مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (41) العدد (1) 2019
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (1) 2019

التقارب القوي لطريقة تنظيم تيخونوف لحل مسائل سيئة التوضع في فضاءات هيلبرت

د. محمد سويقات [1]
د. بشرى عباس [2]
ليال علي [3]

(تاريخ الإيداع 7 / 8 / 2018. قُبِل للنشر في 24 / 2 /2019)

□ ملخّص □

من المعلوم أن إيجاد حل لمسائل سيئة التوضع عددياً دون استخدام طرق للتنظيم هو أمر في غاية الصعوبة لأن تغيرات صغيرة جداً في المعطيات تؤدي إلى أخطاء كبيرة وعشوائية في الحل. ندرس في هذا البحث طريقة تنظيم تيخونوف التي تتلخّص بإيجاد حل للمسألة السيئة التوضع من الشكل $Lx = y$ وذلك عن طريق إيجاد حل لمسألة أمثليات محدبة أكثر استقراراً ويسمى بالحل النظامي. يهدف البحث إلى دراسة سرعة تقارب الحل النظامي إلى حل المسألة سيئة التوضع المذكورة، حيث يتم اختيار وسيط النظامية بشكل مناسب من أجل الحصول على التقارب القوي.

الكلمات المفتاحية. مسائل سيئة التوضع، طريقة تنظيم تيخونوف، مسائل أمثليات محدبة.

[1] أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. soueycatt55@hotmail.com
[2] مدرسة– قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية abbas.boushra@yahoo.com
[3] طالبة دكتوراه – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية layal91me@hotmail.com

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (41) العدد (1) 2019
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (1) 2019

Strong Convergence of Tikhonov Regularization Method for Solving Ill-Posed Problems in Hilbert Spaces

Dr. Mohamed Soueycatt[4]
Dr. Boushra Abbas[5]
Layal Ali[6]

(Received 7 / 8 / 2018. Accepted 24 / 2 /2019)

☐ ABSTRACT ☐

It is well-known that solving ill-posed problems numerically without using methods for regularization is difficult because any small change in the data implies to large and random errors in the solution. We restrict the attention to Tikhonov regularization method where the original ill-posed problem is replaced with finding solution to a stable convex optimization problem which is called a regularized solution.
This research aims to determine the convenient choice of the regularization parameter in order to establish the strong convergence.

Key words . Ill-posed problems, Tikhonov regularization method, convex optimization.

4 Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria. soueycatt55@hotmail.com
[5] Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria. abbas.boushra@yahoo.com
[6] PhD student, Department of mathematics, Faculty of Sciences,Tishreen University , Lattakia , Syria. layal91me@hotmail.com

مقدّمة.

عند دراسة بعض المسائل في العديد من التطبيقات تنشأ نماذج رياضية على شكل معادلة محكومة بمؤثر خطي ومحدود $L: X \to Y$ بين فضائي هيلبرت من الشكل الآتي:

$$Lx = y \qquad\qquad (*)$$

حيث تمثل y المعطيات data.

يُقال عن المسألة $(*)$ إنها جيدة التوضع well–posed problem، [4]، إذا تحققت ثلاثة شروط وهي أن يكون لهذه المسألة حل موجود، وهذا الحل وحيد، وأن يعتمد هذا الحل بشكل مستمر على المعطيات؛ بمعنى أن تغيّراً صغيراً جداً في المعطيات لا يؤثر على الحل. يرمز إلى حل المسألة $(*)$ بالرمز x^*. إذا اختلّ أحد هذه الشروط، فإن المسألة $(*)$ تسمّى سيئة التوضع ill–posed problem.

اقترح تيخونوف [7] طريقة لتنظيم المسائل السيئة التوضع، سميت بطريقة تنظيم تيخونوف Tikhonov regularization method وتتلخّص بإيجاد حل يُرمز له بـ x_α^δ لمسألة أمثليات محدبة ومستقرة من الشكل:

$$\min_{x\in X}\{\|Lx - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2\} \quad ; \; \delta > 0, \alpha > 0$$

يسمى حلاً نظامياً regularized solution، ومن ثم تتم دراسة تقارب (convergence) هذا الحل نحو x^*.

