مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

قانون الأعداد الكبيرة للدوال العشوائية بمتحولين

الدكتور محمد سويقات*
الدكتور وديع علي**
نغم صالح***

(تاريخ الإيداع 29 / 4 / 2013. قُبِل للنشر في 2 / 7 /2013)

ملخّص

نقوم في هذا البحث بإيجاد قانون الأعداد الكبيرة للدوال العشوائية المحدبة – المقعرة المغلقة و نعمّم بعض النتائج المتعلقة بالدوال نصف المستمرة من الأدنى ذات المتحول الواحد إلى نتائج مشابهة تخص دوال محدبة – مقعرة بمتحولين وذلك باستخدام الدوال القرينة المحدبة لدالة محدبة – مقعرة وتقارب موسكو فوق /تحت البياني .

الكلمات المفتاحية: قانون الأعداد الكبيرة , فوق البيان , فوق/ تحت البيان , دالة عشوائية , دالة قرينة محدبة , تقارب موسكو فوق البياني, تقارب موسكو فوق/تحت البياني .

* أستاذ – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
*** طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

Law of the Large Numbers for Random Functions with two Variables

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr. Wadih Ali **
Nagham saleh ***

(Received 29 / 4 / 2013. Accepted 2 / 7 /2013)

□ ABSTRACT □

In this research we will find a law of the large numbers for random convex – concave closed functions , and generalize some results related to lower semi- continuous functions to similar results concerning the convex– concave functions , and that will be done with using the parent convex functions and the Mosco-epi \ hypo-convergence .

Key words : a law of large numbers **,** epi-graph , epi\hypo – graph , random functions , parent convex , Mosco-epi-convergence , Mosco-epi\hypo-convergence .

***Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.**
****Associate Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.**
*****Postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.**

مقدمة :

ظهرت نظرية الأعداد الكبيرة في منتصف القرن السابع عشر على يد العالم السويسري برنولي عندما اكتشف أول شكل لقانون الأعداد الكبيرة. في عام 1874 توصل الرياضي الروسي تشيبتشيف (1821–1894) إلى صياغة برهان بسيط ودقيق لهذا القانون, وفي عام 1975 قام كل من *Artstein ,Vitale* [2] بدراسة هذا القانون على مجموعات عشوائية متراصة أما *Artstein , Hart* [1] فقد درسوه عام 1981 على مجموعات عشوائية , في إذ إنَّ العالم *Hiai*[11] قام بدراسته على متغيرات عشوائية عام 1984 .

في السنوات الأخيرة من القرن الماضي ظهر التحليل فوق البياني الذي يدرس مسائل القيم الصغرى باستخدام مفهوم فوق البيان *epigraph* :

$$epif =\{(x,r) \in X \times R \;/ f(x) \le r\}$$

والتحليل تحت البياني الذي يدرس بشكل مناظر مسائل القيم العظمى باستخدام مفهوم تحت البيان *hypograph* :

$$hypo f =\{(x,r) \in X \times R \;/ f(x) \ge r\}$$

وقد تمَّت مطابقة كل دالة بفوق بيانها وأصبحت تُدرس الدوال باستخدام مجموعات فوق بيانها, إذ تمَّت دراسة قانون الأعداد الكبيرة للدوال العشوائية نصف المستمرة من الأدنى من قِبل العالمين *Attouch ,Wets* عام 1991 [8] مستخدمين مفهوماً جديداً يدعى تقارب موسكو فوق البياني .

وبعد ذلك دُمج مفهوما فوق البيان وتحت البيان لبناء التحليل فوق/تحت البياني الذي يدرس الدوال المحدبة – المقعرة, مما أدى إلى خلق مفاهيم جديدة مثل التقارب فوق/تحت – البياني , التكامل فوق/تحت – البياني, المشتق فوق/تحت – البياني, الجمع فوق/تحت – البياني, الضرب فوق/تحت – البياني .... الخ , وقد تبنى هذه المفاهيم العديد من الرياضيين في دراسة مثل هذه الدوال وخواصها [4,5,6,9] .

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى إيجاد قانون الأعداد الكبيرة للدوال العشوائية المحدبة – المقعرة المغلقة , وتكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته في نظرية الأمثليات وفي بعض مسائل القيم الصغرى/العظمى وكذلك في دراسة تقارب النقاط السرجية .

