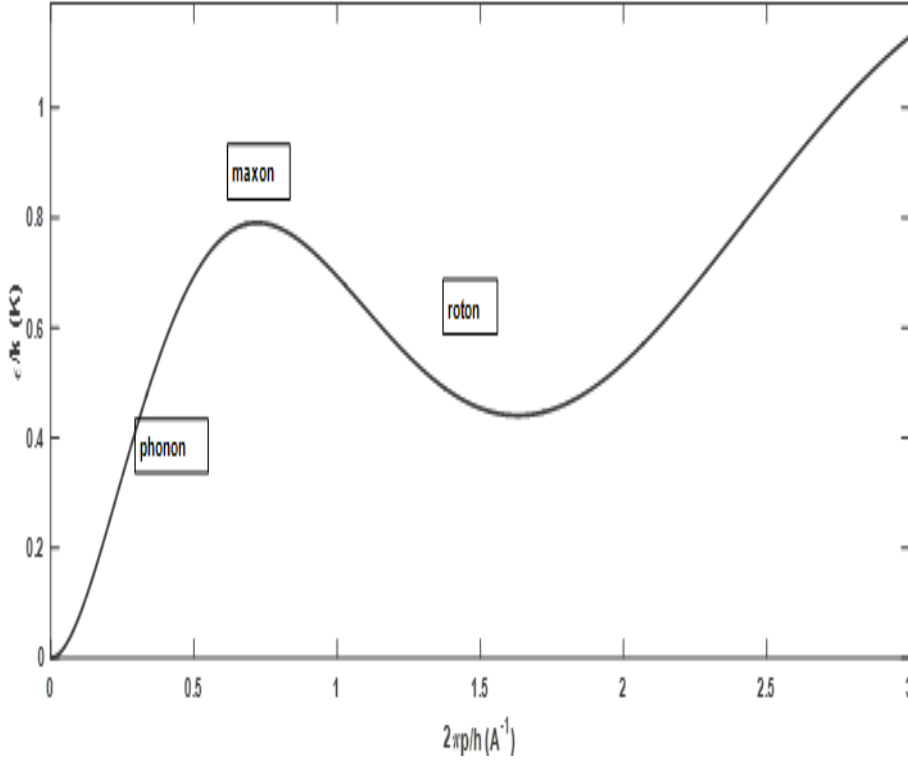
**Keywords:** Roton, phonon, energy spectrum of He-II, normal component density of He-II.

---

\* Associate Prof. at Department of Physics-Faculty of Science- Tishreen University- Lattakia- Syria.

**مقدمة:**

وضع العالم Landau نظرية كمية حول الهيليوم مفرط السيولة تحت نقطة  $\lambda$  ( $T_\lambda = 2.1768 \text{ K}$ ) الذي يدعى بالهيليوم II . يحتوي الهيليوم II على عدد من الإثارات الحرارية التي يمكن توضيحها من خلال الشكل (1)، وهذه الإثارات هي فونونات (phonons)، وماكسونات (maxons)، وروتونات (rotons).



الشكل (1): يبين علاقة الطاقة بتابعة كمية الحركة من خلال قانون تشتت الاثارات الابتدائية

تمثل الحالة الموافقة للقيمة العظمى من المنحني البياني ماكسونات، أما الفونونات فقد لوحظ أنها موجودة في الجزء من طيف الطاقة ذو أطوال موجية طويلة، ويتميز بعلاقة خطية بين طاقة شبه الجسيم ( الفونون )، وكمية الحركة  $p$  : [4 - 1]

$$\varepsilon(p) = c.p \quad (1)$$

حيث أن  $c$  سرعة الصوت العادي في الهيليوم II، ويمكن حسابها من خلال العلاقة:  

$$c = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$$

توجد الروتونات في الجزء من طيف الطاقة المتميز بأطوال موجية قصيرة وتتميز طاقته بعلاقة قطع مكافئ مع كمية حركته:

$$\varepsilon(p) = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu} \quad (2)$$

حيث أن:

$\Delta$  : عرض فجوة الطاقة بين السويات المثارة والسويات غير المثارة.