على الرغم من الأهمية النظرية للتقارب، إلا أنه ومن وجهة نظر تطبيقية، من المهم جداً دراسة سرعة تقارب الحل النظامي x_a^δ نحو x^*.

تتطلّب دراسة سرعة التقارب فرض شروط معينة على الحل الذي نبحث عنه x^* بالإضافة إلى اختيار مناسب لوسيط النظامية α، فقد حدّد Groetsch في[5] هذه الشروط، وسميت بالشروط المصدرية المعيارية، وتم تحديد سرعة التقارب من رتبة محددة بتحقق هذه الشروط.

في الواقع، إن الشروط المصدرية المعيارية قاسية وصعبة التطبيق في كثير من الحالات، لذلك أعيدت صياغتها حديثا على شكل متراجحات متغيرة variational inequalities وسميت بالشروط المعيارية المتغيرة التي تمّ تطويرها في السنوات الأخيرة من قبل رياضيين كثر [1,2,3,6,7,8,10] وذلك بغرض الحصول على تقارب أسرع.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى تطوير بعض الشروط المعيارية المتغيرة وإلى اختيار وسيط النظامية α بشكل مناسب للحصول على التقارب القوي لطريقة تنظيم تيخونوف لحل مسائل سيئة التوضع في فضاءات هيلبرت. وتكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته في معالجة الصورة ومعالجة الإشارة، وسيكون له أهمية في دراسة وتقديم أبحاث جديدة.

طرائق البحث ومواده.

تُعطَى بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالمسائل السيئة التوضع، وبعض الشروط المعيارية الهامة المتعلقة بالتقارب القوي، ونستخدم طريقة تيخونوف لتنظيم هذه المسائل.

1. تعاريف ونتائج أساسية.

نقدم في هذه الفقرة بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالمسالة المطروحة.

- ليكن X,Y فضاءي هيلبرت حقيقيين، وليكن $L: X \to Y$ مؤثراً خطياً ومحدوداً. لنعتبر المسألة السيئة التوضع ill–posed problem الآتية:

$$Lx = y \quad ; \quad y \in Y \qquad (1.1)$$

حيث $y \in Y$ المعطيات الدقيقة exact data.

- نقول عن عنصر $x^* \in X$، [4]، أنه حل ذو نظيم أصغري a minimal norm solution للمسألة (1.1) إذا حقق الآتي:

$$Lx^* = y \quad \& \quad \|x^*\| = \inf\{\|x\| \ ; \ Lx = y\}$$

حيث يشير $\|.\|$ إلى النظيم المعرف في فضاء هيلبرت والمولد من الجداء الداخلي على هذا الفضاء.

لقد درس الرياضي Engl وآخرون في [4] هذه المسألة حيث أُثبِت في المبرهنة 2.5 وجود ووحدانية حل ذو نظيم أصغري لهذه المسألة. نشير إلى أن سوء التوضع للمسألة (1.1) ناتج من كون الحل لا يعتمد بشكل مستمر على المعطيات y.

من جهة ثانية، في معظم التطبيقات، تكون المعطيات الدقيقة $y \in Y$ غير متوفرة، وعوضاً عنها يكون في الطرف الأيمن من (1.1) معطيات مشوشة noisy data يرمز لها بـ $y^\delta \in Y$ وهي تحقق العلاقة:

$$\|y - y^\delta\| \le \delta$$

حيث $\delta > 0$ يسمى مستوى التشويشnoise level.

