مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (6) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (6) 2018

تمثيل الأعداد الأولية بصيغة تربيعية ثنائية صحيحة

الدكتور حسن سنكري *
عبدالله مصطفى حناوي **

(تاريخ الإيداع 9 / 9 / 2018. قُبِل للنشر في 6 / 12 /2018)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث تمثيل الأعدادالأولية بالصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة من الشكل : $f(x,y) = ax^2 + 2bxy - kay^2$, $k > 0$ من أجل حالة $\Delta = 4q$ (q عدد أولي) وعدد الصفوف $h_\Delta = 2$ معتمدين في ذلك على أهم المفاهيم والنظريات حول الصيغ التربيعية الثنائية الصحيحة وعلى مفهوم الصنف *Genus* بالإضافة إلى معيار قابلية الحل للمعادلة الديوفانتية $ax^2 + 2bxy - kay^2 = \pm 1$ وقمنا بتطبيق الدراسة على الصيغتين $g(x,y) = -x^2 + 8xy + 3y^2$ و $f(x,y) = 3x^2 + 10xy - 6y^2$.

الكلمات المفتاحية: صيغة تربيعية – تمثيل أعداد أولية – صنف من الصيغ .

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم–جامعة تشرين– سورية hasan.sankari2@gamil.com
** طالب ماجستير – قسم الرياضيات– كلية العلوم–جامعة تشرين– سورية abdullahmostafahinnawi@tishreen.edu.sy

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (6) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (6) 2018

Primes representing by binary quadratic form

Dr. Hassan sankri *
Abdullah hinnawi **

(Received 9 / 9 / 2018. Accepted 6 / 12 /2018)

□ ABSTRACT □

We study in this paper representing prime integers by binary quadratic form $f(x,y) = ax^2 + 2bxy - kay^2$, $k > 0$ for this case $\Delta = 4q$ (q is prime) and class number $h_\Delta = 2$ Depending on the definitions and theorems about binary quadratic form particularly on genus definition beside the solvability of equation $ax^2 + 2bxy + kay^2 = \pm 1$ and then we applied our study on forms $g(x,y) = -x^2 + 8xy + 3y^2$ and $f(x,y) = 3x^2 + 10xy - 6y^2$.

Key words: quadratic form – prime number representing – genus of forms

* Associate Professor, Department of Mathematics' , Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia,,
** Postgraduate Student, Department of mathematics , Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia,

مقدمة :

وُجدت نظرية الصيغ التربيعية من قبل Gauss − Legendre − Lagrange − Euler − Fermat ، وتطورت هذه النظرية بالتطور المبكر لنظرية الأعداد ، وعلى الرغم من ذلك درست المسائل المتعلقة بالصيغ التربيعية منذ زمن بعيد فعلى سبيل المثال منذ $400BC$ أوجد الهنود والإغريق تقريبات متتالية a/b للعدد $\sqrt{2}$ بحل المعادلة $x^2 - 2y^2 = 1$ ، و وضع Diophantus مسألة يؤول حلها لحل المعادلة (n is odd) $x^2 + y^2 = n$ و لاحظ أنه يجب أن يكون $n \neq 4k + 3$ ودرس بنفسه حالة $n = 13$، و أيضا قام Fermat بدراستها من أجل حالة n عدد أولي وبرهن في عام (1640) أنه إذا كان p عدداً أولياً عندئذ :

$p = x^2 + y^2 \quad x, y \in Z \quad \Leftrightarrow \quad p \equiv 1(\text{mod}\, 4) \ or \ p = 2$.

وعمم Euler المسألة السابقة من أجل الأعداد الأولية p التي تكتب بالشكل $x^2 + Ny^2 = p$ وقام بحلها من أجل $N = 1, \pm 2, 3$ و أوجد بعض النتائج الجزئية من أجل بعض القيم لـ N [9] ، وحديثا برهن Kaplansky [13] في عام 2003 نظرية حول تمثيل الأعداد الأولية بصيغتين رئيسيتين بوقت واحد و توصل إلى أن الأعداد الاولية التي تحقق $p \equiv 1(\text{mod}16)$ تمثل إما بالصيغتين $x^2 + 32y^2$ و $x^2 + 64y^2$ معا أو ليس بأي منها أما الأعداد الأولية التي تحقق $p \equiv 9(\text{mod}16)$ فإنها تُمثل بواحدة فقط من الصيغتين السابقتين ، و برهن David Brink [15] عام 2009 خمس نظريات مشابهة لنظرية Kaplansky إحداها مثلا أن الأعداد الأولية التي تحقق $p \equiv 1(\text{mod}\, 20)$ تمثل إما بالصيغتين $x^2 + 20y^2$ $x^2 + 100y^2$ معا أو ليس بأي منها ، أما الأعداد الأولية التي تحقق $p \equiv 9(\text{mod}\, 20)$ فإنها تمثل بواحدة فقط من الصيغ السابقة ، وقام د. حسن سنكري عام 2011 بدراسة قابلية حل المعادلة الديوفانتية $fx^2 + 2exy - kfy^2 = \pm 1$ وأعطى شرطا لازما و كافيا لحلها وبذلك درس قابلية تمثيل الصيغة للعدد ± 1 [10] ، ودرست Nicha Bircan [16] في عام 2012 مسألة تمثيل قوى الأعداد الأولية بالصيغة التربيعية التي مميزها $D = -2^8 q_1 q_2 \ldots q_t$ و $q_1 q_2 \ldots q_t \equiv 3(\text{mod}\, 4)$ و في نفس العام قام Christopher Thomas [11]بدراسة تمثيل الأعداد الصحيحة بالصيغة $f(x,y)=x^2 - Dy^2$ من أجل $D = 10$ و $D = 11$ ، و أيضا درس Josh Kaplan [12] في عام 2014 تمثيل الأعداد الأولية بالصيغة $f(x,y)=x^2 + 14y^2$ ، وفي عام 2015 برهن Noordsij [18] نظريته حول تمثيل الأعداد $4F_p$ و $4L_p$ بصيغ تربيعية من الشكل $f(x,y)=x^2 + ny^2$ حيث F_n عدد فيبوناتشي و L_n هو عدد لوكاس ، وقام Asif zaman [17] في عام 2017 بتحديد حد أعلى لعدد الأعداد الأولية والتي تُمثل بصيغية تربيعية محددة موجبة و أيضا بنفس العام درس كل من Christopher و Katherine [14] مسألة تحديد الأعداد الصحيحة التي تُمثل بوقت واحد بصيغ تربيعية معطاة .