$p_0$  : كمية حركة الروتون الدنيا.

$\mu$  : كتلة الروتون الفعالة مقدره بوحدة كتلة ذرة  $4_{He}$  ،  $(m_{He} = 6.6464 \times 10^{-24} \text{ g})$  ، يسعى عدد الاثرات الابتدائية في سائل بوزة الى الصفر عندما  $T \rightarrow 0$  ، وفي درجات الحرارة المنخفضة عندما تكون كثافتها صغيرة بكفاية يمكن اعتبار أشباه الجسيمات غير متبادلة التأثير فيما بينها ، هذا يعني أنها تشكل غاز بوزة المثالي. لذلك يعطى التوزع الإحصائي المتوازن للإثرات الابتدائية في سائل بوزة بتابع توزع بوزة (في حالة الكمون الكيميائي المساوي للصفر) [4-7]:

$$n(\varepsilon(p)) = \left( e^{\varepsilon(p)/KT} - 1 \right)^{-1} \quad (3)$$

كما أن الطاقة ترتبط بالدفع بالعلاقة الآتية:

$$\varepsilon(p) = A \cdot P^r = \begin{cases} pc ; & A = c, r = 1 \quad , \quad \text{جسيمات نسبية} \\ \frac{p^2}{2m} ; & A = \frac{1}{2m}, r = 2 \quad , \quad \text{جسيمات غير نسبية} \end{cases} \quad (4)$$

باستخدام تابع التوزع ومعرفة العلاقة  $\varepsilon(p)$  من أجل قيم صغيرة لـ  $p$  يمكن حساب المقادير الترموديناميكية للسائل من أجل درجات الحرارة القريبة من درجة الصفر المطلق التي عندها تملك الاثرات الابتدائية قيم صغيرة للطاقة.

### أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى دراسة تحليلية للخصائص الترموديناميكية للفونونات والروتونات (الكمون الترموديناميكي، الطاقة، عدد أشباه الجسيمات، والكثافة الموافقة للمكونات العادية للهليوم II). وحساب المعاملات المتعلقة باستقرار الخلية الروتونية مثل (معامل برينديتل، معامل رالي، معامل غاليلي... الخ).

### طرائق البحث ومواده:

#### الكميات الترموديناميكية:

يقصد بهذه الكميات: الكمون الترموديناميكي والأنتروبية والسعة الحرارية لوحدة الكتلة والكثافة والبارامترات الترموديناميكية ( التمدد الحراري  $\beta$  ، الناقلية الحرارية  $\chi$  ، اللزوجة الحركية  $\nu$  ، والأعداد التي ترتبط بها مثل : عدد رالي ، عدد برنديتل، وعدد غاليلي).

#### الجزء الاول من الطيف (الفونون):

#### الكمون الترموديناميكي $\Omega(T)$ :

يعطى الكمون الترموديناميكي لغاز بوزة-أينشتاين في وحدة الحجم بدلالة تابع توزيع بلانك للجسيمات  $n(\varepsilon)$  في فضاء كمية الحركة  $\vec{p}$  ، وعنصر الزاوية الجسمية  $d\Phi$  بالعلاقة [3,8]:

$$\Omega(T) = - \frac{KT}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \ln(1 + n(\varepsilon)) d\vec{p} \quad (5)$$

حيث أن:

$$d\vec{p} = p^2 d\vec{p} d\Phi = P^2 d\vec{p} \sin \theta d\theta dp \quad (6)$$

هو عنصر الحجم في فراغ الدفع.

بتبديل (6) و (3) في (5) ثم المكاملة نجد الكمون الترموديناميكي للفونونات في المكون العادي للهيليوم II.

$$\Omega(T) = \frac{-4\pi^5}{4\pi(2\pi\hbar)^3} KT \left(\frac{KT}{C}\right)^3 = -\frac{\varepsilon_{ph}}{3} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ph} = \frac{4\pi^5}{15} KT \left(\frac{KT}{2\pi\hbar c}\right)^3 \quad (8)$$

حيث أن  $\varepsilon_{ph}$  طاقة الفونون بوحدة الحجم من الهيليوم II .

