مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (4) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (4) 2013

أسرة المنحنيات – k وتقريب دوالّ هولدر عليها

الدكتور محمد علي*

(تاريخ الإيداع 7 / 5 / 2013. قُبِل للنشر في 7 / 11 /2013)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث بعض خواص أسرة واسعة من المنحنيات والتي تسمى k– منحنيات، والتي تعرف من خلال : وجود علاقة بين أطوال الأقواس والأوتار التي تصل بين أية نقطتين منها بشكل خاص درسنا تأثير بعض التحويلات في منحنيات هذه الأسرة ومن ثم درسنا تقريب صف دوال هولدر الموزن المعرفة على أسرة المنحنيات –k

الكلمات المفتاحية : أسرة المنحنيات–k , صف توابع هولدر , تقريب الدوال

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (4) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (4) 2013

k-class of curves and approximation of Holder class of functions on it

D. Mohammad Ali*

(Received 7 / 5 / 2013. Accepted 7 / 11 /2013)

□ ABSTRACT □

We study in this research some properties of wide class of curves, called k-curves, which is defined by a relation existing between arches and chords connecting any two arbitrary points on it
Especially we study the effect of some mappes on the curves of this class.
Then we study the approximation of weighted Holder class of function on k-curves

Keywords: class curves –k, Holder class of functions, approximation of functions

* **Associate prof.,Department of mathematics , Faculty of sciences,Tishreen University,Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يندرج موضوع البحث الحالي ضمن مسائل نظرية تقريب الدوال العقدية , التي تشكل قسماً أساسياً من أقسام التحليل الدالي و نظرية الدوالّ، مع العلم أن أساسيات هذه النظرية تتألف من ثلاثة أمور و هي

1- صفّ الدوال الذي تنتمي إليه الدّالة التي نريد تقريبها .

2- الدالة التي يتم تقريب الدالة المعطاة إليها، وهي في أغلب الحالات كثيرة حدود، أو دالة كسرية

3- تقدير درجة التقريب، أو تقدير الفروق بين الدالة المقربة والدالة التي يتم التقريب إليها.

نشير في البداية إلى أن تقريب الدوال الحقيقية يتم على مجالات مغلقة من المحور الحقيقي أما تقريب الدوال العقدية فيتم على مجموعات من المستوي العقدي وهي تنقسم إلى ثلاث حالات

1- تقريب الدوال العقدية على مناطق في المستوي.

2- تقريب الدوال العقدية على منحنيات مغلقة.

3- تقريب الدوال العقدية على منحنيات مفتوحة (أقواس).

درسنا في هذه المقالة بعض خواص أسرة واسعة من المنحنيات وهي أسرة k- منحنيات , وبشكل خاص أثبتنا أن صورة أي منحنٍ من الأسرة – k وفق تحويل خطي أوالمقلوب أوجوكوفسكي هو منحنٍ ينتمي أيضا إلى الأسرة –k وبعد ذلك أدخلنا صف الدوال الذي سميناه صف دوال هولدر الموزن ورمزنا له بالرمز $H_v^\alpha(\Gamma)$ حيث أن Γ منحني ينتمي إلى الأسرة –k

من ثم قمنا بدراسة تقريب دوال هذا الصف إلى دوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لسلاسل فابير للدالة المقربة .

أهمية البحث وأهدافه:

تنبع أهمية هذا البحث من كونه يدرس بعض خواص أسرة واسعة من المنحنيات وصولا إلى تقريب صف شهير من الدوال المعرفة على منحنٍ من الأسرة السابقة , أما أهداف هذا البحث فهي

1-إثبات أن صورة المنحني Γ الذي ينتمي إلى الأسرة –k وفق تحويل خطي أو المقلوب أو جوكوفسكي هو منحنٍ C ينتمي إلى الأسرة – k أيضاً.

2- دراسة بعض خواص دوال الصف $H_v^\alpha(\Gamma)$ وبشكل خاص إثبات أن تركيب هذه الدوال مع التحويلات في البند 1 تشكل توابع من الصف $H_v^\alpha(C)$.

3-تقريب دوال الصف $H_v^\alpha(\Gamma)$ إلى دوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لسلاسل فابير.

طرائق البحث ومواده:

البحث يقع ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل الدالي ونظرية الدوال لذلك فإن الطرائق المتبعة فيه نظرية، وتعتمد بشكل أساسٍ على أدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية ونظرية التحويلات المحافظة.