لتفادي مشكلة فقدان المعطيات الدقيقة تُدرَس مسألة الأمثليات الآتية:

$$\min_{x \in X} \|Lx - y^\delta\|^2 \qquad (1.2)$$

لحل هذه المسائل نلجأ إلى تنظيمها باستخدام طريقة تنظيم تيخونوف [7] التي تتلخّص بإيجاد حل يرمز له بـ x_α^δ لمسألة أمثليات محدبة ومستقرة من الشكل:

$$\min_{x \in X} \{\|Lx - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2\} \qquad (1.3)$$

يسمى x_α^δ حلاً نظامياً regularized solution. و $\alpha > 0$ وسيط النظامية regularization parameter.

بالنظر إلى النتائج الرئيسية في كل من [4,2] نجد أن x_α^δ موجود ووحيد وأنه يتقارب نحو حل ذو نظيم أصغري للمسألة (1.1) وذلك إذا تم اختيار وسيط النظامية α بشكل مناسب.

ولكن دراسة سرعة التقارب تتطلب فرض شروط على الحل ذو النظيم الأصغري. وقد تم استخدام الشروط المعيارية الكلاسيكية حيث:

- يُقال عن الحل ذو النظيم الأصغري x^* للمعادلة (1.1) أنه يحقق الشرط المصدري المعياري standard source condition، [5]، إذا كان:

$$x^* \in R\left(\left(L^*L\right)^\theta\right) \qquad ; \quad 0 < \theta \le 1$$

حيث يرمز L^* إلى مؤثر هيلبرت المرافق للمؤثر الخطي والمحدودL، ويرمز $R(T)$ إلى مدى range المؤثر T، كما يرمز $\left(L^*L\right)^\theta$ إلى تركيب المؤثرين L و L^* من الدرجة θ.

وتم البرهان في [5] أنه إذا كان $x^* \in R\left(\left(L^*L\right)^\theta\right)$ من أجل $0 < \theta \le 1$، وكان وسيط النظامية α يحقق العلاقة الآتية $\alpha = A\delta^{\frac{2}{2\theta+1}}$ حيث A عدد حقيقي موجب فإن:

$$\lim_{\delta \to 0} \|x_\alpha^\delta - x^*\| = \delta^{\frac{2\theta}{2\theta+1}}$$

ويرمز لذلك بالشكل الآتي:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\| = O(\delta^{\frac{2\theta}{2\theta+1}})$$

ويقال أن تقارب الحل المنظم نحو حل ذو نظيم أصغري هو من الرتبة $\delta^{\frac{2\theta}{2\theta+1}}$.

- نلاحظ أن الشرط المصدري المعياري في التعريف السابق هو شرط قاس وصعب التطبيق في كثير من الحالات

إذ أنه يتطلب إيجاد مؤثر هلبرت المرافق L^*، كما أنه ليس بالضرورة أن ينتمي x^* إلى مدى المؤثر $(L^*L)^\theta$. لذلك قُدِّمَت حديثاً الشروط المعيارية على شكل متراجحات متغيرة وسميت بالشروط المعيارية المتغيرة التي تعد أسهل وأكثر قابلية للتطبيق على نطاق أوسع من الشروط الكلاسيكية. فقد قُدِّمَ في [7] الشرط المعياري على شكل متراجحة متغيرة من الشكل:

$$< u, x - x^* > \leq \beta_1(\omega)\|x - x^*\| + \beta_2(\omega)\|Lx - Lx^*\| \qquad \forall x \in X \qquad (1.4)$$

حيث u عنصر من التفاضل الجزئي (sub−differential) $\partial(\|x^*\|)$، و β_1, β_2 تابعان قيم كل منهما غير سالبة.

وتم البرهان في [7] أنه إذا كان الحل ذو النظيم الأصغري x^* يحقق المتراجحة (1.4) وكان وسيط النظامية α تابعاً لـ δ ويحقق الآتي:

$$\alpha: (0,\infty) \to (0,\infty) \ ; \quad c\delta^{p-1} \leq \alpha(\delta) \leq C\delta^{p-1} \ ; \quad 0 < c \leq C$$

عندئذ يكون تقارب الحل النظامي إلى الحل الذي نبحث عنه x^* من الرتبة δ.