أهمية البحث أهدافه :

يهدف البحث إلى إيجاد الأعداد الأولية التي تُمثل بصيغ تربيعية ثنائية صحيحة من أجل حالة الصيغ التربيعية ذات الشكل $f(x, y) = ax^2 + 2bxy - kay^2 \quad , k > 0$.

طرائق البحث و مواده :

اعتمدنا في بحثنا على العديد من الدراسات السابقة حول مفهوم تمثيل الأعداد الصحيحة بصيغ تربيعية وقمنا من خلال ذلك بوضع طريقة لحل مسألة تمثيل الأعداد من أجل حالة خاصة من الصيغ التربيعية .

النتائج و المناقشة:

1- مفاهيم ومبرهنات أساسية :

تعريف (1.1) : [9] الصيغة التربيعية الثنائية الصحيحة هي كثيرة حدود $f(x,y)\in Z[x,y]$ متجانسة من الدرجة الثانية لها الشكل $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ حيث $a,b,c\in Z$ نرمز لها اختصارا $f=[a,b,c]$.

تعريف (2.1) : [9] نقول عن الصيغة $f=[a,b,c]$ أنها صيغة أولية إذا كان $\gcd(a,b,c)=1$ علماً أن $\gcd$ هو القاسم المشترك الأكبر .

تعريف (3.1) : [9] لتكن الصيغة التربيعية $f=[a,b,c]$ عندئذ نسمي العدد $\Delta(f)=b^2-4ac$ مميز الصيغة f و نلاحظ من تعريف مميز الصيغة أنه يحقق: إما $\Delta(f)\equiv 0 \bmod 4$ أو $\Delta(f)\equiv 1 \bmod 4$.

تعريف (4.1) : [9] ليكن Δ عددا صحيحا يحقق إما $\Delta\equiv 0 (\bmod 4)$ أو $\Delta\equiv 1 (\bmod 4)$ عندئذ نعرف الصيغة الرئيسية 1_Δ والتي مميزها Δ بالشكل :

$$1_\Delta=\begin{cases}[1,0,-\frac{\Delta}{4}] & if \quad \Delta\equiv 0(\bmod 4)\\ [1,1,\frac{1-\Delta}{4}] & if \quad \Delta\equiv 1(\bmod 4)\end{cases}$$

تعريف (5.1) : [9] نقول إن الصيغة $f=[a,b,c]$ تمثل العدد الصحيح n إذا وُجد $x,y\in Z$ بحيث $f(x,y)=n$ ونقول عندئذ أن n يُمثل بالصيغة f و $(x,y)\in Z^2$ تمثيل للعدد n بالصيغة f.
وإذا كان $\gcd(x,y)=1$ عندئذ نقول إن f تمثل العدد n بشكل خاص ونسمي $(x,y)\in Z^2$ تمثيلاً خاصاً للعدد n بالصيغة f ، نرمز لأسرة الأعداد التي تقبل التمثيل بالصيغة f بشكل خاص بـ $R(f)$.

تعريف (6.1) : [5] لتكن $f=[a,b,c]$ صيغة تربيعية مميزها $\Delta<0$ عندئذ نقول أن f صيغة مختزلة إذا تحقق : $|b|\le a\le c$ وإذا كان $a=c$ أو $|b|=a$ عندئذ يجب أن يكون $b>0$.

تعريف (7.1) : [5] لتكن $f=[a,b,c]$ صيغة تربيعية مميزها $\Delta>0$ عندئذ نقول أن f صيغة مختزلة إذا تحقق $\left|\sqrt{\Delta}-2|a|\right|<b<\sqrt{\Delta}$.

2- صفوف تكافؤ الصيغ و تركيب ديريخليه للصيغ التربيعية:

تعريف (1.2) : [5] لتكن $f=[a,b,c]$ صيغة تربيعية عندئذ تسمى المصفوفة $M(f)$ المعرفة بالشكل :

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}$$

بمصفوفة الصيغة f ويكون لدينا $\Delta(f)=-4\det(M(f))$.

تعريف (2.2) : [5] لتكن $U\in Z^{2\times 2}$ بحيث $U=\begin{pmatrix} s & t\\ u & v\end{pmatrix}$ و $(x,y)\in Z^2$ نعرف الثنائية $U(x,y)$ بالشكل: $U(x,y)=(sx+ty,ux+vy)$ ومن أجل الصيغة $f=[a,b,c]$ نعرف الصيغة $f(U(x,y))$:

$f(U(x,y))=f(s,u)x^2+(2(\alpha st+cuv))xy+f(t,v)y^2$ واذا كان $\det(U)\neq 0$ نعرف الصيغة fU بالشكل: $fU(x,y)=\det(U)f(U(x,y))$.

إن التطبيق الذي ينقل كل ثنائية (f,U) إلى الصيغة fU بحيث f صيغة و $U\in GL(2,Z)$ هو تطبيق عمل يميني للزمرة $GL(2,Z)$ على أسرة الصيغ التربيعية .

التكافؤ: [5] لتكن $U\in Z^{2\times 2}$ بحيث $\det(U)\neq 0$ و لتكن $g=fU$ و لتكن الثنائية (x,y) تمثيلاً للعدد الصحيح $\det(U)n$ بالصيغة g عندئذ: $\det(U)n=g(x,y)=fU(x,y)=\det(U)f(U(x,y))$ ومنه $n=f(U(x,y))$ أي $U(x,y)$ هي تمثيل للعدد n بالصيغة f، والتطبيق $\varphi:Z^2\to Z^2$ المعرف بالشكل $(x,y)\mapsto U(x,y)$ ينقل كل تمثيل للعدد $\det(U)n$ بالصيغة $g=fU$ إلى تمثيل للعدد n بالصيغة f ولكي يكون تطبيق تقابل يجب أن تكون U قابلة للقلب في $Z^{2\times 2}$ ومنه $U\in GL(2,\mathbb{Z})$,عندئذ كل تمثيلات العدد n بالصيغة f يمكن تحديدها بتمثيلات العدد $\det(U)n$ بالصيغة g .

