مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (2) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (2) 2014

فضاء الطاقة لمؤثر هرميت في $\mathbb{R}^n$
وفضاءات سوبوليف موافقة

الدكتور إبراهيم إبراهيم*
الدكتور طالب غريبة**
آصف المحمد***

(تاريخ الإيداع 25 / 9 / 2013. قُبِل للنشر في 25 / 3 /2014)

□ ملخّص □

ندرس في هذا البحث فضاء الطاقة الموافق لمؤثر هرميت التفاضلي $H = -\Delta + |x|^2$ ، ونبين أنه فضاء هيلبرت مع جداء داخلي مناسب، وهو فضاء جزئي من الفضاء $L_2(\mathbb{R}^n)$.

ثم ندرس قوى هذا المؤثر ، حيث نشكل H^s بالاعتماد على النظرية الطيفية ، ونبين أن المؤثر H^s له خواص مشابهة للمؤثر H من أجل عدد حقيقي موجب s.

لذلك يمكن تشكيل فضاءات هيلبرت جديدة $W_{2,H}^s(\mathbb{R}^n)$ ،هي بنفس الوقت فضاءات الطاقة لقوى المؤثر H ، وهي من نمط فضاءات سوبوليف. ويمكن التعميم إلى الفضاءات $W_{p,H}^s(\mathbb{R}^n)$ من أجل $1 \le p < \infty$.

الكلمات المفتاحية : مؤثر هرميت ، فضاءات سوبوليف ، معادلة شرودينجر .

* أستاذ – التحليل الرياضي– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث– سورية.
** أستاذ –التبولوجيا والهندسة التفاضلية– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث– سورية.
*** طالب دراسات عليا (دكتوراه)–التحليل الرياضي – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (2) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (2) 2014

The Energy Space of Hermite Operator in $\mathbb{R}^n$ and Associated Sobolev Spaces

Dr. Ibrahim Ibrahim*
Dr. Taleb Ghareeba**
Assef Almuhammad***

(Received 25 / 9 / 2013. Accepted 25 / 3 /2014)

□ ABSTRACT □

In this paper we study the energy space of the Hermite differential operator $H = -\Delta + |x|^2$ and prove that it is a Hilbert space with a suitable inner product. Then we construct the powers of H , denoted by H^s, by using the spectral theory . We will see that H^s has similar properties as H for real numbers s > o, therefore we can construct new Hilbert spaces $W^s_{2,H}(\mathbb{R}^n)$ which are the energy spaces of powers ofH. They are Sobolev spaces.

We can also generalize those spaces to $W^s_{p,H}(\mathbb{R}^n)$ for $1 \leq p < \infty$.

Keywords: Hermite operator, Sobolev Spaces, Schrödinger Equation.

*Professor- Mathematical Analysis– Dept. of Mathematics-Faculty of Sciences –Al Baath University, Syria.
**Professor –Topology&Differential Geometry – Dept. of Mathematics - Faculty of Sciences- Al Baath University, Syria.
*** Postgraduate Student, Dept. of Mathematics –Mathematical Analysis- Faculty of Sciences – Al Baath University, Syria.

مقدمة :

عند البحث في حل معادلة شرودينجر (الكلاسيكية) :

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u \quad ; u = u(x,t) \ , \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \quad (1-1) \\ u(x,0) = f_0(x) \end{cases}$$

فإن فضاءات سوبوليف (الكلاسيكية) $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ تلعب دوراً هاماً في هذه الدراسة ، وقد عرفت هذه الفضاءات بالشكل الآتي :

$$W_2^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) \ : \ (I-\Delta)^{s/2} f \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

انظر مثلاً : [6] , [3] , [2] , [1]. هنا Δ يرمز لمؤثر لابلاس في $\mathbb{R}^n$.

بشكل مشابه يمكن البحث في حل معادلة شرودينجر – هرميت :

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = Hu \quad ; u = u(x,t) \ , \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (1-2) \\ u(x,0) = f_0(x) \end{cases}$$

ويلزم لذلك فضاءات موافقة من نمط سوبوليفسنرمز لها بـ $w_{2,H}^s(\mathbb{R}^n)$ ونسميها فضاءات سوبوليف – هرميت ، وسوف نعرفها بالشكل الآتي :

$$W_{2,H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) \ : \ H^s f \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\} \quad (1-3)$$

علماً أن هكذا فضاءات درست في أعمال عديدة مثل [1] وشكلت بطرق مختلفة .

والغاية منها قياس نظامية المؤثر e^{itH} (الذي يمكن حسابه بالاعتماد على النظرية الطيفية) .