طرائق البحث ومواردە :

نعطي بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالتحليل فوق البياني وبالدوال العشوائية, ونستخدم المفاهيم الجديدة والطرق المتبعة في التحليل فوق/تحت – البياني في برهان النتائج التي حصلنا عليها .

1. تعاريف ومفاهيم أساسية :

نذكّر ببعض عناصر التحليل المحدب (*convex analysis*) [3,7,10,14] .

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي خطي , و (X^*,τ^*) فضاءه الثنوي ولتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

- تكون الدالة f محدبة إذا كانت $epif$ مجموعة محدبة في $X \times R$.
- f دالة نصف مستمرة من الأدنى($l.s.c$) إذا كانت $epif$ مجموعة مغلقة .

- f دالة نوعية أو خاصة ($proper$) إذا كانت $epif$ مجموعة غير خالية .
- تكون f دالة مقعرة $(concave)$ إذا وفقط إذا كانت $(-f)$ محدبة .
- يُرمز للدالة المرافقة للدالة f بالرمز f^* وتعرف بالشكل :

$$f^*: X^* \to \overline{R}$$
$$f^*(x^*) = \sup\left\{\langle x, x^* \rangle - f(x)\right\}$$

وهي دالة محدبة سواء كانت f محدبة أو ليست محدبة حيث $\langle .,. \rangle$ يرمز للثنا الخطية بين عناصر X, X^*.

- يُرمز لمجموعة النقاط الأصغرية للدالة f بالرمز $\arg\min f$ وتعرف بالشكل التالي :

$$\arg\min f = \left\{\overline{x} \in X \mid f(\overline{x}) = \inf_{x \in X} f(x)\right\}$$

- نفرض X فضاء باناخ و $\left\{f^n : X \to \overline{R} ; n \in N\right\}$ متتالية من الدوال عندئذٍ :

i. (f^n) شبه مستمرة $(equi-continuous)$ في x_0 إذا تحقق الشرط:

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $r_\varepsilon > 0$ بحيث يكون لكل $n \in N$ و $x \in B(x_0, r_\varepsilon)$ فإن :

$$\left| f^n(x) - f^n(x_0) \right| \le \varepsilon$$

وإذا كانت هذه الخاصية محققة لكل $x \in X$ تكون (f^n) شبه مستمرة على كل X .

ملاحظة : نفرض $\sup\limits_{\|x - x_0\| \le r} \left|f^n(x) - f^n(x_0)\right| = \ell(r)$

ii. (f^n) شبه قسرية $(equi-coercive)$ إذا وجدت دالة $\theta : R^+ \to R^+$ مع $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = +\infty$ بحيث يكون من أجل كل $n \in N$ وكل $x \in X$ فإنَّ :

$$f^n(x) \ge \theta\left(\|x\|\right)$$

- نقول عن متتالية الدوال $\left\{g^n : X \to \overline{R}, n \in N\right\}$ أنها تتقارب وفق مفهوم فوق البيان من الدالة $g : X \to \overline{R}$ إذا تحقق الشرطان :

$$(i)\ \forall x \in X,\ \forall x_n \xrightarrow{\tau} x\ :\ \liminf_{n \to \infty} g^n(x_n) \ge g(x)$$
$$(ii)\ \forall x \in X,\ \exists \hat{x}_n \xrightarrow{\tau} x\ :\ \limsup_{n \to \infty} g^n(\hat{x}_n) \le g(x)$$

ويُرمز لهذا التقارب بـ $g = \lim\limits_{n}{}_{e}\, g^n$ أو اختصاراً $g^n \xrightarrow{e} g$.

- إذا كان X فضاء باناخ انعكاسي و $\left\{g^n : X \to \overline{R}, n \in N\right\}$ متتالية من الدوال المحدبة ونصف المستمرة من الأدنى , نقول أنَّ g^n تتقارب وفق مفهوم موسكو- فوق البياني نحو g إذا تحقق الشرطان:

$$(i)\ \forall x \in X,\ \forall x_n \xrightarrow{w} x\ :\ \liminf_{n \to \infty} g^n(x_n) \ge g(x)$$
$$(ii)\ \forall x \in X,\ \exists \hat{x}_n \xrightarrow{s} x\ :\ \limsup_{n \to \infty} g^n(\hat{x}_n) \le g(x)$$

حيث $s\ (w)$ التبولوجيا القوية (الضعيفة) المعرفة على X .

ويُرمز لهذا التقارب بالرمز $g = M - \lim_e g^n$ أو بالرمز $g^n \xrightarrow{M-e} g$.