تعريف (3.2): [5] نقول عن الصيغتين f و g أنهما متكافئتان إذا كان $g=fU$ من أجل $U\in GL(2,Z)$ و $GL(2,Z)$–مدار الصيغة f يدعى بصف تكافؤ هذه الصيغة .

تعريف (4.2):[5] نقول عن الصيغتين f و g أنهما متكافئتان بشكل خاص ونكتب $f\sim g$ إذا كان $g=fU$ من أجل $U\in SL(2,Z)$ و $SL(2,Z)$–مدار الصيغة f و يدعى بصف تكافؤ خاص لهذه الصيغة و نرمز لأسرة صفوف التكافؤ بشكل خاص بـ C_Δ.

عرف ديريخليه على أسرة الصيغ التربيعية C_Δ التي مميزها Δ عملية داخلية نرمز لها بـ $\circ$ جعل منها زمرة تسمى زمرة صفوف تكافؤ الصيغ التربيعية الثنائية و نرمز لرتبة هذه الزمرة h_Δ.

تعريف (5.2) : [1]نقول عن الصيغتين التربيعيتين $f=[a_1,b_1,c_1]$ و $f=[a_2,b_2,c_2]$ اللتين مميزهما Δ أنهما متحدتان(United form) إذا كان $\gcd(a_1,a_2,\frac{b_1+b_2}{2})=1$.

مبرهنة (1.2) : [1] إذا كانت $f=[a_1,b_1,c_1]$ و $f=[a_2,b_2,c_2]$ صيغتين تربيعيتين متحدتين مميزهما Δ ، بحيث Δ مميز حقل تربيعي عندئذ يوجد عدد وحيد b_3 بالمقاس $2a_1a_2$ بحيث يحقق $b_3\equiv b_j \pmod{2a_j}$ من أجل $j=1,2$ و أيضا $b_3^2\equiv D \pmod{4a_1a_2}$.

تعريف (6.2) : [1] بفرض $f_1=[a_1,b_1,c_1]$ و $f_2=[a_2,b_2,c_2]$ صيغتين تربيعيتين أوليتين متحدتين مميزهما Δ_F مميز الحقل F و $a_3=a_1a_2$ ، b_3 قيمته كما في المبرهنة (1.2) و $c_3=\frac{(b_3^2-\Delta_F)}{4a_3}$ عندئذ تركيب ديريخليه لـ f_1 و f_2 هو الصيغة $f_1\circ f_2=[a_3,b_3,c_3]$.

مبرهنة (2.2) : [1] لتكن الصيغة $f=[a,b,c]$ عندئذ معكوسها بالنسبة لتركيب ديريخليه هو الصيغة $f=[a,-b,c]$

مبرهنة (3.2) : [1] ليكن Δ_F مميز حقل تربيعي F و U^* الواحدات في حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة للحقل F وليكن h_{Δ_F} رتبة زمرة صفوف تكافؤ الصيغ C_{Δ_F} و h_{D_F} هو رتبة زمرة صفوف الإيديالات الموسعة (*strict ideal class* group)

وبفرض $h^+_{D_F}$ رتبة صفوف تكافؤ الإيديالات الضيقة (*narrow ideal class group*)عندئذ :

$$h_{\Delta_F}=h^{+}{}_{D_F}=\begin{cases} h_{D_F} & \text{if}\quad \Delta_F<0 \\ h_{D_F} & \text{if}\quad \Delta_F>0 \quad \text{there is } u\in U^{*},\ N(u)=-1 \\ 2h_{D_F} & \text{if}\quad \Delta_F>0 \quad \text{there is no } u\in U^{*},\ N(u)=-1 \end{cases}$$

3 – رمز جاكوبي وتمثيل الأعداد الصحيحة و نظرية الصنف :

مبرهنة (1.3) : [1] ليكن F حقلاً تربيعياً مميزه Δ_F بحيث :

$|\Delta_F|=p_1p_2..p_r\ if\quad \Delta_F\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ و $|\Delta_F|=2^{\alpha}p_2..p_r\ if\quad \Delta_F\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$

بحيث $\alpha\in\{2,3\}$ و p_j من أجل $j=1..r$ أعداد أولية فردية مختلفة ، وإذا كان $n_1,n_2\in Z$ يمثلان بشكل خاص بصيغة تربيعية f مميزها Δ_F بحيث $\gcd(n_1,2\Delta_F)=\gcd(n_2,2\Delta_F)=1$ ، عندئذ :

$$\left(\frac{\Delta_F}{|n_1|}\right)=\left(\frac{\Delta_F}{|n_2|}\right)=1$$

بحيث $\left(\frac{*}{*}\right)$ رمز جاكوبي وأيضا $\left(\frac{n_1}{p_i}\right)=\left(\frac{n_2}{p_i}\right)$ من أجل $j=2....r$ و $\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}\right)=\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}\right)$ معرفة كما يلي :

$$\left(\frac{\varepsilon_j}{\alpha_j}\right)=\begin{bmatrix} \left(\frac{n_1}{p_1}\right) & if\quad \Delta_F\equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \\ \left(\frac{-1}{|n_j|}\right).sign(n_j) & if\quad \Delta_F\equiv 12(\mathrm{mod}\,16) \\ \left(\frac{2}{|n_j|}\right) & if\quad \Delta_F\equiv 8(\mathrm{mod}\,32) \\ \left(\frac{-2}{|n_j|}\right).sign(n_j) & if\quad \Delta_F\equiv 24(\mathrm{mod}\,32) \end{bmatrix}$$

تعريف (1.3): [1] ليكن F حقلاً تربيعياً مميزه Δ_F بحيث

$|\Delta_F|=p_1p_2..p_r\ if\quad \Delta_F\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ و $|\Delta_F|=2^{\alpha}p_2..p_r\ if\quad \Delta_F\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$