أما في [2] فتم تعريفها بالشكل :

$$W_{2,H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_2\left(\mathbb{R}^n\right) : \ H^{s/2} f \in L_2\left(\mathbb{R}^n\right) \right\} \quad (1-4)$$

أما في [3] فتم تعريفها بالشكل :

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) \ : \ H^{-s/2} f \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\} \quad (1-5)$$

ولكن في [6] كان التعريف أكثر عمومية ولم يقتصر على $p = 2$ ، بل تم التعريف من أجل $1 < p < \infty$ و s عدد طبيعي $s = k$. ويتلخص ذلك كما يأتي :

تعرّف المؤثرات A_j و A_{-j} بالشكل الآتي :

$$A_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \quad , \quad A_{-j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n. \quad (1-6)$$

عندئذ يمكن كتابة مؤثر هرميت $H = -\Delta + |x|^2$ بالشكل :

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}[A_j A_{-j} + A_{-j}A_j] \quad (1-7)$$

الآن ليكن k عدداً طبيعياً، وليكن $1 < p < \infty$. عندئذ فضاء سوبوليف –هرميت من الدرجة k يعرّف بالشّكل:

$$W_{p,H}^k\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{ f \in L_p\left(\mathbb{R}^n\right) : A_{j_1}A_{j_2}\dots A_{j_m} f \in L_p\left(\mathbb{R}^n\right) \right\} \quad (1-8)$$

$$;1 \le |j_1|, \dots, |j_m| \le n \ , \ 1 \le m \le k$$

وقد تم إثبات أن $W_{p,H}^{k}(\mathbb{R}^n)$ فضاء باناخ مع النظيم :

$$\|f\|_{W_{p,H}^{k}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\substack{1\le|j_1|,\dots,|j_m|\le n,\\ 1\le m\le k}} \left\|A_{j_1}\dots A_{j_m}f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad (1-9)$$

كما أن كل من المجموعة $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، ومجموعة كل التراكيب الخطية المنتهية لتوابع هرميت والتي نرمز لها $\mathcal{F}$ ، كثيفة في $W_{p,H}^{k}(\mathbb{R}^n)$. انظر في [6 , proposition 1] .

فيما يلي سنشكل فضاءات سوبوليف – هرميت ، و سنرمز لها بـ $W_{p,H}^{s}(\mathbb{R}^n)$ ، حيث s عدد حقيقي و $1 \le p < \infty$ ونقارنهامع فضاء الطاقة للمؤثر H وقواه .

أهمية البحث وأهدافه :

تكمن أهمية البحث في كونه يعتمد على مؤثر هرميت وفضاء الطاقة الموافق له وهما مهمان جداً في بعض التطبيقات الفيزيائية، بل إنه يشغل حيزاً لا بأس به في الفيزياء الرياضية التي تدرس المعادلة الموجية ومعادلة شرودينجر ومعادلة انتشار الحرارة وهذه المعادلات بشكلها الكلاسيكي يدخل فيها مؤثر لابلاس :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$$

بينما عند دراستنا لمؤثر هرميت $H = -\Delta + |x|^2$ فيوجد مؤثر لابلاس بالإضافة لتابع كمون:

$$V = |x|^2$$

ويهدف البحث إلى دراسة فضاء الطاقة الموافق لمؤثر هرميت ، وذلك بالاعتماد على الخواص الطيفية للمؤثر ومقارنته مع الدراسة السابقة .

طرائق البحث ومواده :

سنعتمد في بحثنا بشكل أساسي على الخواص الطيفية لمؤثر هرميت H ، وعلى النشر بتوابع هرميت في $\mathbb{R}^n$ (التي تشكل توابع خاصة للمؤثر H) ،ويتم استخدام ذلك في عدة فضاءات توابع مثل :

$S(\mathbb{R}^n)$ ، $S'(\mathbb{R}^n)$ ، $L_p(\mathbb{R}^n)$.

ويكون الانطلاق من فضاء هيلبرت المعروف $L_2(\mathbb{R}^n)$ ليتم تعميمه إلى الفضاءات الأخرى المذكورة ، مستفيدين من مراجع وأعمال سابقة في هذا المجال .

النتائج والمناقشة :

نأمل أن تكون النتائج التي حصلنا عليها ، والتي تملك قيمة تطبيقية في الفيزياء الرياضية ، قد قدمت إضافة جديدة ، وفما يأتي عرض لهذه النتائج .