- يُعرّف المجموع فوق البياني $(epi-sum)$ للدالتين المحدبتين $f\,,g:X\to\overline{R}$ بالعلاقة التالية :

$$\left(f\underset{e}{+}g\right)(x)=\inf_{u\in X}\{f(u)+g(x-u)\}$$
$$=\inf_{\substack{u,v\in X\\u+v=x}}\{f(u)+g(v)\}$$

- يُعرّف الجداء فوق البياني $(epi-multiplication)$ للدالة المحدبة $f:X\to\overline{R}$ بعدد $\lambda>0$ بالعلاقة التالية :

$$\left(\lambda\underset{e}{*}f\right)(x)=\lambda f\left(\lambda^{-1}x\right)$$

وقد بُرهن من قبل أتوش– ويتس [7] أن :

$$epi_s\left(f\underset{e}{+}g\right)=epi_s(f)+epi_s(g)\qquad(1$$

$$epi\left(\lambda\underset{e}{*}f\right)=\lambda\,epi(f)\qquad(2$$

حيث : $epi_s f=\{(x,r)\in X\times R\ /f(x)<r\}$

وبشكل مناظر تعرف العمليات تحت البيانية بالشكل:

- يُعرَّف المجموع تحت البياني $(hypo-sum)$ للدالتين المقعرتين $f\,,g$ بالعلاقة :

$$f\overset{h}{+}g=\sup_{u\in X}\{f(u)+g(x-u)\}$$
$$=\sup_{\substack{u,v\in X\\u+v=x}}\{f(u)+g(v)\}$$

- ويُعرّف الجداء تحت البياني $(hypo-multiplication)$ للدالة المقعرة g بعدد $\mu>0$ بالعلاقة التالية :

$$\left(\mu\overset{h}{*}g\right)(x)=\mu g\left(\mu^{-1}x\right)$$

نعطي الآن بعض مفاهيم التحليل فوق/تحت البياني [6,9,12,16]:

لتكن $L,K:X\times Y\to\overline{R}$ دوال معرفة على $X\times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$ حيث Y فضاء تبولوجي .

- تكون الدالة L محدبة – مقعرة إذا كانت محدبة بالنسبة للمتحول الأول ومقعرة بالنسبة للمتحول الثاني.
- تُعرَّف الدالة الحدية العليا f_L $(upper\ marginal\ function)$ للدالة L بالعلاقة التالية :

$$f_L=\sup_{y\in Y}L(x,y)\qquad;\qquad f_L:X\to\overline{R}$$

- تُعرَّف الدالة الحدية الدنيا g_L $(lower\ marginal\ function)$ للدالة L بالعلاقة التالية :

$$g_L=\inf_{x\in X}L(x,y)\qquad;\qquad g_L:Y\to\overline{R}$$

- يُبرهن أنَّه إذا كانت الدالة L محدبة – مقعرة عندئذٍ تكون الدالة الحدية العليا f_L دالة محدبة وتكون الدالة الحدية الدنيا g_L دالة مقعرة .
- تكون النقطة $(\overline{x},\overline{y})$ نقطة سرجية $(saddle\ point)$ للدالة L إذا حققت الشرط التالي :

$$L(\overline{x},y)\le L(\overline{x},\overline{y})\le L(x,\overline{y})\qquad\forall(x,y)\in X\times Y$$

- يُرمز لمجموعة النقاط السرجية للدالة L بالرمز $\arg\min\max L$ وتعطى بالشكل :

$$\arg\min\max L = \left\{ (\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y \mid L(\bar{x},y) \le L(\bar{x},\bar{y}) \le L(x,\bar{y}) \quad ; \quad \forall (x,y) \in X \times Y \right\}$$

- تُعرَّف الدالة القرينة المحدبة $(parent\ convex)$ F_L للدالة L حيث $F_L : X \times Y^* \to \overline{R}$ بالعلاقة :

$$F_L(x,y^*) = \sup_{y \in Y} \left\{ L(x,y) + \langle y, y^* \rangle \right\}$$

- تُعرَّف الدالة القرينة المقعرة $(parent\ concave)$ G_L للدالة L حيث $G_L : X^* \times Y \to \overline{R}$ بالعلاقة:

$$G_L(x^*,y) = \inf_{x \in X} \left\{ L(x,y) - \langle x, x^* \rangle \right\}$$

يُبرهن بسهولة أنَّ F_L دالة محدبة على $X \times Y^*$ و G_L دالة مقعرة على $X^* \times Y$.