- حدّد Andreev وآخرون في المرجع [2] الشرط المعياري المتغير بالشكل الآتي:

$$2 < x^*, x > \leq \beta\|Lx\|^\mu + \gamma\|x\|^2 \qquad \forall\, x \in X \qquad (1.5)$$

حيث $\mu \in (0,1], \ \beta \geq 0, \ \gamma \in [0,1)$. وتم اثبات أنه إذا حقق x^* المتراجحة (1.5) عندئذ لكل $\alpha > 0$ يكون:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \leq \frac{2}{1-\gamma}\frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{\beta^{\frac{2}{2-\mu}}(2-\square)}{2(1-\gamma)}\alpha^{\frac{\mu}{2-\mu}}$$

النتائج والمناقشة.

سندرس في هذه الفقرة سرعة التقارب من خلال فرض شروط معينة على الحل x^* واختيار مناسب لوسيط النظامية α من أجل الحصول على التقارب القوي، لذلك لنرمز بداية إلى تابع الهدف في المسألة (1.3) بالرمز T_α^δ، أي:

$$T_\alpha^\delta: X \to R$$

$$T_\alpha^\delta(x) := \|Lx - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \qquad (2.1)$$

لنرمز بـ x_α^δ إلى النقطة الصغرى للتابع $T_\alpha^\delta(.)$، بحسب النتائج الرئيسية في [2,4] نجد أن x_α^δ موجود ووحيد.

مبرهنة (1). ليكن $\beta \geq 0, \delta \geq 0, \alpha > 0$، وبفرض أن x_α^δ نقطة صغرى للتابع T_α^δ المعطى بالعلاقة (2.1)، عندئذ يكون:

$$\|x_\alpha^\delta\|^2 + \|x^*\|^2 + \beta\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 \leq \left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right)\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)\delta^2 + 2\|x^*\|^2$$

البرهان.

لدينا $\delta \geq 0$; $\|y - y^\delta\| \leq \delta$, $Lx - y^\delta = 0$ ومنه:

$$\|Lx - y^{\text{ä}}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y - y^\delta\|^2 \leq \frac{1}{2}\delta^2, \qquad \forall x \in X \qquad (2.2)$$

من (2.1) نجد:

$$\left\|x_\alpha^\delta\right\|^2+\|x^*\|^2+\beta\left\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\right\|^2=\frac{1}{\alpha}\left[T_\alpha^\delta\left(x_\alpha^\delta\right)-\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2\right]+\|x^*\|^2+\beta\left\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\right\|^2$$

من كون x_α^δ نقطة صغرى للتابع $T_\alpha^\delta(.)$، فإن:

$$\frac{1}{\alpha}\left[T_\alpha^\delta\left(x_\alpha^\delta\right)-\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2\right]+\|x^*\|^2+\beta\left\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\right\|^2$$
$$\le\frac{1}{\alpha}[\|Lx^*-y^\delta\|^2+\alpha\|x^*\|^2-\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\|^2]+\|x^*\|^2+\beta\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\|^2$$
$$=\frac{1}{\alpha}[\|Lx^*-y^\delta\|^2-\|Lx_\alpha^{\ddot{a}}-y^\delta\|^2]+\beta\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\|^2+2\|x^*\|^2$$

باستخدام متراجحة المثلث:

$$\left\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\right\|\le\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|+\left\|Lx^*-y^\delta\right\|$$

نحصل على:

$$\frac{1}{B}\left[T_\alpha^\delta\left(x_\alpha^\delta\right)-\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2\right]+\|x^*\|^2+\beta\left\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\right\|^2$$
$$\le\frac{1}{\alpha}[\|Lx^*-y^\delta\|^2-\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\|^2]+\beta[\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\|^2+\|Lx^*-y^\delta\|^2]+2\|x^*\|^2$$

وباستخدام المتراجحة (2.2) نجد:

$$\frac{1}{\alpha}\left[\left\|Lx^*-y^\delta\right\|^2-\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2\right]+\beta\left[\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2+\left\|Lx^*-y^\delta\right\|^2\right]+2\|x^*\|^2$$
$$\le\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2}\delta^2-\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2\right]+\beta\left[\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2+\frac{1}{2}\delta^2\right]+2\|x^*\|^2$$
$$=\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\delta^2+2\|x^*\|^2$$