2–<u>فضاء الطاقة لمؤثرهرميت</u> :

في البداية نذكر بعض المعلومات عن مؤثر هرميت وتوابع هرميت في $\mathbb{R}^n$ ، وهي موجودة في [7] , [4] .

تعطى كثيرات حدود هرميت في $\mathbb{R}^1$ من الدرجة k بالشكل :

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-t^2}) \;\; ; k = 0,1,2,\dots , t \in \mathbb{R} \qquad (2-1)$$

كما تعطى توابع هرميت (المنظمة المتعامدة) في $\mathbb{R}^1$ بالشكل :

$$h_k(t) = \left(2^k k!\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} e^{-t^2/2} H_k(t)\ ;\ k = 0,1,2,\dots, t \in \mathbb{R} \qquad (2-2)$$

أمّا في $\mathbb{R}^n$ فتعرف توابع هرميت (المنظمة المتعامدة) من أجل دليل متعدد $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ بالشكل :

$$h_\alpha(x) = h_{\alpha_1}(x_1).h_{\alpha_2}(x_2)\dots h_{\alpha_n}(x_n) \quad ;\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad (2-3)$$

نضع الآن : $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

معلوم أن الجداء الداخلي والنظيم في فضاء هيلبرت $L_2(\mathbb{R}^n)$ لهما الشكل :

$$< f , g >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

حيث يكون التكامل بمفهوم لوبيغ .

والآن يمكن إيجاز خواص مؤثر هرميت في المبرهنة الآتية :

__مبرهنة (2-1)__: [8] , [7] , [4].

لمؤثر هرميت $H = -\Delta + |x|^2$ الخواص الآتية :

(1) مترافق ذاتياً في فضاء هيلبرت $L_2(\mathbb{R}^n)$.

(2) يتألف طيفه من القيم الخاصة $\{\lambda_\alpha = 2|\alpha| + n\}_\alpha$ الموافقة للتوابع الخاصة $\{h_\alpha(x)\}_\alpha$ أي أن :

$$H h_\alpha(x) = (2|\alpha| + n) h_\alpha(x) \qquad \text{(من أجل أي دليل متعدد } \alpha)$$

(3) موجب محدّد، ويحقق:

$$\langle Hf, f\rangle \geq n\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad ;\quad f \in D(H) \qquad (2-4)$$

حيث إن:

$$D(H) = \left\{f \in L_2(\mathbb{R}^n) :\ \sum_\alpha \lambda_\alpha^2 |\langle f, h_\alpha\rangle|^2 < \infty\right\}$$

كما أن :

$$Hf(x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \langle f, h_\alpha\rangle h_\alpha(x) \quad ,\quad f \in D(H) \qquad (2-5)$$

__ملاحظة (2-2)__:

إضافة لما تقدم نذكر أن H هو غلاقة المؤثر :

$$\overset{\circ}{H} :\ C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \to L_2(\mathbb{R}^n)$$

حيث إن :

$$\overset{\circ}{H} f(x) = (-\Delta + |x|^2) f(x) \qquad ;\quad f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \qquad (2-6)$$

وهنا يكون من أجل $f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$:

$$\langle \overset{\circ}{H} f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta + |x|^2)\,|f(x)|^2 dx$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|^2 + \left|x_j f(x)\right|^2\right) dx$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \left\|x_j f\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right) \qquad (2-7)$$

مبرهنة (2-3):

$D(H)$ فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي :

$$\langle f,g\rangle_H=\langle Hf,Hg\rangle \qquad ;\ f,g\in D(H) \qquad (2-8)$$

الإثبات :واضح أن $D(H)$ فضاء خطي (جزئي في $L_2(\mathbb{R}^n)$). وبما أن :

$$\langle f,g\rangle_H=\langle Hf,Hg\rangle=\sum_\alpha \lambda_\alpha^2\langle f,h_\alpha\rangle\overline{\langle g,h_\alpha\rangle} \qquad ;\ f,g\in D(H)$$

فنجد بحسابات عادية أن $D(H)$ فضاء جداء داخلي وبالتالي فهو فضاء منظم مع النظيم :

$$\|f\|_H=\sqrt{\langle f,f\rangle_H}=\left(\sum_\alpha \lambda_\alpha^2|\langle f,h_\alpha\rangle|^2\right)^{1/2} \qquad ;\ f\in D(H)$$
$$=\|\{\lambda_\alpha\langle f,h_\alpha\rangle\}_\alpha\|_{\ell_2}$$

من هذا ومن تمام فضاء المتتاليات ℓ_2 ينتج مباشرة أن $D(H)$ فضاء تام وبالتالي فهو فضاء هيلبرت.