بحيث $\alpha\in\{2,3\}$ و p_j من أجل $j=1..r$ أعداد أولية فردية مختلفة، وليكن $n\in Z$ بحيث $\gcd(n,2\Delta_F)=1$ و لنعرف χ_1 بالشكل :

$$\chi_1=\begin{bmatrix} \left(\frac{n}{p_1}\right) & if\quad \Delta_F\equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \\ \left(\frac{-1}{|n|}\right).sign(n) & if\quad \Delta_F\equiv 12(\mathrm{mod}\,16) \\ \left(\frac{2}{|n|}\right) & if\quad \Delta_F\equiv 8(\mathrm{mod}\,32) \\ \left(\frac{-2}{|n|}\right).sign(n) & if\quad \Delta_F\equiv 24(\mathrm{mod}\,32) \end{bmatrix}$$

بحيث $\left(\frac{*}{*}\right)$ رمز جاكوبي وأيضا من أجل $j=2....r$ لنعرف χ_j بالشكل $\chi_j=\left(\frac{n}{p_j}\right)$ ، عندئذ χ_j تدعى بالمميزات العامة (general characters) للعدد n وقيمها تعطى بـ r−مركبة $(\chi_1,\chi_2,\chi_3,.....,\chi_r)$ و إذا كان العدد الصحيح n يحقق $\gcd(n,2\Delta_F)=1$ و أيضا يمثل بصيغة تربيعية f مميزها Δ_F ، عندئذ المميزات العامة للصيغة f نرمز لها بالشكل $\chi_j(f)$ من أجل $j=1....r$ و أيضا لدينا العدد الصحيح n يحقق $\left(\frac{\Delta_F}{|n|}\right)=1$.

من هذه المبرهنة نجد أن المميزات العامة لا متغيرة من أجل جميع الأعداد الصحيحة n بحيث $\gcd(n,2\Delta_F)=1$ والتي تمثل بالصيغة f أي كل صف تكافؤ من الصيغ يملك نفس القيم للميزات العامة .

تعريف الصنف Genus (2.3) : [1] تدعى صفوف تكافؤ الصيغ التربيعية في C_{Δ_F} والتي تملك نفس القيم للميزات العامة بصنف من الصيغ .

تعريف الصنف الرئيسي (3.3) : [1]يدعى الصنف الذي تكون القيم العامة لمميزات الصيغ التربيعية فيه مساوية لـ $+1$ بصنف رئيسي نرمز له بـ P .

مبرهنة (2.3) : [1]ليكن Δ_F مميز الحقل التربيعي F ولتكن f صيغة تربيعية أولية مميزها Δ_F ، لنعرف المجموعة :

$$U_{\Delta_F}=\left\{\bar{m}\in\left(\frac{Z}{|\Delta_F|Z}\right)^*:\text{there is odd prim p}\in\bar{m}\ \text{and}\ \left(\frac{\Delta_F}{p}\right)=1\right\}$$

عندئذ يكون التالي محققاً :

a) المجموعة U_{Δ_F} زمرة جزئية في $\left(\frac{Z}{|\Delta_F|Z}\right)^*$.

و إذا كان $m\in Z$ بحيث $\gcd(m,\Delta_F)=1$ يمثل (ليس بالضرورة بشكل خاص) بصيغة تربيعية مميزها Δ_F عندئذ $\bar{m}\in U_{\Delta_F}$.

b) تشكل العناصر $\bar{m}\in\left(\frac{Z}{|\Delta_F|Z}\right)^*$ بحيث تمثل بصنف رئيسي مميزه Δ_F زمرة جزئية H_{Δ_F} في U_{Δ_F} .

c)الصفوف الملاصقة H_{Δ_F} في U_{Δ_F} على وجه التحديد هي :

$$L_f=\left\{\bar{\ell}\in\left(\frac{Z}{|\Delta_F|Z}\right)^*:f\ (x,y)\equiv\ell(\operatorname{mod}|\Delta_F|)\ \text{for some x,y}\in Z\right\}$$

بحيث f كل صيغة تربيعية أولية مميزها Δ_F.

d) تنتمي الصيغتان $f\ ,g$ والتي لهما المميز Δ_F إلى نفس الصنف إذا وفقط إذا كان $L_f=L_g$.

مبرهنة (3.3) : [1] ليكن F حقلاً تربيعياً مميزه Δ_F يقبل القسمة على r عدد أولي مختلف عندئذ التالي محقق :

a) يُقسم h_{Δ_F} صف تكافؤ خاص من الصيغ إلى 2^{r-1} صنف يحوي $h_{\Delta_F}/2^{r-1}$ صف من الصيغ في كل صنف نرمز لأسرة هذه الأصناف بـ G_{Δ_F} والتي تشكل زمرة جزئية في C_{Δ_F} بالنسبة لتركيب الصيغ وفق قانون ديريخليه .

b) إن $G_{\Delta_F}\cong U_{\Delta_F}/H_{\Delta_F}$ و $|G_{\Delta_F}|=2^{r-1}$.

إن غاوس لم يبرهن فقط النظرية السابقة ولكن برهن أيضا أن الصنف الرئيسي يحوي بالضبط مربعات الصيغ التربيعية وفق قانون تركيب ديريخليه تدعى أحيانا بنظرية التربيع أو المضاعفة (duplication or squaring theorem)، أي إذا كان F حقلاً تربيعياً مميزه Δ_F و P يرمز إلى الصنف الرئيسي عندئذ $\mathrm{P} \cong C_{\Delta_F}{}^2$.

مبرهنة (4.3) : [1] ليكن Δ_F مميز حقل تربيعي F و $J \in U_{\Delta_F}/H_{\Delta_F}$ و $p > 2$ عدد أولي لا يقسم $2\Delta_F$ عندئذ $\overline{p} \in J$ إذا وفقط إذا كان p يمثل بصيغة تربيعية مختزلة f مميزها Δ_F في الصنف المقابل لـ J .

مبرهنة (5.3) : [7]

لتكن $f = [a,b,c]$ صيغة تربيعية حيث $\Delta(f) \neq 0$ تمثل العدد $1+$ عندئذ $f = [a,b,c]$ تكافئ صيغة رئيسية.

4 – مبرهنات مساعدة في الدراسة:

مبرهنة (1.4) : [6] لتكن $m_1,....m_r$ أعداداً أولية فيما بينها مثنى مثنى عندئذ جملة التطابقات $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ حيث i=1,..,r لها حل وحيد بالمقاس $M = m_1 m_2 ... m_r$.