إذاً،

$$\left\|x_\alpha^\delta\right\|^2+\|x^*\|^2+\beta\left\|Lx_\alpha^\delta-Lx^*\right\|^2\le\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\delta^2+2\|x^*\|^2$$

وهو المطلوب برهانه. ■

تساعدنا المبرهنة (1) في إثبات صحة المرهنة (2) الآتية والتي نقدّم فيها تقديراً للحد الأعلى للمسافة بين الحل النظامي والحل ذو النظيم الأصغري. ولهذا الغرض سوف نفرض أن الحل ذو النظيم الأصغريx^* يحقق الشرط المعياري المتغير المعطى بالمتراجحة (1.5).

مبرهنة (2). ليكن $\beta\ge0, x\in X$ وبفرض أنx^* يحقق المتراجحة الآتية:

$$2<x,x^*>\le\ \beta\|Lx\|^\mu+\gamma\|x\|^2\qquad\forall\ x\in X\qquad(2.3)$$

حيث $0\le\gamma<1$,$0<\mu\le1$. وليكن $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ تابعاً معرفاً بالشكل:

$$\varphi(t):=\beta t,\ \ t\ge0$$

ويحقق $t\to0\ ;\ \varphi(t)\to0$. عندئذ:

$$\|x_\alpha^\delta-x^*\|\le\left[\frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma)+\sup_{t\ge0}\left(\varphi\left(\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2+\frac{1}{2}\delta^2+\frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right)-\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}\delta^2+\left\|Lx_\alpha^\delta-y^\delta\right\|^2\right)\right)\right]^{1/2}$$

البرهان.

بحسب المتراجحة (2.3) لدينا:

$$2<x,x^*>\le\ \beta\|Lx\|^\mu+\gamma\|x\|^2=\ \beta\|Lx\|^\mu+\gamma\|x\|^2+\|x-x^*\|^2-\|x-x^*\|^2$$

ومنه نجد:

$$\|x-x^*\|^2\le\beta\|Lx\|^\mu+\gamma\|x\|^2+\|x\|^2+\|x^*\|^2$$

في المتراجحة الأخيرة، نضع $x := x_\alpha^\delta$ نحصل على:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \le \beta\|Lx_\alpha^\delta\|^\mu + \gamma\|x_\alpha^\delta\|^2 + \|x_\alpha^\delta\|^2 + \|x^*\|^2$$

بالنظر إلى (2.1) نجد أن $\|x_\alpha^\delta\|^2 = \frac{1}{\alpha}\left[T_\alpha^{\ddot{a}}(x_\alpha^\delta) - \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right]$ وبالتالي:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \le \beta\|Lx_\alpha^\delta\|^\mu + \frac{\gamma}{\alpha}\left[T_\alpha^\delta(x_\alpha^\delta) - \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right] + \|x^*\|^2 + \|x_\alpha^\delta\|^2$$

من كون x_α^δ نقطة صغرى للتابع $T_\alpha^\delta(.)$ نجد أنه لكل $x \in X$ فإن: $T_\alpha^\delta(x_\alpha^\delta) \le T_\alpha^\delta(x)$ ، ومنه يكون:

$$T_\alpha^\delta(x_\alpha^\delta) \le T_\alpha^\delta(x^*)$$

لكون $x^* \in X$. وبالتالي:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \le \beta\|Lx_\alpha^\delta\|^\mu + \frac{\gamma}{\alpha}\left[\|Lx^* - y^\delta\|^2 + \alpha\|x^*\|^2 - \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right] + \|x^*\|^2 + \|x_\alpha^\delta\|^2$$