ملاحظة (2-4):

بحسب ما تقدم نجد :

$$\|f\|_H=\|Hf\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad ;\qquad f\in D(H)(2-9)$$

وكذلك :

$$\langle Hf,f\rangle=\sum_\alpha \lambda_\alpha|\langle f,h_\alpha\rangle|^2 \qquad ;\qquad f\in D(H) \qquad (2-10)$$

وبما أن المؤثر H موجب محدّد فله جذر تربيعي موجب ، سنرمز له بـ $H^{1/2}$ ،لذلك يمكن أن نكتب :

$$\left\|H^{1/2}f\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2=\langle H^{1/2}f,H^{1/2}f\rangle=\langle Hf,f\rangle=\sum_\alpha \lambda_\alpha|\langle f,h_\alpha\rangle|^2 \qquad (2-11)$$

– يمكننا الآن تعريف فضاء الطاقة للمؤثر H واستنتاج خواصه .

تعريف (2-5):

فضاء الطاقة للمؤثر H هو :

$$E_H=\left\{f\in L_2(\mathbb{R}^n):\ \langle Hf,f\rangle<\infty\right\}$$

و النظيم فيه له الشكل :

$$\|f\|_{E_H}=\sqrt{\langle Hf,f\rangle} \qquad ;\qquad f\in E_H \qquad (2-12)$$

ملاحظة (2-6):

من الواضح أن العلاقات (2-7) ، (2-10) محققة من أجل أي $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. وينتج من ذلك أن الفضاء E_H يحوي المجموعة $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ومن المتراجحات المحققة وضوحاً :

$$\sum_\alpha|\langle f,h_\alpha\rangle|^2\le\sum_\alpha \lambda_\alpha|\langle f,h_\alpha\rangle|^2\le\sum_\alpha \lambda_\alpha^2|\langle f,h_\alpha\rangle|^2$$

ينتج أن :

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2\le\|f\|_{E_H}^2\le\|f\|_H^2 \qquad ;\ f\in D(H) \qquad (2-13)$$

وبالتالي تكون الطمور المستمرة التالية صحيحة :

$$D(H)\hookrightarrow E_H\hookrightarrow L_2(\mathbb{R}^n) \qquad (2-14)$$

وبما أن $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ كثيفة في كل من $L_2(\mathbb{R}^n)$ و$D(H)$ فتكون كذلك كثيفة في الفضاءE_H.

وبالتالي نجد النتيجة الآتية:

نتيجة (2-7):

الفضاء E_H هو إتمام المجموعة $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ بالنظيم $\|f\|_{E_H}=\sqrt{\langle Hf,f\rangle}$.

يكون أيضاً:

$$\|f\|_{E_H} = \|H^{1/2}f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \& E_H = D(H^{1/2}) \qquad (2-15)$$

مبرهنة (2-8):

E_H فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي :

$$\langle f, g\rangle_{E_H} = \langle Hf, g\rangle \qquad ; f, g \in E_H \qquad (2-16)$$

والمجموعة $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ كثيفة فيه. إضافة لذلك فإن الجملة $\{\lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha(x)\}_\alpha$ تشكل قاعدة منظمة متعامدة فيه.

الإثبات : وجدنا في الملاحظة (2-6) أن $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ كثيفة في E_H .

بشكل مشابه تماماً لإثبات المبرهنة (2-3) يمكن إثبات أن E_Hفضاء هيلبرت (يكفي استبدال λ_α بـ $\lambda_\alpha^{1/2}$).

والآن نثبت أن $\{\lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha(x)\}_\alpha$ تشكل جملة متعامدة منظمة وتامة في الفضاء E_H.

في الواقع بما أن الجملة $\{h_\alpha(x)\}_\alpha$ منظمة متعامدة في $L_2(\mathbb{R}^n)$فيكون لدينا من أجل أي دليلين متعددين α، β :

$$\langle\lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha, \lambda_\beta^{-1/2}h_\beta\rangle_{E_H} = \langle\lambda_\alpha^{1/2}h_\alpha, \lambda_\alpha^{-1/2}h_\beta\rangle = \langle h_\alpha, h_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$$

ليكن الآن $f \in E_H$. عندئذ نجد ما يلي (مع الأخذ بعين الاعتبار أن H مترافق ذاتياً) :

$$\langle f, \lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha\rangle_{E_H} = \langle Hf, \lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha\rangle = \lambda_\alpha^{1/2}\langle f, h_\alpha\rangle$$

وبما أن $\lambda_\alpha > 0$ فينتج أن :

$$\langle f, \lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha\rangle_{E_H} = 0 \quad ; \forall\alpha \Leftrightarrow \langle f, h_\alpha\rangle = 0 \quad ; \forall\alpha$$

وبما أن الجملة $\{h_\alpha(x)\}_\alpha$ تامة في $L_2(\mathbb{R}^n)$ فينتج أن الجملة $\{\lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha(x)\}_\alpha$تامة في E_H .