تعريف (1.4) : [6] ليكن p عدداً أولياً و a عدداً صحيحاً و p لا يقسم a عندئذ p عندئذ رمز ليجندر يعرف بالشكل :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, if } a \text{ is a quadratic residue of p} \\ -1 & \text{, if } a \text{ is a quadratic nonresidue of p} \end{cases}$$

مبرهنة (2.4) : [6] ليكن p عددا أوليا و a عدداً صحيحا موجباً و p لايقسم a عندئذ :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$.

مبرهنة (3.4) : [6]ليكن p و q عددين أوليين فرديين عندئذ : $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$

أي:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right) & : p \equiv 1 \text{ or } q \equiv 1 \pmod 4 \\ -\left(\frac{q}{p}\right) & : \text{if } p \equiv q \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

مبرهنة (4.4) : [6]ليكن d عددا موجبا حرا من التربيع و ليكن p_k / q_k المقارب من المرتبة k للكسر المستمر للعدد $\sqrt{d}$ وليكن n طول الدور للكسر المستمر للعدد $\sqrt{d}$ عندئذ إذا كان n عددا زوجيا فالحل الموجب للمعادلة الديوفانتية $x^2 - dy^2 = 1$ هو $x = p_{jn-1}, y = q_{jn-1}$ حيث $j = 1,2,...$ والمعادلة الديوفانتية $x^2 - dy^2 = -1$ ليس لها حل ، أما إذا كان n عدداً فردياً فتكون المعادلة الديوفانتية $x^2 - dy^2 = 1$ قابلة للحل وحلها $x = p_{2jn-1}$ و $y = q_{2jn-1}$ وحلول المعادلة $x^2 - dy^2 = -1$ هي $x = p_{(2j-1)n-1}, y = q_{(2j-1)n-1}$ حيث $j = 1,2,...$.

بعد كل ما تقدم سنقوم بدراسة الصيغة التربيعية $f(x,y) = ax^2 + 2bxy - kay^2$ حيث $k > 0$ والتي مميزها يساوي $\Delta = 4(b^2 + ka^2)$ بحالة $b^2 + ka^2 = q$ (qعدد أولي) ومن أجل قيم q التي يكون من أجلها

$h_{4q}=2$ أي يوجد صفي تكافؤ من الصيغ التربيعية و التي مميزها يساوي $4q$ معتمدين في ذلك على قابلية الحل للمعادلة $ax^2+2bxy-kay^2=\pm1$ $(k>0)$ في Z .

5− مراحل الدراسة :

<u>أولا</u> : نقوم بإيجاد حلول المعادلة $b^2+ka^2=q$ و وضع قائمة بالصيغ الموافقة لها.

<u>ثانيا</u>: نحدد عناصر المجموعة U_{4q} وذلك بالاستفادة من رمز ليجندر و قانون التربيع العكسي حيث أن

$$\left(\frac{p}{q}\right)\equiv(p)^{\frac{q-1}{2}}\bmod q=1\Leftrightarrow O_q(p)\mid\frac{q-1}{2}$$ و $$\left(\frac{4q}{p}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

ثم نحدد عناصر H_{4q}ونوجد أسرة الصفوف U_{49}/H_{4q} وسندرس حالة $\left|U_{49}/H_{4q}\right|=2$ وبالتالي يوجد صنف رئيسي يحوي الصيغة الرئيسية فقط وصنف أخر غير رئيسي يحوي الصيغة الأخرى .

<u>ثالثا</u>: نأتي إلى الصيغ التي أوجدنا سابقا ونختبر قابلية الحل للمعادلة $ax^2+2bxy-kay^2=\pm1$ إن كانت قابلة للحل هذا يعني أن الصيغة المدروسة تكافئ صيغة رئيسيةحسب المبرهنة (5.3) ومنه تنتمي إلى الصنف الرئيسي وإن لم تكن قابلة للحل تكون الصيغة من الصنف غير الرئيسي وفي كلتا الحالتين نكون قد حددنا الأعداد الأولية p التي تحقق $ax^2+2bxy-kay^2=p$،حيث أن خوارزمية حل المعادلة $ax^2+2bxy-kay^2=\pm1$ حيث $a>0$ تعطى بالشكل: [10]

1− نعين العدد $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{q}}{a}$ حيث $q=b^2+ka^2$.

2− نكتب α بشكل كسر مستمر لا نهائي دوري بالشكل : $\alpha=[\alpha_0,\alpha_1,.....\alpha_{t-1},\overline{\alpha_t,\alpha_{t+1},..........\alpha_{t+l-1}}]$

3− نحسب المقادير a_n,b_n حيث $0\le n\le t+l-1$ من العلاقتين :

$$\left.\begin{aligned}b_{n+1}&=-b_n-\alpha_n a_n\\ a_{n+1}&=a_{n-1}-2b_n\alpha_n-a_n\alpha_n^2\end{aligned}\right\}\quad(**)$$

علما أن : $a_{-1}=ka,a_0=a,b_0=b$.

إذا كان على الأقل أحد المقادير a_n يساوي ±1 فإن المعادلة تكون قابلة للحل ويكون (A_{n-1},B_{n-1}) حلا لهذه المعادلة حيث $C_{n-1}=A_{n-1}/B_{n-1}$ مقارب لـ α ، وإذا لم يساو أي من المقادير a_n العدد ±1 فإن المعادلة تكون غير قابلة للحل .

قمنا بتطبيق دراستنا على حالتين الأولى من أجل $k=3$ و $q=19$ والثانية من أجل $k=2$ و $q=43$، ومن خلال الموقع [19] و من الرابط المباشر [20] يمكن حساب رتبة زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات للحقل التربيعي $Q\left(\sqrt{d}\right)$ من أجل الحقلين التربيعيين $Q\left(\sqrt{19}\right)$ و $Q\left(\sqrt{43}\right)$ لدينا رتبة زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات تساوي 1 وكل من المعادلتين $x^2-19y^2=-1$ $x^2-43y^2=-1$ ليس لها حل في Z ومنه حسب المبرهنين (4.4) و (3.2) يكون رتبة زمرة صفوف تكافؤ الصيغ من أجل $\Delta=172$ و $\Delta=76$ هي 2 .