وباستخدام العلاقة (2.2) نحصل على:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \le \beta\|Lx_\alpha^\delta\|^\mu + \frac{\gamma}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\delta^2 + \alpha\|x^*\|^2 - \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right] + \|x^*\|^2 + \|x_\alpha^\delta\|^2$$
$$\le \beta\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 + \|x^*\|^2 + \|x_\alpha^\delta\|^2 + \frac{1}{\alpha}\delta^2 + \gamma\|x^*\|^2 - \frac{\gamma}{\alpha}\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2$$

لدينا $\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\| \le \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\| + \|y^\delta - Lx^*\| \le \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\| + \delta$ وبالتالي نجد:

$$\frac{1}{2}\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 \le \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \delta^2$$

إذاً، $-\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 \le -\frac{1}{2}\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 + \delta^2$

وبالتالي نجد:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \le \beta\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 + \|x^*\|^2 + \|x_\alpha^\delta\|^2 + \frac{1}{\alpha}\delta^2 + \gamma\|x^*\|^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\left[-\frac{1}{2}\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 + \delta^2\right]$$

وباستخدام المبرهنة (1) نحصل على:

$$\beta\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 + \|x^*\|^2 + \|x_\alpha^\delta\|^2 + \frac{1}{\alpha}\delta^2 + \gamma\|x^*\|^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\left[-\frac{1}{2}\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2 + \delta^2\right]$$
$$\le \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2}\delta^2 - \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right] + \beta\left[\|Lx_\alpha^\delta - B^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2\right] + \frac{1}{\alpha}\delta^2 + (2+\gamma)\|x^*\|^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\left[\delta^2 - \frac{1}{2}\|Lx_\alpha^\delta - Lx^*\|^2\right]$$
$$\le \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2}\delta^2 - \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right] + \beta\left[\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2\right] + \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + (2+\gamma)\|x^*\|^2$$
$$\le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \beta\left[\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right] - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2}\delta^2 + \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right]$$

بما أن $\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2 > 0$، إذاً نجد بحسب تعريف التابع φ أن:

$$\beta\left[\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right] \coloneqq \varphi\left(\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right)$$

وبالتالي:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{t\ge 0}\left(\varphi\left(\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}\delta^2 + \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right)\right)$$

إذاً:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\| \le \left[\frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{t\ge 0}\left(\varphi\left(\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}\delta^2 + \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right)\right)\right]^{1/2}$$

وهو المطلوب برهانه. ■

في المبرهنة الآتية، نقدّم النتيجة الرئيسية حيث نثبت أن المسافة بين الحل النظامي والحل ذو النظيم الأصغري لا متناهية في الصغر.

مبرهنة (3). بفرض أن x^* يحقق المتراجحة (2.3)، وليكن ρ عدداً موجباً يحقق: $\frac{1}{2}\delta^n < \rho$ من أجل $n \in N$ كبير بقدر كاف. وبفرض أن $\omega: [0,\infty) \to [0,\infty)$ تابعاً متزايداً ويحقق $\tau \to 0$; $\omega(\tau) \to 0$.
وأن وسيط النظامية α يحقق المتراجحة الآتية:

$$\inf_{0\le\gamma<\frac{1}{2}\delta^n} \frac{\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\omega(\tau)}{\frac{1}{2}\delta^n-\tau} \ge \frac{1}{\alpha} \ge \sup_{\frac{1}{2}\delta^n<\tau\le\rho} \frac{\omega(\tau)-\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)}{\tau-\frac{1}{2}\delta^n} \qquad (2.4)$$

عندئذ من أجل كل $\delta \in (0,1)$ يكون:

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\| \le \sqrt{2\,\omega(\frac{1}{2}\delta^n)}$$

البرهان. نجد من المبرهنة (2) أنه وبوضع $\tau = \frac{1}{2}\delta^2 + \left\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\right\|^2 + \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2$ أن:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\tau - \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\tau - \left(\tau - \frac{1}{2}\delta^2 - \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right)\right)\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\tau - \left(-\left(-\tau + \frac{1}{2}\delta^2 + \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right)\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)(\tau)\right) + \sup_{\tau\ge0}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(-\tau + \frac{1}{2}\delta^2 + \|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2\right)\right)\right)$$