يرجع العدد 3 إلى امكانية استقطاب الموجات الصوتية في الجسم الصلب في ثلاثة اتجاهات (اتجاه طولي واتجاهين عرضيين) أما في الغازات والسوائل يسود اتجاه طولي واحد لذلك يجب تقسيم جميع المقادير الترموديناميكية على 3.

يحدد عدد الفونونات  $N_{ph}$  بوحدة الحجم بالعلاقة :

$$N_{ph}(t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (e^{\varepsilon(p)/KT} - 1)^{-1} p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi$$

$$N_{ph} = 2\zeta(3)4\pi \left(\frac{KT}{2\pi\hbar c}\right)^3 \quad (9)$$

حيث أن  $\zeta(x)$  تابع Riemann Zeta Function ، وتم حسابه بواسطة كود بسيط بواسطة برنامج Matlab وقيمته

$$\zeta(3) = 2.4041:$$

$$\varepsilon_{ph} = \frac{\pi^4 KT}{36.0617} N_{ph} \quad (10)$$

**كثافة الغاز الفونوني:**

تحدد كثافة الغاز الفونوني بواسطة التدفق مع اعتبار أن الهيليوم تحت الدرجة 2.17 K يتألف من مكونين هما 1- مكون عادي السيولة بكثافة  $\rho_n$  وسرعة  $\vec{v}_n$  ،

2- مكون فائق السيولة بكثافة  $\rho_s$  وسرعة  $\vec{v}_s$  وترتبط الكثافة مع كمية الحركة  $\vec{p}$  بالعلاقة [16,9]:

$$\vec{p} = \vec{J} - \rho \vec{v}_s = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s - (\rho_n + \rho_s) \vec{v}_s = \rho_n (\vec{v}_n - \vec{v}_s) = \rho_n \vec{w} \quad (11)$$

حيث أن  $\vec{w}$  السرعة النسبية للمكونين عادي السيولة، وفائق السيولة .

$$\vec{p} = \rho_{nph} \vec{w} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (e^{cp - \vec{p}\vec{w}/KT} - 1)^{-1} \vec{p} p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi$$

يمكننا نشر تابع توزيع بلانك في سلسلة  $\vec{P}\vec{w}$ ، في الحالة الموافقة تكون  $\vec{w}$  صغيرة جداً وبالمكاملة نجد:

$$\rho_{nph} = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_{ph}}{c^2} \quad (12)$$

**الجزء الثاني من الطيف (الروتون):**

على خطى الاجراء الأول سيتم تحديد الطاقة الحرة للروتون، طاقة وعدد الروتونات وكثافتها في المكون العادي: يفترض

أن الحجم الكلي للهيليوم السائل في حالة متوازنة مع وجود حركة أمامية أو مباشرة للروتون باتجاه  $\vec{p}_0$  ويقترن بها طاقة

حركية مقدارها  $E_K^+ = (\vec{p} - \vec{p}_0)^2$  ، وحركة مرتدة للروتون باتجاه  $-\vec{p}_0$  ويقترن بها طاقة حركية قدرها  $E_K^- =$

$(\vec{p} + \vec{p}_0)^2$  ، بحيث يمكن الحصول على متوسط طاقة الروتون الذي يتدفق أماميا بالعلاقة [10,9]:

$$E_r(\vec{p}) = \frac{\vec{E}_K^+ + \vec{E}_K^-}{2} = \Delta_0 + p^2/2\mu \quad (13)$$

حيث أن:

$$\Delta_0 = p_0^2/2\mu \quad (14)$$

فجوة طاقة الروتون.