من أجل $k=3$ و $q=19$ يكون :

$b^2+3a^2=19$ ومنه $a=\pm1$, $b=\pm4$ و الصيغ الموافقة $f_1=[1,8,-3],f_2=[1,-8,-3]$ و $f_3=[-1,8,3],f_4=[-1,-8,3]$ وبما أن رتبة زمرة الصفوف تساوي 2 وبالتالي كل صيغة تكافئ معكوسها

وأيضا $f_1(x,y)=x^2+8xy-3y^2 \sim f^{-1}{}_1(x,y)=x^2-8xy-3y=f_2(x,y)$ أي $f \sim f^{-1}$
وبالتالي $f_3(x,y)=-x^2+8xy+3y^2 \sim f^{-1}{}_3(x,y)=-x^2-8xy+3y=f_4(x,y)$ يكفي دراسة الصيغتين f_1 و f_3 . ولإيجاد U_{76} نحدد الأعداد الأولية p التي تحقق $\left(\frac{76}{p}\right)=1$ أي تحقق $\left(\frac{19}{p}\right)=1$.

بما أن $19\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ نميز حالتين :

– الحالة الأولى $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$: بحسب قانون التربيع العكسي $\left(\frac{19}{p}\right)=\left(\frac{p}{19}\right)$ ومنه $O_{19}(p)\,|\,\frac{19-1}{2}$ أي $O_{19}(p)\,|\,9$ بالتالي $p\in X$ بحيث $X=\{1,4,5,6,7,9,11,16,17\}$ نحل جملة التطابقين :

$$\begin{cases} p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \\ p\equiv \alpha(\mathrm{mod}\,19) \quad ,\alpha\in X \end{cases}$$

باستخدام مبرهنة البواقي الصينية[6] نوجد الحل حيث أن حل جملة التطابقين :

$$\begin{cases} x\equiv b_1(\mathrm{mod}\,m_1) \\ x\equiv b_2(\mathrm{mod}\,m_2) \end{cases}$$

يعطى $\gcd(m_1,m_2)$ بالعلاقة : $x^*\equiv b_1m_2N_1+b_2m_1N_2(\mathrm{mod}\,m_1m_2)$ بحيث N_1 تحقق $N_1m_2\equiv 1(\mathrm{mod}\,m_1)$ و N_2 تحقق $N_2m_1\equiv 1(\mathrm{mod}\,m_2)$ ، من أجل الجملة المعطاة $b_1=1,m_1=4,N_1=3$ و $b_2=\alpha\in X\ ,m_2=19,N_2=5$ وبالتالي الحل هو $x^*\equiv 57+20\alpha(\mathrm{mod}\,76)$ بالحساب نجد :

الجدول (1)

α	1	4	5	6	7	9	11	16	17
x^*	1	61	5	25	45	9	49	73	17

مجموعة الحلول هي $X^*=\{1,61,5,25,45,9,49,73,17\}$

– الحالة الثانية $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$: عندئذ بحسب قانون التربيع العكسي $\left(\frac{19}{p}\right)=-\left(\frac{p}{19}\right)$ ومنه $\left(\frac{19}{p}\right)=1$ عندما $\left(\frac{p}{19}\right)=-1$ أي $O_{19}(p)\neq 1,3,9$ ومنه $p\in Y$ بحيث : $Y=\{2,3,8,10,12,13,14,15,18\}$

وبحل جملة التطابقين :

$$\begin{cases} p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \\ p\equiv \beta(\mathrm{mod}\,19) \quad ,\beta\in Y \end{cases}$$

من أجل الجملة المعطاة : $b_1=3,m_1=4,N_1=3$ و $b_2=\beta\in Y\ ,m_2=19,N_2=5$ وبالتالي الحل هو $y^*\equiv 171+20\beta(\mathrm{mod}\,76)$ بالحساب نجد :

الجدول (2)

β	2	3	8	10	12	13	14	15	18
y^*	59	3	27	67	31	51	71	15	75

مجموعة الحلول هي $Y^*=\{59,3,27,67,31,51,71,15,75\}$ وأخيرا من الحالتين الأولى والثانية ينتج أن :
والمميزات العامة هي : $U_{76}=X^*\cup Y^*=\{1,61,5,25,45,9,49,73,17,59,3,27,67,31,51,71,15,75\}$

$\chi_1(p)=\left(\frac{-1}{p}\right)sign(p)=\left(\frac{-1}{p}\right)$ و $\chi_2(p)=\left(\frac{19}{p}\right)$ ومنه الصنف الرئيسي H_{76} يضم العناصر $\overline{p}$ من U_{76}

التي تحقق $\left(\frac{19}{p}\right)=1$ و $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ أي $H_{76}=\{1,61,5,25,45,9,49,73,17\}$

و أسرة الصفوف الملاصقة U_{76}/H_{76} مكونة من صفين هما: $I=H_{76}=\{1,61,5,25,45,9,49,73,17\}$ و $J=\{59,3,27,67,31,51,71,15,75\}$ والآن من أجل الصيغة $f_1(x,y)=x^2+8xy-3y^2$ نختبر إن كانت تمثل العدد 1 أم لا،أي هل تقبل المعادلة $x^2+8xy-3y^2=+1$ ؟

نطبق خوارزمية الحل : $k=3,\ a=1,\ b=4,\ b^2+3a^2=19,\ \alpha=\frac{-4+\sqrt{19}}{1}=[0,\overline{2,1,3,1,2,8}]$

و لنضع $a_{-1}=3,\ a_0=1,\ b_0=4$ نعوض في (**) ونرتب النتائج في الجدول(3) التالي :

الجدول (3)

i	α_i	b_i	a_i		i	α_i	b_i	a_i
-1	$-$	$-$	3		3	3	-3	2
0	0	4	1		4	1	-3	5
1	2	-4	3		5	2	-2	3
2	1	-2	5		6	8	-4	1

نلاحظ أن $a_i=1$ من أجل كل $i=0,6$ و $f_1(1,0)=1$ ومنه المعادلة $x^2+8xy-3y^2=+1$ قابلة للحل أي تكافئ صيغة رئيسية مميزها 76ومن أجل الصيغة $f_3(x,y)=-x^2+8xy+3y^2$ ندرس المعادلة $-x^2+8xy+3y^2=+1$ أو $x^2-8xy-3y^2=-1$ و بما أن $x^2-8xy-3y^2\sim x^2+8xy-3y^2$ ندرس المعادلة $x^2+8xy-3y^2=-1$ من الجدول (3) $a_i=1$ من أجل كل $i=0,6$ و $f_1(1,0)\neq-1$ و من أجل $a_6=1$ نجد $C_5=A_5/B_5=133/52$ و $f_1(133,52)=70313\neq-1$ أي $-x^2+8xy+3y^2=+1$ غير قابلة للحل ومنه الصيغة $f_3(x,y)=-x^2+8xy+3y^2$ لا تكافئ صيغة رئيسية مميزها 76.