تعاريف ومفاهيم أساسية :

تعريف 1 [1] :صف دوال هولدر: $H^{\alpha}(\Gamma)\ ;0<\alpha\le 1$

تعرف أسرة الدوال $H^{\alpha}(\Gamma)\ ;0<\alpha\le 1$ على أنها أسرة الدوال $f(z)$ التحليلية على المنحنيΓالمغلق و الذي يملك طولاً محدوداً (rectifiable) والتي تحقق:

$$\left|f(z_1)-f(z_2)\right|\le c\left|z_1-z_2\right|^{\alpha}\quad ,\ \forall z_1,z_2\in\Gamma$$

تعريف 2 : صف دوال هولدر الموزن $H_v^{\alpha}(\Gamma)$

نقول عن الدالة $f(z)$ إنها تنتمي إلى صف دوال هولدر الموزن $H_v^{\alpha}(\Gamma)$ إذا انتمت الدالة $f(z).v(z)$ إلى صف توابع هولدر $H^{\alpha}(\Gamma)\ ;0<\alpha\le 1$ أي :

$$f(z)\in H_v^{\alpha}(\Gamma)\Rightarrow f(z).v(z)\in H^{\alpha}(\Gamma)\ ;\ 0<\alpha\le 1$$

تعريف3 : اسرة المنحنيات – k :[2]

ينتمي المنحني Γ إلى أسرة المنحنيا ت –k إذا تحقق من أجل أي نقطتين $z_1,z_2\in\Gamma$ العلاقة :

$$\ell(z_1,z_2)\le c\left|z_1-z_2\right|$$

حيث إن $\ell(z_1,z_2)$ هو طول اطول الأقواس الذي يصل بين النقطتين $z_2\,,z_1$

بمعنى يكون المنحني منتمياً إلى الأسرة –k اذا وجد ثابت c، بحيث يصبح طول القوس بين النقطتين أصغر من طول الوتر بينهما مضروباً بالثابت c.

بكلمات أخرى يكون المنحني منتمياً إلى الأسرة – k إذا كان لطول الوتر وطول أطول القوسين بين أي نقطتين من المنحني الدرجة نفسها انظر **[3]**

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث [3]:

لتكن G منطقة وحيدة اتصال في المستوي العقدي z محيطها $\Gamma=\partial G$ نرمز بـ $G^{-}=ext\Gamma$

مع الافتراض دوما أن $\infty\in G^{-}$, $0\in G$,

كما نرمز $\gamma_0=\{w:|w|=1\}$ لدائرة الوحدة في المستوي w ويكون : $D=\operatorname{int}\gamma_0\ ,\ D^{-}=ext\gamma_0$

أي أن D هو قرص الوحدة المفتوح و D^{-} هو جزء المستوي الواقع خارج قرص الوحدة المغلق.

ليكن $w=\varphi(z)$ هو التابع الذي يحول G^{-} من المستوي z إلى D^{-}في المستوي w

بحيث يتحقق : $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\varphi(z)}{z}>0$, $\varphi(\infty)=\infty$ وليكن: $z=\psi(w)$ التابع العكسي لـ w

نستخدم المجاميع الجزئية لسلاسل فابير كأداة تقريبية إذ إنه اعتماداً على نظرية فابير نستطيع نشر اي تابع تحليلي على منطقة G في سلسلة تملك الشكل التالي[4] :

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k F_k(z)$$

حيث إن $F_k(z)$ هي كثيرات حدود فابير على المنطقة G و الأمثال c_k تتعين بالشكل :

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{f(\psi(w))}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{f\left(\psi\left(e^{it}\right)\right)}{e^{ikt}}dt$$

بفرض $E_n(f,G)$ التقريب الأفضل للدالة f على المنطقة G أي أن :

$$E_n(f) = \min_{p_n} \|f - p_n\|$$

النتائج والمناقشة

نناقش أثر بعض التحويلات على أسرة k− منحنيات

مبرهنة1 : ليكن المنحني C في المستوي W صورة المنحني Γ من المستوي Zوفق التحويل الخطي w=az+b

إذا كان المنحني Γ ينتمي إلى الأسرة k فإن C ينتمي أيضاً إلى أسرة المنحنيات K

البرهان: لتكن z_2 , z_1 نقطتين كيفيتين من المنحني Γ صورتيهما وفق التحويل الخطي w_2 , w_1 من المنحني C