**الكمون الترموديناميكي:** نأخذ علاقة الكمون الترموديناميكي ضمن الشرط  $\Delta_0 \gg KT$  حيث يتحول تابع توزيع بلانك عند هذه النهاية إلى تابع بولتزمان على فراغ الدفع، وبحسب الكمون الترموديناميكي في الفيزياء الإحصائية من علاقة عدد الجسيمات الكلي التالية:

$$N_r = \frac{g}{a} \int \frac{d\vec{p}}{e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1} = \frac{g}{a} \int e^{-\frac{\epsilon}{KT}} d\vec{p}$$

بالانتقال بهذه العلاقة إلى الزاوية المجسمة والمكاملة يتم الحصول على تكامل من النوع

$$I_n = \int x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

وهذا التكامل يمثل تكامل بواسون، حيث  $n$  كيفية، منه نجد أن:

$$\begin{aligned} N_r(T) &= \frac{e^{-\Delta_0/KT}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\left(\frac{-p^2}{2\mu KT}\right)} p^2 dp \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \left(\frac{\mu KT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\Delta_0/KT} \end{aligned} \quad (15)$$

$N_r(T)$  عدد الروتونات في وحدة الحجم من الهيليوم II. وهذا العدد يعتمد أساساً على درجة الحرارة.

وبحسب الكمون الترموديناميكي بالعلاقة التالية:

$$\Omega_r(T) = -\frac{KT}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1 + n(\epsilon_r)) d\vec{p}$$

نحصل بمكاملة هذه العلاقة ضمن الشرط  $\Delta_0 \gg KT$  على ما يلي:

$$\Omega_r(T) = -KT \left(\frac{\mu KT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\Delta_0/KT} \quad (16)$$

بمقارنة العلاقتين (15) و(16) تم التوصل الى النتيجة التالية:

$$\Omega_r(T) = -KT N_r(T)$$

كثافة الروتون: تعطى بالعلاقة (17) التالية:

$$\vec{p} = \rho_{nr} \vec{W} = \frac{e^{-\Delta_0/KT}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{-p^2}{2\mu KT} + \frac{\vec{p}\vec{W}}{KT}\right)} \vec{p} p^2 dp \sin \theta d\theta d\varphi \quad (17)$$

$$\rho_{nr} = N_r \mu$$

تحديد البارامترات الترموديناميكية لروتونات الهيليوم [11] :

• معامل الاحتكاك الداخلي (اللزوجة الديناميكية):

الروتونات في الهيليوم السائل عبارة عن خلايا اسطوانية ارتفاعها  $L_z$  و قطرها  $D_r$  بحيث يتحقق [11-16]:

$$\frac{D_r}{L_z} = 3.44$$

يفترض اثناء الدراسة أن قوة الاحتكاك  $F_R$  بين طبقات السائل المتلامسة بسطح  $A$  والتدرج في السرعة  $\frac{dv}{dx}$  حيث  $x$  المسافة الفاصلة بين الطبقات المتجاورة ، يعطى بقانون نيوتن:

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (18)$$

حيث أن معامل اللزوجة الديناميكي ، وهو أقل بكثير من  $10^{-11}$  Pa.sec [12] . حدد العالم كيببتسا في تجاربه الحد الأعلى للزوجة من أجل المركبات فائقة الميوعة، وقد حصل على قيم معامل اللزوجة الديناميكي ، وقيمه تساوي Pa.sec  $10^{-11}$  . ويمكن حساب اللزوجة الديناميكية بالصيغة التالية:

$$\eta = 10^{-14} \left( \frac{G \cdot s}{cm^2} \right) \approx 0.98 \times 10^{-12} Pa \cdot s$$

• معامل اللزوجة الحركية  $\nu$  : نحصل عليه بقسمة معامل اللزوجة الديناميكي على كثافة الهيليوم:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{10^{-12}}{149.2537} = 6.7 \times 10^{-15} m^2 s^{-1} \quad (19)$$

• التدفق الحراري  $I_W$  : كمية الحرارة المنقولة بوحدة الزمن خلال ناقل طوله  $l$  ومساحة مقطعه  $A$  وفرق درجة الحرارة بين طرفيه  $\Delta T$  :

$$I_W = \chi A \frac{\Delta T}{l} \quad (20)$$

حيث أن  $\chi$  الناقلية الحرارية للمادة المدروسة .