بعد هذه الدراسة نجد إذا كان $p\neq 2,19$ عدد أولي عندئذ :

$$x^2-8xy-3y^2=p \iff p\equiv 1,61,5,25,45,9,49,73,17 \pmod{76}$$

$$-x^2+8xy+3y^2=p \iff p\equiv 59,3,27,67,31,51,71,15,75 \pmod{76}$$

- من أجل الحالة الثانية $k=2$ و $q=43$ يكون :

$b^2+2a^2=43$ ومنه $a=\pm3\ ,\ b=\pm5$ الصيغ الموافقة $f_1=[3,10,-6]$ و $f_2=[3,-10,-6]$ و $f_3=[-3,10,6],f_4=[-3,-10,6]$ إن رتبة زمرة الصفوف تساوي 2 وبالتالي $f\sim f^{-1}$

$$f_1(x,y)=3x^2+10xy-6y^2\sim f_1^{-1}(x,y)=3x^2-10xy-6y^2=f_2(x,y)$$

وأيضا

$$f_3(x,y)=-3x^2+10xy+6y^2\sim f_3^{-1}(x,y)=-3x^2-10xy+6y=f_4(x,y)$$

وبالتالي يكفي دراسة الصيغتين f_1 وf_3 ولإيجاد U_{172} نحدد الأعداد الأولية p التي تحقق $\left(\frac{172}{p}\right)=1$ أي تحقق $\left(\frac{43}{p}\right)=1$

بما أن $43\equiv 3(\bmod 4)$ نميز حالتين :

الحالة الأولى $p\equiv 1(\bmod 4)$: بحسب قانون التربيع العكسي $\left(\frac{43}{p}\right)=\left(\frac{p}{43}\right)$ ومنه $O_{43}(p)\,|\,21$ بالتالي $p\in X$

بحيث $X=\{1,4,6,9,10,11,13,14,15,16,17,21,23,24,25,31,35,36,38,40,41\}$

نحل جملة التطابقين :

$$\begin{cases} p\equiv 1(\bmod 4) \\ p\equiv \alpha(\bmod 43) \quad ,\alpha\in X \end{cases}$$

$b_1=1, m_1=4, N_1=3$ و $b_2=\alpha\in X\ , m_2=43, N_2=11$ وبالتالي الحل هو $x^*\equiv 57+20\alpha(\bmod 76)$

بالحساب نجد :

الجدول (4)

α	1	4	6	9	10	11	13
x^*	1	133	49	9	53	97	13
α	14	15	16	17	21	23	24
x^*	57	101	145	17	21	109	153
α	25	31	35	36	38	40	41
x^*	25	117	121	165	81	169	41

من الجدول (4) مجموعة الحلول هي :

$$X^*=\{1,133,49,9,53,97,13,57,101,145,17,21,109,153,25,117,121,165,81,169,41\}$$

الحالة الثانية $p\equiv 3(\bmod 4)$ عندئذ بحسب قانون التربيع العكسي $\left(\frac{43}{p}\right)=-\left(\frac{p}{43}\right)$ ومنه $\left(\frac{43}{p}\right)=1$ عندما أي $O_{43}(p)\neq 1,3,7,21$ ومنه $p\in Y$ بحيث $Y=\{2,3,5,7,8,12,18,19,20,22,26,27,28,29,30,32,33,34,37,39,42\}$

وبحل جملة التطابقين :

$$\begin{cases} p\equiv 3(\bmod 4) \\ p\equiv \beta(\bmod 19) \quad ,\beta\in Y \end{cases}$$

من أجل الجملة المعطاة : $b_1=3, m_1=4, N_1=3$ و $b_2=\beta\in Y\ , m_2=43, N_2=11$ وبالتالي الحل هو $y^*\equiv 387+444\beta(\bmod 172)$ بالحساب نجد :

الجدول (5)

β	2	3	5	7	8	12	18
y^*	131	3	91	7	51	55	147
β	19	20	22	26	27	28	29

y^*	19	63	151	155	27	71	115
β	30	32	33	34	37	39	42
y^*	159	75	119	163	123	39	171

من الجدول (5) مجموعة الحلول هي :

$$Y^* = \{131,3,91,7,51,55,147,19,63,151,155,27,71,115,159,75,119,163,123,39,171\}$$

وأخيرا من الحالتين الأولى و الثانية نجد أن $U_{172} = X^* \cup Y^*$

$$U_{172} = \left\{\begin{matrix} 1,133,49,9,53,97,13,57,101,145,17,21,109,153,25,117,121,165,81,169,41, \\ 131,3,91,7,51,55,147,19,63,151,155,27,71,115,159,75,119,163,123,39,171 \end{matrix}\right\}$$

والمميزات العامة هي : $\left(\frac{-1}{p}\right) = sign(p)\left(\frac{-1}{p}\right) = \chi_1(p)$ و $\chi_2(p) = \left(\frac{43}{p}\right)$ ومنه الصنف الرئيسي H_{172}

يضم العناصر $\overline{p}$ من U_{172} التي تحقق $\left(\frac{43}{p}\right) = 1$ و $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ أي :

$$H_{172} = \{1,133,49,9,53,97,13,57,101,145,17,21,109,153,25,117,121,165,81,169,41\}$$

و أسرة الصفوف الملاصقة U_{172}/H_{172} مكونة من صفين هما :

$$I = H_{172} = \{1,133,49,9,53,97,13,57,101,145,17,21,109,153,25,117,121,165,81,169,41\}$$

و الصف الأخر :

$$J = \{131,3,91,7,51,55,147,19,63,151,155,27,71,115,159,75,119,163,123,39,171\}$$

والآن نختبر قابلية الحل للمعادلة $f_i(x,y) = +1$ و $i = 1,3$.