- تكون الدالة L مغلقة إذا كان $F_L = -G_L^*$ و $F_L^* = -G_L$ حيث G^*, F^* هما الدالتان المرافقتان للدالتين G, F على الترتيب.
- تكون L, K دالتين متكافئتين إذا كان لهما نفس الدوال القرينة .
- ليكن X, Y فضاءي باناخ انعكاسيين و $\left\{ L^n : X \times Y \to \overline{R} ; n \in N \right\}$ متتالية من الدوال المحدبة–المقعرة المغلقة , نقول أنَّ المتتالية $\left\{ L^n , n \in N \right\}$ تتقارب وفق مفهوم موسكو– فوق/تحت البياني نحو L إذا حققت:

$$(i)\ \forall (x,y) \in X \times Y,\ \forall y_n \xrightarrow[n]{w} y,\ \exists x_n \xrightarrow[n]{s} x \ : \limsup_n L^n(x_n,y_n) \le L(x,y)$$

$$(ii)\ \forall (x,y) \in X \times Y,\ \forall x_n \xrightarrow[n]{w} x,\ \exists y_n \xrightarrow[n]{s} y \ : \liminf_n L^n(x_n,y_n) \ge L(x,y)$$

ويُرمز لهذا التقارب بالشكل : $L = M - e \backslash h = \lim_n L^n$ أو اختصاراً $L^n \xrightarrow{M-e/h} L$.

وقد برهن $Rockafellar$ [16] وأيضاً $Attouch, Aze, Wets$ [4] بأن هناك تقابل واحد لواحد بين صف الدوال المحدبة – المقعرة المغلقة وبين الدوال القرينة المحدبة الموافقة لها و يتضح ذلك بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة 1 . 1 : [4]

ليكن X, Y فضاءي باناخ انعكاسيين و لتكن $\left\{ L^n : X \times Y \to \overline{R} ; n \in N \right\}$ متتالية من الدوال المحدبة – المقعرة المغلقة ولتكن متتالية الدوال القرينة المحدبة الموافقة لها هي $\left\{ F^n : X \times Y^* \to \overline{R} ; n \in N \right\}$ عندئذٍ الشرطان الآتيان متكافئان :

$$i)\ L^n \xrightarrow{M-e/h} L$$

$$ii)\ F^n \xrightarrow{M-e} F$$

- يُعرَّف المجموع فوق/تحت – البياني $(epi \mid hypo - sum)$ للدالتين المحدبتين – المقعرتين L, K بالعلاقة التالية :

$$\left(L \underset{e|h}{+} K \right)(x,y) = \inf_{u \in X} \sup_{v \in Y} \left\{ L(u,v) + K(x-u, y-v) \right\}$$

$$= \inf_{\substack{u_1,u_2 \in X \\ u_1+u_2=x}} \ \sup_{\substack{v_1,v_2 \in Y \\ v_1+v_2=y}} \left\{ L(u_1,v_1) + K(u_2,v_2) \right\}$$

• يُعرَّف الجداء فوق/تحت – البياني ($epi \,|\, hypo \;-\; multiplication$) للدالة المحدبة– المقعرة L بالعدد $\lambda > 0$ بالعلاقة:

$$\left(\lambda \underset{e|h}{*} L\right)(x\,,y\,) = \lambda L\left(\lambda^{-1}x\,,\lambda^{-1}y\,\right)$$

مبرهنة 2 .1 : [17]

لنرمز بـ $\overline{R}^{X\times Y}$ لمجموعة الدوال المحدبة – المقعرة المعرفة على $X \times Y$ والتي تأخذ قيمها في $\overline{R}$ عندئذٍ البنية $\left(\overline{R}^{X\times Y}\;,\;\underset{e|h}{+}\right)$ تشكل شبه زمرة تبديلية .

مبرهنة 3 .1 : [17]

لتكن $L,K : X \times Y \;\to \overline{R}$, عندئذٍ إذا كانت كل من الدالتين L,K دالة محدبة – مقعرة فإن الدالة $L \underset{e|h}{+} K$ دالة محدبة – مقعرة , وأيضاً من أجل كل $\lambda > 0$ تكون الدالة $\lambda \underset{e|h}{*} L$ دالة محدبة – مقعرة .