بما ان Γ من الاسرة – k يكون :

$$\ell(z_1, z_2) \le c|z_1 - z_2| \tag{1}$$

وبما أن التحويل الخطي ينقل القوس الذي يصل بين z_2 , z_1 إلى القوس الذي يصل بين النقطتين w_2 , w_1 فإنه يوجد ثابت c_1 بحيث يتحقق:

$$\ell(w_1, w_2) \le c_1 \ell(z_1, z_2) \tag{2}$$

منه يكون:

$$\ell(w_1, w_2) \le c_1 \ell(z_1, z_2) \le c_1 c|z_1 - z_2| =$$

$$= c_1 c\left|\frac{w_1 - b}{a} - \frac{w_2 - b}{a}\right| = \frac{c_1 c}{|a|}|w_1 - w_2|$$

الامر الذي يعني انتماء المنحني C إلى الأسرة – K.

مبرهنة2 : ليكن Γ منحني من المستوي Z و C صورة المنحني Γ في المستوي W وفق التحويل المقلوب $w = \frac{1}{z}$. اذا كان المنحني Γ ينتمي إلى الأسرة k فإن C ينتمي أيضاً إلى أسرة المنحنياتK.

البرهان : لتكن z_2 , z_1 نقطتين كيفيتين من المنحني Γ صورتيهما وفق التحويل المقلوب w_2 , w_1 من المنحني C , أي أن:

$w_1 = \frac{1}{z_1}$ و $w_2 = \frac{1}{z_2}$ منه ومن كون المنحني Γ ينتمي إلى الأسرة – k تتحقق لدينا العلاقتان (1) و (2)

وبالتالي يكون:

$$\ell(w_1, w_2) \le c_1 \ell(z_1, z_2) \le c_1 c|z_1 - z_2| =$$

$$c_1 c\left|\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2}\right| == c_1 c\left|\frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2}\right| \le c_2|w_1 - w_2|$$

مبرهنة 3 : ليكن المنحني C في المستوي W صورة المنحني Γ من المستوي Zوفق تحويل جوكوفسكي العكسي .إذا كان المنحني Γ ينتمي إلى الأسرة k فأن C ينتمي أيضا إلى أسرة المنحنيات K .

البرهان: لتكن z_1 , z_2 نقطتين كيفيتين من المنحني Γ صورتيهما وفق تحويل جوكوفسكي العكسي w_1 , w_2 من المنحني C , أي أن:

$z_1 = w_1 + \frac{1}{w_1}$ و $z_2 = w_2 + \frac{1}{w_2}$ بذلك ومن كون المنحني Γ ينتمي إلى الأسرة – k تتحقق لدينا العلاقتان (1) و (2) وبالتالي يكون:

$$\ell(w_1, w_2) \le c_1 \ell(z_1, z_2) \le c_1 c \left| z_1 - z_2 \right| =$$

$$= c_1 c \left| w_1 + \frac{1}{w_1} - w_2 - \frac{1}{w_2} \right| ==$$

$$= c_1 c \left| w_1 - w_2 + \frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2} \right| =$$

$$= c_1 c \left| w_1 - w_2 \right| \left| 1 + \frac{1}{w_1 w_2} \right| \le$$

$$\le c_3 \left| w_1 - w_2 \right|$$

وهذا يعني أن المنحني C ينتمي إلى أسرة المنحنيات k.

مبرهنة 4: ليكن $w = \frac{1}{z}$ هو التحويل المقلوب للمستوي z في المستوي w عندئذ:

اذا كان $f(z) \in H^{\alpha}(\Gamma)$ فأن $f^*(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) \in H^{\alpha}(C)$ حيث إن C هو المنحني في المستوي w الذي يشكل صورة للمنحني Γ وفق التحويل المقلوب

البرهان: لتكن w_1 , w_2 نقطتين كيفيتين من المنحني C , توجد نقطتان z_1 , z_2 من المنحني Γ بحيث يكون $w_1 = \frac{1}{z_1}, w_2 = \frac{1}{z_2}$

بما أن $f(z) \in H^{\alpha}(\Gamma)$ يتحقق : $\left| f(z_1) - f(z_2) \right| \le c \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha} \;\; ; 0 < \alpha \le 1$