• معامل التمدد الحراري للهيليوم فائق السيولة: يحدد بالعلاقة:

$$\beta(T) = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dT} \right)_P \quad (21)$$

في المجال  $0.15 \leq T \leq 1.95$  ، وتتحدد قيمته في المجال المذكور بالعلاقة:

$$2.58 \leq \beta(T) \leq 25.45 K^{-1}$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{T_f - T_i} \int_{T_i}^{T_f} \beta(T) dT = 8.82 K^{-1} \quad (22)$$

• عدد برانديتل (Prandtl Number):

يحدد كنسبة بين معامل اللزوجة الحركي والناقلية الحرارية:

$$P_r = \frac{\nu}{\chi} \quad (23)$$

في المجال المحدد أعلاه لتغير معامل التمدد الحراري  $\beta(T)$  ، يقع عدد برانديتل في المجال  $3.25 - 3.83$ .

• عدد رالي (Rayleigh Number):

يحدد بواسطة البارامترات السابقة حيث يؤخذ بالقيمة الدنيا  $R_{min}$  ونعبر عنه بالعلاقة :

$$R_{\min} = g \cdot \bar{\beta} \cdot L_z^3 \cdot T_\lambda / v_\chi \quad (24)$$

ويمكن حسابه من أجل  $\bar{\beta} = 11.2K^{-1}$ ، وعدد برانديتل يساوي  $Pr=3.4988$ ، ويساوي :

$$R = 3.4988 \times \frac{11.2 \times 10 \times (3.262)^3 \times 2.1768}{(6.7)^2} = 657.511$$

• عدد غاليلي (Galilee Number):

يحدد النسبة بين قوة الجاذبية وقوة الاحتكاك الجزيئي:

$$Ga = g \frac{L_z^3}{v^2} = \frac{10 \times (3.262)^3}{(6.7)^2} = 7.73218$$

### النتائج والمناقشة:

نعتبر عن الكثافة النسبية بين كثافة المكون العادي  $\rho_n$  والكثافة الكلية للهيليوم السائل  $\rho$  وفق ما جاء في المراجع بالعلاقة [15,14,13,12,1]:

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{\rho_{nph}}{\rho} + \frac{\rho_{nr}}{\rho} = \frac{16}{45} \cdot \frac{\pi^5}{c^2} \cdot \frac{KT}{\rho} \cdot \left( \frac{KT}{2\pi\hbar C} \right)^3 + \frac{\mu N_r}{\rho} \quad (25)$$

يمكن الحصول على عدد الروتونات وفق طاقته المستخدمة بطريقتين والمحددة بالعلاقة التالية:

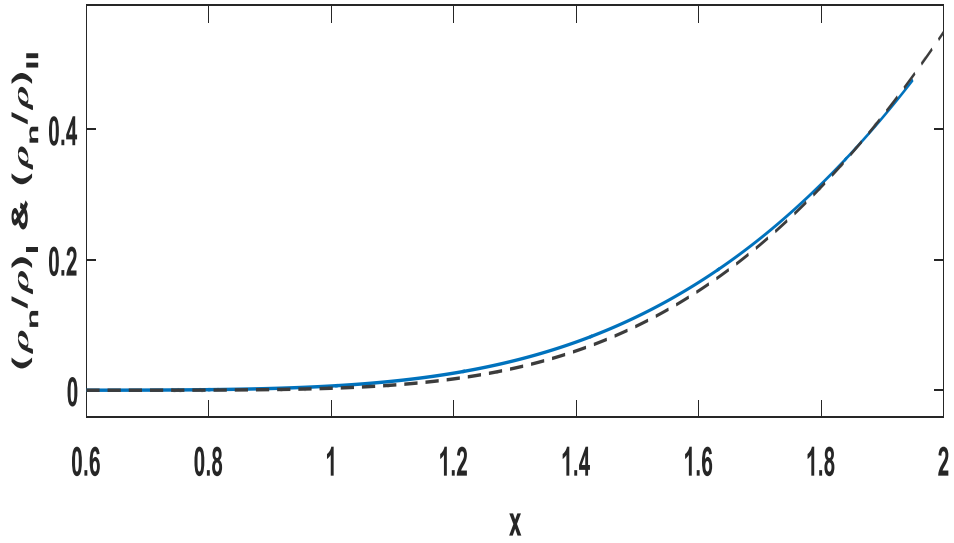
$$N_r = \begin{cases} N_r^{(1)} = \left( \frac{\mu KT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta_0/KT} & ; \varepsilon_r(p) = \frac{p^2}{2\mu} \\ N_r^{(2)} = \frac{2\mu^{1/2} p_0^4}{3(2\pi\hbar^2)^{3/2} (KT)^{1/2}} e^{-\Delta_0/KT} & ; \varepsilon_r(p) = \Delta + \frac{(P - P_0)^2}{2\mu} \end{cases} \quad (26)$$