مبرهنة 4 .1 : [13]

لتكن $L : X \times Y \;\to \overline{R}$ دالة محدبة – مقعرة , مغلقة تحقق الشروط التالية :

i. يوجد $y_1 \in Y$ بحيث $L\left(.,y_1\right)$ دالة خاصة .

ii. يوجد $y_2 \in Y$ بحيث $L\left(.,y_2\right)$ دالة قسرية .

عندئذٍ : $\inf\limits_{x\in X}\,\sup\limits_{y\in Y} L\left(x\,,y\,\right) = \sup\limits_{y\in Y}\,\inf\limits_{x\in X}\, L\left(x\,,y\,\right)$

سنعتبر الآن أن $(\mathrm{X},\|.\|)$ فضاء خطي منظم قابل للفصل, و B حقل بوريل في X المولد بأسرة المجموعات المفتوحة في X , و μ قياس احتمالي على الفضاء القيوس (Ω,Λ) إذ Λ جبر تام على Ω.

سنعطي بعض المفاهيم حول المجموعات العشوائية [8,15].

• ليكن التطبيق

$$\Gamma : \Omega \;\rightrightarrows\; \mathrm{X}$$
$$\omega \;\leftrightarrow \Gamma(\omega)$$

نقول عن مجموعة قيم التطبيق Γ أنها مجموعة عشوائية مغلقة $(Random\ Closed\ Set)$ إذا كانت $\Gamma(\omega)$ مغلقة مهما تكن ω وكان :

$$\Gamma^{-1}(G) := \left\{\omega \in \Omega \setminus \Gamma(\omega) \cap G \neq \varnothing\right\} \in \Lambda$$

مهما تكن $G \subset \mathrm{X}$ مجموعة مفتوحة .

• إذا كان F صف المجموعات الجزئية المغلقة من X فإن الحقل δ على F هو الجبر التام المولد بصف المجموعات من الشكل :

$$\left\{\left\{D \in F \setminus D \cap G \neq \phi\right\} := F_G\,; G \subset \mathrm{X}\,open\right\} \qquad ....(1)$$

- ليكن التطبيق القابل للقياس $\gamma : \Omega \to F$

عندئذٍ يكون الجبر التام المولد بالمجموعة العشوائية المغلقة $\Gamma(\omega)$ هو: $\Lambda_\Gamma = \gamma^{-1}(\delta)$ إذ δ هو الجبر التام المولد بالمجموعة (1).

- التوزيع المرتبط بالمجموعة العشوائية $\Gamma(\omega)$ يرمز له بـ P_Γ ويعرف بالشكل:

$P_\Gamma(F_G) = \mu\left[\Gamma^{-1}(G)\right]$ لكل مجموعة مفتوحة $G \subset X$.

- تكون Γ_1, Γ_2 مجموعتين عشوائيتين مغلقتين مستقلتين $(Independent)$ إذا كانت الجبور التامة المولدة بهما مستقلة أي:

$$\forall A_1 \in \Lambda_{\Gamma_1}, \forall A_2 \in \Lambda_{\Gamma_2} \Rightarrow \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1).\mu(A_2)$$

وحتى تكون عناصر– أسرة من المجموعات العشوائية المغلقة – مستقلة يجب أن تكون هذه المجموعات مستقلة مثنى مثنى.

- تكون أسرة من المجموعات العشوائية المغلقة موزعة بشكل متطابق $(Identically)$ إذا أنتجت نفس التوزيع على (F, δ) , حيث δ هو الجبر التام المولد بالمجموعة (1).
- تكون أسرة من المجموعات العشوائية المغلقة iid إذا كانت عناصرها تحقق خاصتي الاستقلال والتوزيع المتطابق.
- تكون الدالة $f : X \times \Omega \to R \cup \{\infty\}$ دالة عشوائية نصف مستمرة من الأدنى $(Random\ l.s.c.\ function)$ إذا كان فوق بيانها مجموعة عشوائية مغلقة . أي تكون مجموعة قيم التطبيق $\omega \mapsto epif(.,\omega) : \Omega \rightrightarrows X \times R$ مجموعة عشوائية مغلقة.

وذلك لوجود تقابل واحد لواحد بين الفضاء $SC(X)$(صف الدوال $l.s.c.$ المعرفة على X) وبين الفضاء المؤلف من المجموعات الجزئية المغلقة من $X \times R$.