وبذلك يتم المطلوب.

نتيجة (2-9):

كل عنصر $f \in E_H$ يمكن نشره بسلسلة فورييه وفق الجملة $\{\lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha(x)\}_\alpha$ومتقاربة من f في E_H كما يلي :

$$\begin{aligned} f &= \sum_\alpha\langle f, \lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha\rangle_{E_H}\lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha \\ &= \sum_\alpha\langle Hf, \lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha\rangle\lambda_\alpha^{-1/2}h_\alpha \\ &= \sum_\alpha\langle f, h_\alpha\rangle h_\alpha \qquad (2-17) \end{aligned}$$

وهذا يعني أيضاً أن لكل $f \in E_H$ نفس السلسلة في كل من E_H و $L_2(\mathbb{R}^n)$.

3- قوى المؤثر H :

سنعتمد على النظرية الطيفية لحساب القوى H^sللمؤثر H ، حيث s عدد حقيقي . وسوف نبين أنه من أجل $s > 0$ يكون للمؤثر H^s نفس خواص المؤثر H . وبالتالي يمكن حساب الجذر التربيعي $H^{s/2}$ وهو ما يساعد في مقارنة $D(H^s)$ مع فضاءات سوبوليف المذكورة في مقدمة البحث ومع فضاءات الطاقة الموافقة .

تعريف (3-1) :

من أجل أي عدد حقيقي s نضع :

$$D(H^s) = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) : H^sf \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$H^s f = \sum_\alpha \lambda_\alpha^s \langle f \ , h_\alpha \rangle h_\alpha \qquad ; \qquad f \in D(H^s)$$

(لاحظ أنه عندما $s = 1$ نحصل على H ، وعندما $s = 1/2$ نحصل على $H^{1/2}$) .

<u>ملاحظة (3−2) :</u>

من التعريف السابق نجد مباشرةً :

$$f \in D(H^s) \Leftrightarrow \sum_\alpha \lambda_\alpha^{2s} |\langle f \ , h_\alpha \rangle|^2 < \infty$$

<u>مبرهنة (3−3)</u> :

للمؤثر H^s الخواص التالية :

(1) من أجل $s \leq 0$ يكون H^s محدوداً ومن أجل $s > 0$ يكون موجباً محدّداً .

(2) مترافق ذاتياً وذو طيف نقطي بحت من أجل $s > 0$ (أي أن طيفه يتألف فقط من القيم الخاصة λ_α^s).

(3) $D(H^s)$ فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي :

$$\langle f, g \rangle_s = \langle H^s f, H^s f \rangle + \langle f, g \rangle \quad ; \quad f, g \in D(H^s) \qquad (3-1)$$

<u>الإثبات</u> : (1) ليكن $s \leq 0$ وليكن $f \in D(H^s)$. عندئذ نجد :

$$\|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_\alpha \lambda_\alpha^{2s} |\langle f \ , h_\alpha \rangle|^2 \leq \sum_\alpha |\langle f \ , h_\alpha \rangle|^2 = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2$$

ومنه ينتج أن H^s مؤثر محدود كما أن $\|H^s\| \leq 1$ من أجل $s \leq 0$.

الآن ليكن $s > 0$ وليكن $f \in D(H^s)$. عندئذ نجد :

$$\|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_\alpha \lambda_\alpha^{2s} |\langle f \ , h_\alpha \rangle|^2 \geq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \qquad (3-2)$$

وبالتالي H^s مؤثر غير محدود من أجل $s > 0$ ، ويكون :

$$\langle H^s f, f \rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha^s |\langle f \ , h_\alpha \rangle|^2 \geq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad ; f \in D(H^s) \qquad (3-3)$$

وهذا يعني أن المؤثر H^s موجب محدّد . إضافة لذلك لدينا ما يلي :

بما أن $\lambda_\alpha = 2|\alpha| + n \geq n$ فينتج من العلاقة (3−3) :

$$\langle H^s f, f \rangle \geq n^s \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \qquad ; \ f \in D(H^s) \qquad (3-4)$$

(قارن مع العلاقة (2−4)) .