من أجل الصيغة $f_1(x,y) = 3x^2 + 10xy - 6y^2$ نختبر إن كانت تمثل العدد 1 أم لا، نطبق خوارزمية الحل فنجد:

$$k = 2,\ \ a = 3,\ \ b = 5,\ \ b^2 + 3a^2 = 43,\ \ \alpha = \frac{-5+\sqrt{43}}{3} = [0,\overline{1,1,12,1,1,3,1,5,1,3}]$$

ولنضع $a_{-1} = 6,\ a_0 = 3,\ b_0 = 5$ نعوض في (**) ونرتب النتائج في الجدول (6):

الجدول (6)

i	α_i	b_i	a_i		i	α_i	b_i	a_i
-1	—	—	6		5	1	-1	6
0	0	5	3		6	3	-5	3
1	1	-5	6		7	1	-4	9
2	1	-1	7		8	5	-5	2
3	12	-6	1		9	1	-5	9
4	1	-6	7		10	3	-4	3

نلاحظ من الجدول (7) أن $a_3 = 1$ و $C_2 = A/B = 1/2$ و $f_1(1,2) = -1$ أي المعادلة $3x^2 + 10xy - 6y^2 = +1$ غير قابلة للحل لذلك الصيغة $f_1(x,y) = 3x^2 + 10xy - 6y^2$ لا تكافئ صيغة رئيسية،و من أجل الصيغة $f_3(x,y) = -3x^2 + 10xy + 6y^2$ ندرس المعادلة $-3x^2 + 10xy + 6y^2 = +1$ أو $3x^2 - 10xy - 6y^2 = -1$ و بما أن $3x^2 - 10xy - 6y^2 \sim 3x^2 + 10xy - 6y^2$ ندرس المعادلة $3x^2 + 10xy - 6y^2 = -1$ وهي قابلة للحل كما وجدنا من الحالة $i = 1$ أي $-3x^2 + 10xy + 6y^2 = +1$ قابلة للحل ومنه الصيغة $f_3(x,y) = -3x^2 + 10xy + 6y^2$ تكافئ صيغة رئيسية مميزها 172 .

ومنه نجد إذا كان $p \neq 2, 43$ عدد أولي عندئذ :

$$3x^2 - 10xy - 6y^2 = p \quad \Leftrightarrow \quad p \equiv \alpha (\mathrm{mod}\, 172)$$

بحيث

$$\alpha \in \{131, 3, 91, 7, 51, 55, 147, 19, 63, 151, 155, 27, 71, 115, 159, 75, 119, 163, 123, 39, 171\}$$

وأيضا :

$$-3x^2 + 10xy + 6y^2 = p \quad \Leftrightarrow \quad p \equiv \beta (\mathrm{mod}\, 172)$$

بحيث

$$\beta \in \{1, 133, 49, 9, 53, 97, 13, 57, 101, 145, 17, 21, 109, 153, 25, 117, 121, 165, 81, 169, 41\}$$

الاستنتاجات و التوصيات :

توصلنا في بحثنا هذا إلى إيجاد الأعداد الأولية التي تمثل بصيغ تربيعية لها الشكل $f(x,y) = ax^2 + 2bxy - kay^2,\ k > 0$ من أجل حالة $\Delta = 4q$ (q عدد أولي) وعدد الصفوف $h_\Delta = 2$ و متابعة لهذه الدراسة نوصي بدراسة تمثيل الاعداد من أجل حالة عدد الصفوف أكبر من 2 بأسلوب مشابهه للأسلوب الذي اعتمدناه في بحثنا هذا .

المراجع:

[1] MOLLIN,A.R.advanced *number theory with applictions*,CRC,Canada,2010,481.
[2] BUELL,D.A. *Binary quadratic forms classical and modern computations* ,springer, newhom,1989.
[3] HARVEY,C. *Advanced number theory* ,inc .newhom.1962.275.
[4]] MOLLIN,A.R. *algebraic number theory*.2nd,CRC ,Canada,2011.417.
[5] BUCHAMAN,**J**;*VOLLMER,U. binary quadratic forms an algorithmic approach*,springer,2007,326.
[6] KENNETH,H.R. *elementary number theory and it's applications* ,Massachusetts Menlo park,California,1984.462.
[7] FRANZ,H.K**.** *quadratic irrationals an introduction to classical number theory*,ucm,Madrid.2013.
[8] ANTHONY,W.K. *advanced algebra, east Setauket,* new 76hom.2016.758.
[9]ERNST,k.*quadratic forms and elliptic curves*, queen's university,2012.100.
[10] *سنكري.*حسن*.دراسة قابلية حل المعادلة الديوفانتية* $fx^2 + 2exy - kfy^2 = \pm 1$ *في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة*.مجلة جامعة تشرين .المجلد33.العدد11. 2011. 50-63.

[11]CHRISTPPHER.K.thomas.*On representations of integers by the quadratic form x^2-Dy^2*, Rochester Institute of Technology, 2012.
[12]JOSH,K.*Binary quadratic forms, genus theory and primes of the forms p=x^2+ny^2* ,University of Chicago,2014**.**
[13]IRVING,K.*The forms x^2+32y^2 and x^2+64y^2*,American mathematical society,2003.
[14] CHRISTPPHER, *Numbers Represented by a Finite Set of Binary Quadratic Forms*,2017.
[15]DAVID,B.*Five peculiar theorems on simultaneous representation of primes by quadratic forms*, Institute for mathematic fag, Københavns University.2009.
[16]NIHAL,B.*Representation of Prime Powers* by *Binary Quadratic Forms*. C¸ankırı Karate in University,2012.
[17] ZAMAN,A**.***Primes represented by positive definite binary quadratic forms*,Cornell university,2017.
[18] NOORDSIJ,j. *Primes of the form x2 + ny2*, Leiden University,2015.
[19] http://www.numbertheory.org
[20] http://www.numbertheory.org/php/classnopos.html