منه يكون :

$$\left| f^*(w_1) - f^*(w_2) \right| = \left| f\left(\frac{1}{w_1}\right) - f\left(\frac{1}{w_2}\right) \right| =$$

$$= \left| f(z_1) - f(z_2) \right| \le c \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha} =$$

$$= c \left| \frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2} \right|^{\alpha} = c \left| \frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2} \right|^{\alpha} \le$$

$$\le c_1 \left| w_1 - w_2 \right|^{\alpha}$$

نتيجة 1 : من تعريف الصف H_v^α ومن **المبرهنة 4** ينتج لدينا أنه إذا كان $f(z)\in H_v^\alpha(\Gamma)$ فأن

$$f^*(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)\in H_v^\alpha(C)$$

ملاحظة1: بالطريقة نفسها نلاحظ بأننا نستطيع إثبات المبرهنة 4 إذا استخدمنا التحويل الخطي أو تحويل جوكوفسكي بدلا من التحويل المقلوب .

من اجل الوصول الى النتيجة التالية نعرض نظرية بريفالف التي تنص على أنه إذا كانت الدالة f تنتمي الى صف هولدر على منحنٍ ينتمي إلى الأسرة k– فإن تكامل كوشي الشاذ $s_\Gamma f(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ يكون موجوداً على المنحنٍ Γ وعندها يعرف تكامل نوع كوشي دالتين $f^-\ ,\ f^+$ تحليليتين في $D^-\ ,\ D$ على الترتيب كما انهما مستمرتان على $\overline{D}\ ,\ \overline{D^-}$ (اغلاق $D\ ,\ D^-$) على الترتيب

ان هاتين الدالتين ترتبطان مع الدالة f ومع تكامل كوشي الشاذ من خلال علاقتي سوخوتسكي [3]بالشكل :

$$f^+(z)=\frac{1}{2}f(z)+\frac{1}{2}S_\Gamma f(z)$$

$$f^-(z)=-\frac{1}{2}f(z)+\frac{1}{2}S_\Gamma f(z)$$

منه يكون :

$$f(z)=f^+(z)-f^-(z) \qquad (3)$$

ملاحظة 2: نلاحظ أنه من أجل الوصول إلى تقريب الدالة f على المنحني Γ يكفي أن نقوم بتقريب الدالتين $f^-\ ,\ f^+$ على $D^-\ ,\ D$ (داخل قرص الوحدة وخارجه على الترتيب)

مبرهنة مساعدة [5]: اذا كان Γ منحنياً ينتمي إلى الأسرة – k بحيث إنه يشكل محيطاً للمنطقة D و كانت f دالة تحليلية في النطقة D ومستمرة على $\overline{D}$ فإنه يوجد ثابتان A و B بحيث يتحقق :

$$\left|f(z)-S_n(z)\right|\le\left(A\ln^2 n+B\right)E_n\left(f,\overline{D}\right)$$

حيث أن $S_n(z)$ هو المجموع الجزئي لسلسلة فابير للدالة f على $\overline{D}$ و $E_n\left(f,\overline{D}\right)$ هي قيمة أفضل تقريب للدالة f الى كثيرات حدود على $\overline{D}$.

مبرهنة 5 : اذا كان Γ منحنياً ينتمي إلى الأسرة – k بحيث إنه يشكل محيطاً للمنطقة D وكانت $f\in H_v^\alpha(\Gamma)$ دالة تنتمي إلى صف هولدر الموزن على المنحني المغلق Γ فإنه يوجد ثابتان A و B بحيث يتحقق :

$$\left|f(z)-\left(S_n(z)+S_n^*(z)\right)\right|\le\left(A\ln^2 n+B\right)\left[E_n\left(\frac{f^+}{v},\overline{D}\right)+E_n\left(\frac{f^-}{v},\overline{D^-}\right)\right]$$

البرهان: لدينا

$$f(z)\in H_v^\alpha(\Gamma)\Rightarrow F(z)=f(z).v(z)\in H^\alpha(\Gamma)$$

منه وبحسب نظرية بريفالف وعلاقات سوخوتسكي توجد دالتان $F^-(z),\ F^+(z)$ بحيث يكون :

$$F(z)=F^{+}(z)-F^{-}(z)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(z).v(z)=F^{+}(z)-F^{-}(z)$$
$$\Rightarrow f(z)=\frac{F^{+}(z)-F^{-}(z)}{.v(z)}=\frac{F^{+}(z)}{.v(z)}-\frac{F^{-}(z)}{.v(z)} \qquad (4)$$

منه ومن أجل تقريب الدالة $f(z)$ على المنحني Γ يكفي ان نقوم بتقريب الدالتين $\frac{F^{+}(z)}{.v(z)},\frac{F^{-}(z)}{.v(z)}$في خارج وداخل المنحني Γعلى الترتيب