(2) يكون المؤثر H^s مترافقاً ذاتياً إذا كان : $H^s = (H^s)^*$. لذا يتوجب علينا حساب المرافق $(H^s)^*$.

من العلاقة :

$$\langle H^s f, g \rangle = \langle f, (H^s)^* g \rangle \qquad ; \ f \in D(H^s) , \quad g \in D((H^s)^*)$$

وهذا يعني :

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^s \langle f \ , h_\alpha \rangle \overline{\langle g \ , h_\alpha \rangle} = \sum_\alpha \langle f \ , h_\alpha \rangle \overline{\langle (H^s)^* g \ , h_\alpha \rangle}$$

وبما أن λ_α^s عدد حقيقي والمؤثر H^s تناظري (ينتج ذلك من كون $\langle H^s f, f \rangle$ عدد حقيقي حسب (3−1) و $D(H^s)$ كثيفة في $L_2(\mathbb{R}^n)$ لأنها تحوي المجموعة $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$). فيكون لدينا :

$$\sum_\alpha \langle f \ , h_\alpha \rangle \overline{\langle H^s g \ , h_\alpha \rangle} = \sum_\alpha \langle f \ , h_\alpha \rangle \overline{\langle (H^s)^* g \ , h_\alpha \rangle}$$

ومنه ينتج أن :

$$\langle H^s g \ , h_\alpha \rangle = \langle (H^s)^* g \ , h_\alpha \rangle \qquad ; \ \forall \alpha$$

وبالتالي فإن $g \in D((H^s)^*)$ إذا وفقط إذا كان $g \in D(H^s)$.

أي أن : $D((H^s)^*) = D(H^s)$. كما أن :

$$(H^s)^*g = H^s g \qquad ; \quad g \in D(H^s)$$

(المساواة في الفضاء $L_2(\mathbb{R}^n)$) . بذلك يكون H^s مؤثراً مترافقاً ذاتياً .

لإثبات أن المؤثر H^s ذو طيف نقطي بحت يكفي إثبات أن المؤثر:

$$H^{-s} = (H^s)^{-1}: E_{H^s} \to L_2(\mathbb{R}^n)$$

متراص وذلك بحسب اختبار Rellich ، انظر .[7 , Theorem 4.5.1]

حيث هنا E_{H^s} فضاء الطاقة الموافق للمؤثر H^s وله الشكل التالي (انظر تعريف (2−5)) :

$$E_{H^s} = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) : \langle H^s f \ , f \rangle < \infty \right\}$$
$$= \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) : \textstyle\sum_\alpha \lambda_\alpha^s \, |\langle f \ , h_\alpha \rangle|^2 < \infty \right\}$$
$$= \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) : H^{S/2} f \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\} = D(H^{S/2})$$

لنأخذ الآن متتالية المؤثرات $\left\{ H_N^{-s}: H^s \to L_2(\mathbb{R}^n) \right\}$ المعرفة بالشكل :

$$H_N^{-s} f = \textstyle\sum_{|\alpha| \le N} \lambda_\alpha^{-s} \langle f \ , h_\alpha \rangle \, h_\alpha$$

فنجد أن كل H_N مؤثر متراص لأن مجموعة قيمه تقع في فضاء جزئي منته الأبعاد . وبما أن :

$$\|H^{-s} - H_N^{-s}\| = sup_{\|f\|=1} \|H^{-s} f - H_N^{-s} f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$
$$= sup_{\|f\|=1} \textstyle\sum_{|\alpha| \ge N+1} \lambda_\alpha^{-s} \, |\langle f \ , h_\alpha \rangle|^2 \le \lambda_{2(N+1)}^{-s} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

من ذلك ينتج أن المؤثر H^{-s} متراص وبالتالي H^s مؤثر بطيف نقطي بحت .

(3) بحسابات عادية نجد أن العلاقة (3−1) تعرف جداءً داخلياً في $D(H^s)$ ويكون :

$$\|f\|_s^2 = \|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \qquad ; \quad f \in D(H^s) \qquad (3-5)$$

ونثبت أن $D(H^s)$ تام بشكل مشابه لما فعلناه في المبرهنة (2−3) .

ملاحظة (3−4):

ليكن $s > 0$. عندئذ من العلاقات (3−1) ، (3−2) و (3−5) ينتج أن :

$$\|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \le \|f\|_s^2 = \|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \le 2\|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2$$

وبالتالي فإن النظيمين $\|f\|_s$ ، $\|H^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ متكافئين في الفضاء $E_{H^{2s}} = D(H^s)$.