- إذا كانت f دالة عشوائية نصف مستمرة من الأدنى فإن توزيعها هو التوزيع المرتبط بفوق بيانها أي:

$$P_f = P_{epif}$$

والجبر التام المولد بها هو الجبر التام المولد بفوق بيانها أي:

$$\Lambda_f = \Lambda_{epif}$$

- تكون مجموعة من الدوال العشوائية النصف مستمرة من الأدنى مستقلة بيانياً $(Epi - Independent)$ إذا كانت فوق بياناتها مجموعات عشوائية مغلقة مستقلة.
- تكون مجموعة من الدوال العشوائية نصف المستمرة من الأدنى موزعة بشكل متطابق بيانياً $(Epi - Identically)$ إذا كانت فوق بياناتها موزعة بشكل متطابق .
- تكون مجموعة من الدوال العشوائية $l.s.c$ تحقق خاصة $epi - iid$ إذا كانت عناصرها تحقق خاصتي الاستقلال البياني والتوزيع المتطابق بيانياً أو مجموعة فوق بياناتها تحقق خاصة iid.
- من أجل f دالة عشوائية $l.s.c$ معرفة على $X \times \Omega$ سنشير بـ Ef للتوقع الدالي $(expectation\ functional)$ للدالة f :

$$Ef(x) := \int_\Omega f(x,\omega)\mu(d\omega)$$

• يُعرَّف التكامل فوق البياني للدالة $f\ :\Omega\times X\ \to\overline{R}$ [19] بالعلاقة :

$$\oint epi\ \ f(\omega,.)\mu(d\omega):=\int_{\Omega}epif(\omega,.)\mu(d\omega)$$

إذ

$$\oint f(\omega,x)\mu(d\omega)=\{\ \inf\int_{\Omega}f(\omega,u(\omega))\mu(d\omega)\ ;\int_{\Omega}u(\omega)\mu(d\omega)=x\ \}$$

وتسمى العملية $\oint$ (epi− integral) ويعطى مرافقها بالشكل :

$$\left(\oint f(\omega,.)\mu(d\omega)\right)^{*}(x^{*})=\int_{\Omega}f^{*}(\omega,x^{*})\mu(d\omega)$$

تبين النظرية الآتية قانون الأعداد الكبيرة لمتتالية من الدوال العشوائية نصف المستمرة من الأدنى .

نظرية 5 .1 : [8]

ليكن X فضاء باناخ انعكاسي قابلاً للفصل و (Ω,Λ,μ) فضاءً احتمالياً , ولتكن $\{f^{n}:X\times\Omega\to\overline{R}\ ;n\in N\}$ متتالية من الدوال العشوائية نصف المستمرة من الأدنى المحققة للخاصية $epi-iid$, بحيث تقريبا لكل $\omega\in\Omega$ تكون الدوال $x\to f^{n}(x,\omega)$ منتمية إلى $SCC_{0}(X)$ (أسرة الدوال الخاصة والنصف مستمرة من الأدنى)

عندئذٍ يكون تقريبا في كل مكان :

$$\frac{1}{n}\underset{e}{*}\left[f^{1}(.,\omega)\underset{e}{+}.....\underset{e}{+}f^{n}(.,\omega)\right]\xrightarrow{M-e}\oint f^{1}(.,\omega)\mu(d\omega)$$

النتائج والمناقشة :

سنعطي بعض المفاهيم حول الدوال العشوائية بمتحولين .

نرمز بـ $L_{CCF}\ (X\ \times Y\ )$ لصف الدوال المحدبة– المقعرة المغلقة المعرفة على $X\times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$

• نقول عن الدالة $L:\Omega\times X\ \times Y\ \to\overline{R}$ أنها محدبة– مقعرة عشوائية مغلقة إذا تحقق الشرطان :

i. من أجل كل $\omega\in\Omega$ يكون $L(\omega,.,.)\in L_{CCF}(X\ \times Y\ )$

ii. الدالة $F:\Omega\times X\ \times Y^{\ *}\to\overline{R}$ القرينة للدالة L عشوائية نصف مستمرة من الأدنى .

• ليكن X,Y فضاءي باناخ انعكاسيين و $L^{1},L^{2}:\Omega\times X\ \times Y\ \to\overline{R}$ دالتين عشوائيتين مغلقتين و F^{1},F^{2} الدوال القرينة المحدبة للدوال L^{1},L^{2} على الترتيب .