نأخذ الدالة $\frac{F^{+}(z)}{.v(z)}$التحليلية في المنطقة D التي يشكل Γ محيطا لها كما أنها مستمرة على $\overline{D}$منه ومن المبرهنة المساعدة يوجد ثابتان A و B بحيث يتحقق :

$$\left|\frac{F^{+}(z)}{v(z)}-S_n(z)\right|\le (A_0\ln n+B_0)E_n\left(\frac{F^{+}(z)}{v(z)}\right) \qquad (5)$$

نأخذ الان الدالة $\frac{F^{-}(z)}{.v(z)}$ التحليلية في المنطقة الواقعة خارج المنحني Γ

باستخدام التحويل المقلوب يتحول خارج المنحني Γ الى منطقة تقع داخل المنحني Γ^{*}الذي يشكل صورة للمنحني Γ وفق التحويل المقلوب .

المنحني Γ^{*}ينتمي الى الاسرة – k وذلك اعتمادا على المبرهنة 2

كما أن الدالة $\frac{F^{-}(z)}{.v(z)}$سوف تتحول تحت تأثير التحويل المقلوب الى الدالة

$$\frac{F^{+^{*}}(\zeta)}{.v^{*}(\zeta)}=\frac{F^{+}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{v\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{F^{-}(z)}{v(z)} \qquad (6)$$

التي تحقق شروط المبرهنة المساعدة في المنطقة D^{*}التي يشكل المنحني Γ^{*}محيطا لها منه يوجد ثابتان B_1, A_1بحيث يتحقق :

$$\left|\frac{F^{+^{*}}(\zeta)}{v^{*}(\zeta)}-S_n^{*}(\zeta)\right|\le (A_1\ln n+B_1)E_n\left(\frac{F^{+^{*}}(\zeta)}{v^{*}(\zeta)}\right) \qquad (7)$$

حيث إن $S_n^{*}(\zeta)$ هي المجموع الجزئي لسلسلة فابير للدالة $\frac{F^{\overset{*}{+}}(\zeta)}{v^{*}(\zeta)}$في المنطقة D^{*}

وبما أن :

$$\frac{F^{+^{*}}(\zeta)}{v^{*}(\zeta)}=\frac{F^{-}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{v\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{F^{-}(z)}{v(z)} \qquad (8)$$

ولدينا : $S_n^{*}(\zeta)=S_n^{*}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=S_n^{*}(z)$

منه ومن العلاقتين (7) و (8) يكون :

$$\left|\frac{F^{-}(z)}{v(z)} - S_n^{*}(z)\right| \le \left(A_1 \ln n + B_1\right) E_n\left(\frac{F^{-}(z)}{v(z)}\right) \tag{9}$$

من العلاقات (5) و (9) و (4) ينتج أن :

$$\left|f(z) - \left(S_n(z) + S_n^{*}(z)\right)\right| \le \left(A \ln^2 n + B\right)\left[E_n\left(\frac{f^{+}}{v}, \overline{D}\right) + E_n\left(\frac{f^{-}}{v}, \overline{D^{-}}\right)\right]$$

الاستنتاجات والتوصيات :

قمنا في هذا البحث بدراسة بعض خواص الأسرة – k ومن ثم درسنا تقريب دوال صف هولدر الموزن عليها

نوصي بإعادة نفس الدراسة على أسر أخرى من المنحنيات مثل أسرة منحنيات كارلسون وأسرة المنحنيات النظامية كما نوصي بتقريب صفوف تابعية اخرى على هذه المنحنيات مثل صف ليبغ للدوال.

المراجع :

[1]- Bruj.Best Approximation and saturation on domains of bounded rotation. Journal of Approximation theory ,100,1999,157-182

[2]-Andrievskii,V,V.Weighted polynomial inequalities with doubling weighted on quasismoth arc. Acta mathematica Hungarica . vol 135.no 1-2.2012. 8-23

[3]-Mamedkhanov,M,J . Dadashova ,I,B.Rational Approximation on closed curves. Applied Mathematics 2(3),2012, 90-93.

[4]-Israfilov ,D,M. Tozman,N,P. Approximation in Morry- Smirnov class.
Azerbaijan journal of mathematics . v1. No1, 2011,pp99-111.

[5]-Gaier ,D . Lectures on complex Approximation.Birkhaser Verlag.1980.196.