4− فضاءات سوبوليف − هرميت:

إن أغلب ما تحدثنا عنه سابقاً حول فضاءات سوبوليف كان بمفهوم فضاء هيلبرت $L_2(\mathbb{R}^n)$. والآن نريد التعميم إلى حالة فضاء باناخ $L_p(\mathbb{R}^n)$ ويتم ذلك بشكل مختلف عما هو مذكور في [6] ، حيث شكلت فضاءات سوبوليف− هرميت من مراتب صحيحة . نشير هنا أنه في [7] توجد دراسة مفصلة عن فضاءات سوبوليف الكلاسيكية من مراتب صحيحة وكذلك تفصيلات عن مؤثر هرميت في $\mathbb{R}^1$ وخواصه .

تعريف (4−1):

ليكن s عدداً حقيقياً وليكن $p \in [1, \infty)$. عندئذ نضع :

$$W_{p,H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^n) : H^s f \in L_p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

هنا $H^s f$ كما هو وارد في التعريف (3−1) .

(لاحظ أنه عندما يكون p = 2 نعود للدراسة السابقة ، كما أن $W_{p,H}^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$).

ملاحظة (2-4):

لإثبات أن $W^s_{p,H}(\mathbb{R}^n)$ فضاء باناخ يلزمنا بعض المعلومات الإضافية حول النشر بتوابع هرميت. وهنا سنأخذ طريقة ريس (Riesz means) المعرفة في[4,chapter 3] من أجل ذلك نعرف المساقط p_k بالشكل :

$$p_k f = \sum_{|\alpha|=k} \langle f \ , h_\alpha \rangle \, h_\alpha \qquad (4-1)$$

ثم نعرف طريقة ريس للتجميع بالشكل :

$$S^\sigma_R f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2k+n}{R}\right)_+^\sigma p_k f \qquad (4-2)$$

عندئذ تتحقق المحدودية المنتظمة التالية من أجل $\sigma > 0$:

$$\|S^\sigma_R f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \qquad (4-3)$$

إذا وفقط إذا كان : $\frac{2n}{n+1+2\sigma} < p < \frac{2n}{n-1-2\sigma}$ ، [4 , p. 68] .

لدينا أيضا المبرهنة التاليةً :

مبرهنة (3-4):[4, theorem 3.3.2]

ليكن $1 \le p \le \infty$ و $\sigma > \frac{n-1}{2}$. عندئذ تتحقق المحدودية المنتظمة :

$$\|S^\sigma_R f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \qquad ; \ f \in L_p(\mathbb{R}^n) \qquad (4-4)$$

إضافة لذلك : فإنه من أجل $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ، $1 \le p < \infty$ يصح التقارب التالي (بالنظيم) :

$$lim_{R\to\infty} S^\sigma_R f = f \qquad (4-5)$$

تعريف(4-4):

نعرف مجموعة التراكيب الخطية المنتهية لتوابع هرميتبالشكل :

$$\prod\nolimits_H^N = \{\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha h_\alpha \quad : \quad a_\alpha \in \mathbb{C}\} \qquad ; N = 0,1,2, \ldots$$

$$\prod\nolimits_H = \cup_{N=0}^{\infty} \prod\nolimits_H^N$$

– يمكننا الآن إثبات المبرهنة الرئيسية في هذا العمل .

مبرهنة (5-4):

$w^s_{p,H}(\mathbb{R}^n)$ فضاء باناخ مع النظيم :

$$\|f\|_{W^s_{p,H}(\mathbb{R}^n)} = \|H^s f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \qquad (4-6)$$

وكل من المجموعتين $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ و $\prod_H$ كثيفة فيه .

الإثبات : في البداية نلاحظ أنه من أجل $f \in w^s_{p,H}\left(\mathbb{R}^n\right)$ يكون $H^s f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ، كما أن:

$$S^\sigma_R(H^s f) = H^s(S^\sigma_R f) \in \prod\nolimits_H^N$$

وبحسب (5-4) ينتج أن $\prod_H$ كثيفة في $W^s_{p,H}(\mathbb{R}^n)$.

بما أن $H^s f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ من أجل $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ينتج من (5-4) أيضاً أن $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ كثيفة .

الآن لتكن $\{f_N\}$ متتالية كوشي في $W^s_{p,H}(\mathbb{R}^n)$. عندئذ تكون كل من $\{f_N\}$ و $\{H^s f_N\}$ متتالية كوشي في $L_p(\mathbb{R}^n)$.