$$\left( \frac{\rho_n}{\rho} \right)_I = A_I x^4 + B_I x^{3/2} \cdot e^{-\frac{D_I}{x}} \quad (27)$$

$$\left( \frac{\rho_n}{\rho} \right)_{II} = A_{II} x^4 + B_{II} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{D_{II}}{x}} \quad (28)$$

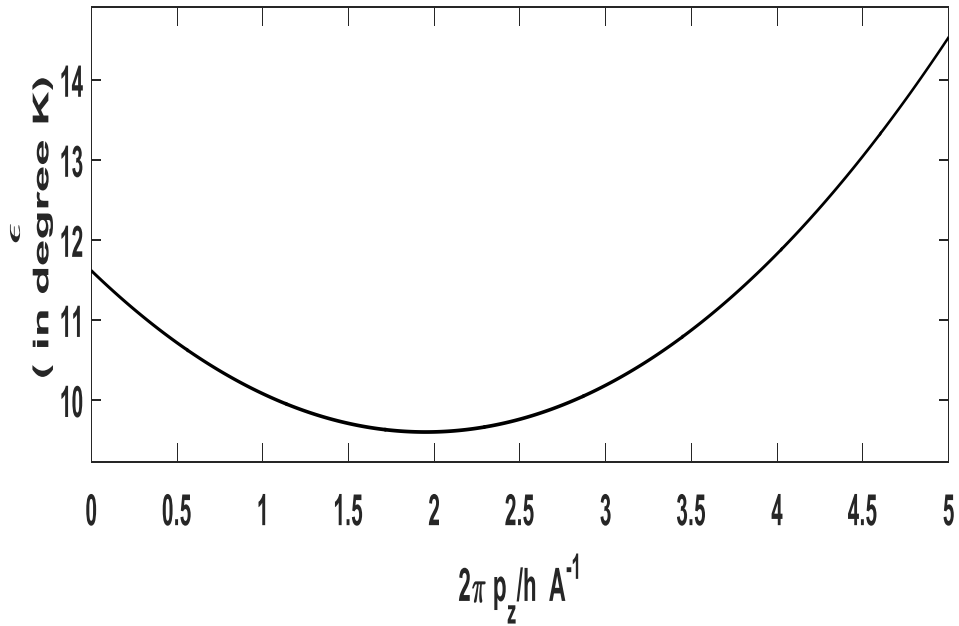
تم رسم المنحنيين البيانيين للعلاقين (27) و (28) في الشكل (2) باستخدام كود curve fitting tool في برنامج Matlab الموافقتين للطاقتين في العلاقة (26) بدلالة المعامل  $x=T/(1K)$ . حيث بين المجال الحراري K (0.9-1.8) الفرق في عدد الروتونات  $N_r$  وفقاً للعلاقة (26) كما يوضح الشكل المذكور.





الشكل (2): يوضح علاقة الكثافة النسبية بتابعة المعامل الحراري  $x$ .

للحصول على عمق فجوة طاقة الروتون تم رسم العلاقة (13) بتابعة العدد الموجي. يُلاحظ المنحني البياني أن القيمة الدنيا للطاقة تبلغ  $\epsilon = 9.61 K$  كما في الشكل (3).



الشكل (3): يوضح علاقة طاقة الروتون مقدرة في بالكلفن بتابعة العدد الموجي مقدرا بـ  $\text{Å}^{-1}$ .