عندئذٍ تكون الدالتان L^{1},L^{2} $epi\ I\ hypo-iid$ إذا وفقط إذا كانت F^{1},F^{2} $epi-iid$.

• لتكن الدالة $L:\Omega\times X\ \times Y\ \to\overline{R}$ نعرف التكامل فوق/تحت البياني لـ L بالعلاقة:

$$\oint_{h}^{e} L(\omega,x,y)\mu(d\omega)=\left\{\inf\sup\int_{\Omega}L(\omega,u(\omega),v(\omega))\mu(d\omega)\ ;\int_{\Omega}u(\omega)\mu(d\omega)=x\ \&\int_{\Omega}v(\omega)\mu(d\omega)=y\right\}$$

مبرهنة 1 .2 :

لتكن $L:\Omega\times X\times Y\to\overline{R}$ دالة محدبة – مقعرة عشوائية بحيث من أجل كل $\omega\in\Omega$ تكون $L(\omega,.,.)$ محققة لشروط المبرهنة 1.4 عندئذٍ تعطى الدالة القرينة المحدبة العشوائية للدالة $L(\omega,.,.)\mu(d\omega)$ بالعلاقة:

$$\Phi(\omega,x,y^*)=\inf_{x=\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega)}\int F\left(\omega,u(\omega),y^*\right)\mu(d\omega)$$

البرهان:

$$\Phi(\omega,x,y^*)=\sup_{y\in Y}\left\{\int L(\omega,x,y)\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\sup_{y\in Y}\left\{\inf_{\int u(\omega)\mu(d\omega)=x}\sup_{\int v(\omega)\mu(d\omega)=y}\int_\Omega L(\omega,u(\omega),v(\omega))\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\sup_{y\in Y}\inf_{\int u(\omega)\mu(d\omega)=x}\left\{\sup_{\int v(\omega)\mu(d\omega)=y}\int_\Omega L(\omega,u(\omega),v(\omega))\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

لنضع :

$$\varphi(\omega,u,y)=\sup_{\int v(\omega)\mu(d\omega)=y}\int_\Omega L(\omega,u(\omega),v(\omega))\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle$$

إنَّ الدالة $\varphi(\omega,.,y)$ هي عبارة عن غلاف علوي لدالة من $\Gamma(X)$ (أسرة الدوال المحدبة ونصف المستمرة من الأدنى والخاصة) وبالتالي لكل $\omega\in\Omega$ يكون $\varphi(\omega,.,y)\in\Gamma(X)$ أي يتحقق الشرط (i) من المبرهنة 1.4 .

من جهة أخرى لكل $\omega\in\Omega$ لدينا :

$$\varphi(\omega,u,y)\ \geq\ \int_\Omega L(\omega,u(\omega),v(\omega))\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle$$

بوضع $v=y=y_1$ وينتج

$$\varphi(\omega,u,y_1)\ \geq\ \int_\Omega L(\omega,u(\omega),y_1(\omega))\mu(d\omega)+\left\langle y_1,y^*\right\rangle$$

تبيِّن هذه المتراجحة مع فرضية كون $L(\omega,.,.)$ تحقق شروط المبرهنة 1.4 أنَّ $x\to\varphi(\omega,\mathrm{x},y_1)$ دالة قسرية أي تحقق الشرط (ii) من المبرهنة 1.4 وبالتالي يمكننا تطبيق المبرهنة 1.4 ويكون :

$$\sup_Y\inf_X\varphi(\omega,.,.)=\inf_X\sup_Y\varphi(\omega,.,.)$$

$$\Phi(\omega,x,y^*)=\inf_{\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega)=x}\sup_{y\in Y}\left\{\sup_{\int_\Omega v(\omega)\mu(d\omega)=y}\int_\Omega L(\omega,u(\omega),v(\omega))\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\inf_{\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega)=x}\sup_{y\in Y}\left\{\int_\Omega\sup_{\int_\Omega v(\omega)\mu(d\omega)=y}L(\omega,u(\omega),v(\omega))\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\inf_{\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega)=x}\sup_{y\in Y}\left\{\int_\Omega L(\omega,u(\omega),y)\mu(d\omega)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$= \inf_{\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega)=x} \sup_{y\in Y}\left\{\int_\Omega \left(L(\omega,u(\omega),y)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right)\mu(d\omega)\right\}$$

$$= \inf_{\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega)=x} \int_\Omega \sup_{y\in Y}\left(L(\omega,u(\omega),y)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right)\mu(d\omega)$$