وبملاحظة أن $-\tau = -\frac{1}{2}\delta^2 - \left\|Lx_\alpha^\delta - y^\delta\right\|^2 - \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2$ نجد:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{á}\right)(\tau)\right) + \sup_{\tau\ge0}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(-\frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2\right)\right)\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)(\tau)\right) - \frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2$$

ومنه:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)(\tau)\right) + 0$$

ومنه نجد أن:

$$\left\|x_\alpha^\delta - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\delta^2(1+\gamma) + \sup_{\tau\ge0}\left(\varphi(\tau) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)\tau\right) \qquad (2.5)$$

نلاحظ أنه من أجل كل $t \in (0,\rho)$ وكل $\tau > \rho$ فإن

$$\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\tau-t} \le \frac{1}{\tau-t}[\omega(\rho) + (\inf_{\sigma\in[0,\rho)}\frac{\omega(\rho)-\omega(\sigma)}{\rho-\sigma})(\tau-\rho) - \omega(t)]$$

$$\le \frac{1}{\tau-t}\left(\omega(\rho) + \frac{\omega(\rho)-\omega(t)}{\rho-t}(\tau-\rho) - \omega(t)\right)$$

لكن لدينا :

$$\omega(\rho)+\frac{\omega(\rho)-\omega(t)}{\rho-t}(\tau-\rho)-\omega(t)=\frac{\big(\omega(\rho)-\omega(t)\big)(\tau-\rho)+\big(\omega(\rho)-\omega(t)\big)(\rho-t)}{\rho-t}$$

وبالتالي:

$$\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\tau-t}\leq\ \frac{1}{\tau-t}\frac{\big(\omega(\rho)-\omega(t)\big)(\tau-t)}{\rho-t}$$

ومنه نجد:

$$\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\tau-t}\leq\frac{\omega(\rho)-\omega(t)}{\rho-t}$$

نضع $t:=\frac{1}{\alpha}\delta^n$، عندئذ يكون:

$$\frac{\omega(\tau)-\omega\left(\frac{1}{\alpha}\delta^n\right)}{\tau-\frac{1}{\alpha}\delta^n}\leq\frac{\omega(\rho)-\omega\left(\frac{1}{\alpha}\delta^n\right)}{\rho-\frac{1}{\alpha}\delta^n}$$

وبالتالي يمكن أن نأخذ الـ *sup* في العلاقة (2.4) من أجل $\tau\in(\frac{1}{\alpha}\delta^n,\infty)$

$$\inf_{0\leq\gamma<\frac{1}{2}\delta^n}\frac{\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\omega(\tau)}{\frac{1}{2}\delta^n-\tau}\geq\frac{1}{\alpha}\geq\sup_{\frac{1}{2}\delta^n<\tau<\infty}\frac{\omega(\tau)-\omega(\frac{1}{2}\delta^n)}{\tau-\frac{1}{2}\delta^n}$$

وهذا يكافئ:

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\omega(\tau)}{\frac{1}{2}\delta^n-\tau}\geq\ \frac{1}{\alpha}\qquad\qquad\forall\tau\in\left(0,\frac{1}{2}\delta^n\right)$$

$$\frac{\omega(\tau)-\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)}{\tau-\frac{1}{2}\delta^n}\leq\ \frac{1}{\alpha}\qquad\qquad\forall\tau\in\left(\frac{1}{2}\delta^n,\infty\right)$$

يمكن كتابة المتراجحتين السابقتين بالشكل الآتي:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\delta^n-\tau\right)\leq\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\omega(\tau)\qquad\qquad\forall\tau\geq0$$

$$\frac{1}{\alpha}\left(\tau-\frac{1}{2}\delta^n\right)\leq\omega(\tau)-\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)\qquad\qquad\forall\tau\geq0$$