## الاستنتاجات والتوصيات:

- لوحظ أن عمق الفجوة الطاقية في الخلية الروتونية يبلغ القيمة  $\epsilon = 9.61 K$  ، الموافقة للمتجه الموجي  $p_z / \hbar = 2.09 \text{ \AA}^{-1}$  . وهذا يتفق مع التجارب التي أظهرت أن الروتون والفونون يمكن أن تميز الحالة السائلة لمعادن مثل التيتانيوم والزنك [18,17] ، في حين تم دراسة هذه الحالة في أغلب الحالات المتعلقة بظاهرة فرط السيولة . [19]
- تمت الإشارة إلى البارامترات الترموديناميكية للخلية الروتونية (الكمون الترموديناميكي، عدد أشباه الجسيمات الروتونية والفونونية، والكثافة، والاعداد المتعلقة باستقرار الخلية الروتونية).
- تم استعراض الأعداد اللازمة لاستقرار الخلية الروتونية (عدد برندينل، عدد رالي، وعدد غاليلي بدلالة معاملات اللزوجة الحركية، والديناميكية، والناقلية الحرارية).
- تمثل الإثارات الطاقية مثل الروتون والفونون إثارات جماعية وتفتح آفاقاً علمية واسعة لوصف تصرف خواص حالة فرط السيولة ليس فقط للهليوم II بل وللمعادن الأخرى أيضاً.

## المراجع

- [1] LANDAU, D. *The theory of superfluidity of helium-II*. UFN. Russian, V. 93 Iss. 11, 1967, 495 - 520.
- [2] ALBERTO, N; and RICCARDO PENCOB. *Mutual interactions of phonons, rotons and gravity*. U.S.A. 24 may 2017.
- [3] ЛАНДАУ, Л.Д. ; ЛИФШИЦ, Е. М. *Статистическая физика*. Том5, Москва, Наука 1964. страница (180-189).
- [4] ЛИФШИЦ, Е. М; ПИТАЕВСКИЙ, Л.П. *Статистическая физика*. Том9 . Часть2, Москва, Наука 1978, страница (108-123).
- [5] ALBERGAMO, H; SCHOBBER, J; and BOSSY, P. *phonon-roton excitations in liquid 4He at negative pressures*. Phys. Rev. Lett **92**, (2004).
- [6] ALBERGAMO, H; SCHOBBER, J; BOSSY, P; and AVERBUCH, H. *boson localization and excitations of liquid 4He confined in gelsil*. Phys.Rev2007, **B76**.
- [7] GLYDE H. R.; REP PROG. *excitations in quantum liquids*. Phys. (submitted January 2017).
- [8] LI-CHUNG, Ha1, et. *Roton-maxon excitation spectrum of Bose condensates in a shaken optical lattice* .U.S.A. February 2, 2017 ,
- [9] J. BOSSY, J; OLLIVIER, H; and SCHOBBER, H. *phonon-roton modes in liquid 4He coincide with Bose-Einstein condensation*. Euro. Phys. Lett. **98**, (2012).
- [10] SANDERS, J. *Semiclassical Mechanics of Rotons* . U.S.A. August 28, 2001.
- [11] НАЦОКИН, В.В. *Техническая термодинамика и теплопередача*. Москва, высшая школа, 1980. стр.(505-534).
- [12] КАПИЦА, Р. *Superfluidity of helium-II*. UFN. Vol. 93, Iss. 11, 1967, 481–494.
- [13] DRAEGER, W; and CELERLY, M. *Superfluidity in a dropped helium droplet*. phys.rev.lett. Vol.90, Number6, February 2003.
- [14] DAUNTDZH, G; and SMIT, S. *The current state of the problem of liquid helium* . UFN. Vol. 56, Iss. 3, 1955, 249-416.

- [15] BOSSY, J; OLLIVIER, H; SCHOBER, H; and GLYDE, R. *Excitations of amorphous solid Helium Phys. Rev. 2012, B 86.*
- [16] TKACHENKO, V.I. *A convective model of a roton .East Eur.J.phys.Vol.4 No.1.2017,28-46.*
- [17] PATHRIA, R.K. *Statistical mechanics.* third edition, ELSEVIR, pages205-210(2011).
- [18]-SAID H, et all, *phys. Rev., B74, p.172202(2006).*
- [19]-ISHIKAWA, et all, *phys. rev. lett.,93,097801(2004).*