وبما أن $L_p(\mathbb{R}^n)$ تام فتكون كل من هاتين المتتاليتين متقاربة في $L_p(\mathbb{R}^n)$.

بحسب العلاقة (5-4) نجد ما يلي (هنا التقارب يتم بمفهوم التوزيعات $S'(\mathbb{R}^n)$ باعتبار $L_p(\mathbb{R}^n)$ فضاء جزئي من $S'(\mathbb{R}^n)$) :

$$H^s f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} H^s f \qquad (\text{التقارب في } S'(\mathbb{R}^n))$$

وبالتالي بحسب(5−4)يكون :

$$S_R^{\sigma}(H^s f) \xrightarrow[N\to\infty]{} H^s f \quad (\text{التقارب في } S'(\mathbb{R}^n))$$

وبحسب المحدودية المنتظمة (4−4) نجد أن : $\|S_R^{\sigma}(H^s f_N)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ محدودة بانتظام .

وبحسب خاصة فاتو (Fatou's property) للفضاءات $L_p(\mathbb{R}^n)$. ينتج أن :

$H^s f \in L_p(\mathbb{R}^n)$، وبالتالي $f \in W_{p,H}^s(\mathbb{R}^n)$. وهذا بدوره يعني أن الفضاء$W_{p,H}^s(\mathbb{R}^n)$ تام .

ملاحظة (6−4) :

الفضاءات المدروسة آنفاً تفيدنا في دراسة معادلة شرودينجر – هرميت (2−1) في الفضاءات $L_p(\mathbb{R}^n)$ من أجل مجال أوسع من $p = 2$ ، وسوف يكون ذلك في أعمال لاحقة لهذا العمل .

الاستنتاجات والتوصيات :

بعد الحصول على النتائج المذكورة سابقاً يمكن ، وبالتعاون مع بعض الأخصائيين في الفيزياء الرياضية أو الميكانيك الكوانتي، الاستفادة من هذه النتائج ليكون لها تطبيقات فيزيائية أو كوانتية.

كذلك يمكن التوسع والحصول على نتائج أخرى ويتم ذلك بالدراسة ومتابعة البحث ، بهذا الخصوص نقدم التوصيات الآتية :

"1− محاولة تشكيل فضاءات توابع (مثقلة) من نمط سوبوليف على $\mathbb{R}^n$ بالاعتماد على المشتقات التوزيعية ، كما هو الحال في الفضاءات الكلاسيكية $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ وكيفية اختيار توابع الثقل .

"2− إمكانية القيام بدراسة مشابهة من أجل توابع أخرى ومؤثرات أخرى ، مثل :توابع لاجير، ومؤثر لاجير أو لوجاندر أو غيرها من التوابع والمؤثرات التي لها دراسات فيزيائية رياضية ؟ .

"3− محاولة تشكيل فضاءات توابع عديدة، مثلاً : فضاءات بيزوف ، فضاءات تريبل−ليزوركين ، .... الخ . وهذه لها أهميتها في مجال المعادلات التفاضلية الجزئية التي تحوي مؤثرات :

(1) Δ للفضاءات الكلاسيكية .

(2) هرميت أو لاجير أو .... للفضاءات المدروسة حديثاً .

المراجع:

[1] NANKDAKUMARAN, A.K. ; RATNAKUMAR,P.K.*Schrödinger equation and the oscillatory semigroup for the Hermite operator*.2009.

[2] SJOGREN, P. ; TORREA,J.L. *On the boundary convergence of solutions to the Hermite – Schrödinger equation*. Duke Math , J.55, 1987, 699 -715 .

[3] BONJIOANNI, B.;ROGERS, K.M . *Regularity of the Schrödinger equation for the Harmonic oscillator*.2008 .

[4] THANGAVELU, S.*Lectures on Hermite and Laguerre expansions*.
Princeton University press. NJ, 1993 .

[5] UAJIMA, K. ; ZHANG, G.*Smoothing property for Schrödinger equations which are super quadratic at infinity* . Comm.Math .phys, 221, 2001 ,573-590.

[6] BONJIOANNI, B. ; TORREA, J. L.*Sobolev spaces associated to the harmonic oscillator* . proc. Indian Acad. Math. Sci.116, 2006,337-360 .

[7] TRIEBEL,H.*Higher Analysis* . par th.1992 .

[8] IBRAHIM, I. *On Eigen function expansions of the Hermite differential operator on* $\mathbb{R}^n$.J. Int. Trans. Spec. Funct ,2002, 555 .