ومنه يكون:

$$\omega(\tau)-\frac{1}{\alpha}\tau\leq\ \omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\frac{1}{2\alpha}\delta^n\qquad\qquad\forall\ \tau\geq0\qquad\qquad(2.6)$$

بالعودة إلى (2.5) والاستفادة من (2.6) نجد:

$$\left\|x_\alpha^\delta-x^*\right\|^2\leq\frac{\delta^n}{\alpha}(1+\gamma)+\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\frac{1}{2\alpha}\delta^n\leq\frac{1}{\alpha}\delta^n+\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)$$

$$\leq\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)+\delta^n\inf_{0\leq\tau\leq\frac{1}{2}\delta^n}\frac{\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\omega(\tau)}{\frac{1}{2}\delta^n-\tau}\leq\ \omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)+\ \delta^n\frac{\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)-\omega(0)}{\frac{1}{2}\delta^n-0}=2\omega\left(\frac{1}{2}\delta^n\right)$$

وبالتالي نحصل على العلاقة المطلوبة الآتية:

$$\left\|x_\alpha^\delta-x^*\right\|\leq\ \sqrt{2\ \omega(\frac{1}{2}\delta^n)\frac{2+\gamma}{\beta}\|x^*\|^2}$$

وهو المطلوب برهانه . ■

الاستنتاجات والتوصيات.

في هذا المقال قمنا بإثبات أن الحل المنظم يتقارب بقوة نحو حل ذو نظيم أصغري لمسألة سيئة التوضع في فضاءات هيلبرت وذلك باختيار وسيط النظامية α بشكل مناسب يحقق العلاقة (2.4) ويحقق الشرط المعياري المتغير المعطى بالمتراجحة (1.5).

ونوصي بما يلي:

- تعميم هذه النتائج إلى حالة المسائل السيئة التوضع المحكومة بمؤثر لاخطي.
- اختيار وسيط النظامية الذي يحقق شروط معيارية متغيرة مختلفة عن المتراجحة (1.5)، بحيث يتم الحصول على التقارب القوي.

المراجع:

[1]ALBANIA,V.; ELBAUA, P. ; HOOPB, M.;SCHERZERA, O. *Optimal Convergence Rates Results for Linear Inverse Problems in Hilbert Spaces*. numerical functional analysis and optimization, vol. 37, NO. 5,2016, 521–540.

[2] ANDREEV, R.; ELBAU, R.; HOOP,M.; QIU,L.; SCHERZER, O. *Generalized Convergence Rates Results for Linear Inverse Problems in Hilbert Spaces*. arXiv:1409.7610v1 [math.FA] 26 Sep 2014.

[3] BOT, R.; HOFMANN, B. *Conditional stability versus ill-posedness for operator equations with monotone operators in Hilbert space*. arXiv:1607.05737v1 [math.NA] 19 Jul 2016.

[4] ENGL, H.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. *Regularization of inverse problems*. Mathematics and its Applications Kluwer Academic Publishers Group., volume 375, 1996.

[5]GROETSCH, C. *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*. Pitman, Boston, 1984.

[6] HEIN,T.; HOFMANN, B. *Approximate source conditions for nonlinear illposed problems chances and limitations*. Inverse Problems, 25:, 2009, 305-320.

[7]HOFMANN, B.;KALTENBACHER, B.; SCHERZER, O. *A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators*. Inverse Probl., 23(3):, 2007, 987-1010.

[8]KONIG, C.; WEMER, F. HOHAGE, Th. *Convergence Rates for Exponentially Ill-Posed Inverse Problems with Impulsive Noise*, arXiv:1506.02126v2 [math.NA] 26 Nov 2015.

[9]MOROZOV, V. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1984.

[10] SCHERZER, O.;GRASMAIR, M.;GROSSAUER, H.; HALMEIER, M.; LENZEN,F. *Variational methods in imaging*, volume 167 of Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2009.

[11]SCHUSTER,T.;KALTENBACHER,B.;HOFMANN,B.;KAZIMIERSKI,K. *Regularization methods in Banach spaces*, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, Berlin, volume 10 , 2012.