ومنه :

$$\Phi(\omega,x,y^*)=\inf_{\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega)=x}\int_\Omega F(\omega,u(\omega),y^*)\mu(d\omega)$$ وهو المطلوب ■

مبرهنة 2 .2 :

لتكن أسرة الدوال المحدبة– المقعرة $\left\{L^1,....,L^n : X\times Y \to \overline{R}\ ;\ n\in N\right\}$ بحيث كل من هذه الدوال يحقق شروط المبرهنة 1.4 عندئذٍ:

$$F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2 ... \underset{e/h}{+} L^n}\left(x,y^*\right)=\left[F_{L^1}\left(.,y^*\right)\underset{e_1}{+}F_{L^2}\left(.,y^*\right)....\underset{e_1}{+}F_{L^n}\left(.,y^*\right)\right](x)$$

حيث $\underset{e_1}{+}$ يعني المجموع فوق البياني بالنسبة للمتحول x .

البرهان:

سنبرهن هذه النظرية بالاستقراء الرياضي.

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=2$:

$$F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2}(x,y^*)=\sup_{y\in Y}\left\{\left(L^1 \underset{e/h}{+} L^2\right)(x,y)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\sup_{y\in Y}\left\{\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L^1(u,v)+L^2(x-u,y-v)\right\}+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

$$=\sup_{y\in Y}\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{L^1(u,v)+L^2(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

بوضع : $$\varphi(u,y)=\sup_{v\in Y}\left\{L^1(u,v)+L^2(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle\right\}$$

نلاحظ أنَّ الدالة $\varphi(.,y)$ عبارة عن غلاف علوي لدالة من $\Gamma(X)$ وبالتالي $\varphi(.,y)\in\Gamma(X)$ أي تحقق الشرط (i) من المبرهنة 1.4 .

من جهة أخرى : $\forall y\in Y \quad \varphi(u,y)\geq L^1(u,v)+L^2(x-u,y-v)+\left\langle y,y^*\right\rangle$

نضع $v=y_1$ ونأخذ $y=y_1+y_2$

ينتج : $$\varphi(u,y_1+y_2)\geq L^1(u,y_1)+L^2(x-u,y_2)+\left\langle y_1+y_2,y^*\right\rangle$$

تبيِّن المتراجحة الأخيرة مع فرضية كون L^1,L^2 يحققان شروط المبرهنة 1.4 أنَّ الدالة $x\to\varphi(x,y_1+y_2)$ هي دالة قسرية أي تحقق الشرط (ii) من 1.4 وبالتالي يمكن أن نطبق هذه المبرهنة ونكتب :

$$\sup_{y\in Y}\inf_{u\in X}\varphi=\inf_{u\in X}\sup_{y\in Y}\varphi$$

ومنه :

$$F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2}(x,y^*) = \inf_{u\in X} \sup_{y\in Y} \sup_{v\in Y} \left\{ L^1(u,v) + L^2(x-u, y-v) + \left\langle y, y^* \right\rangle \right\}$$

$$= \inf_{u\in X} \sup_{y\in Y} \sup_{v\in Y} \left\{ L^1(u,v) + \left\langle v, y^* \right\rangle + L^2(x-u, y-v) + \left\langle y-v, y^* \right\rangle \right\}$$

$$= \inf_{u\in X} \sup_{v\in Y} \left\{ L^1(u,v) + \left\langle v, y^* \right\rangle + \sup_{y\in Y} \left\{ L^2(x-u, y-v) + \left\langle y-v, y^* \right\rangle \right\} \right\}$$

$$= \inf_{u\in X} \sup_{v\in Y} \left\{ L^1(u,v) + \left\langle v, y^* \right\rangle + F_{L^2}(x-u, y^*) \right\}$$

$$= \inf_{u\in X} \left\{ \sup_{v\in Y} \left\{ L^1(u,v) + \left\langle v, y^* \right\rangle \right\} + F_{L^2}(x-u, y^*) \right\}$$

$$= \inf_{u\in X} \left\{ F_{L^1}(u, y^*) + F_{L^2}(x-u, y^*) \right\}$$

$$F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2}(x,y^*) = \left[F_{L^1}(., y^*) \underset{e_1}{+} F_{L^2}(., y^*) \right](x)$$

والعلاقة محققة من أجل $n = 2$.

نفرض صحة العلاقة من أجل $n-1$ أي: $F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2 \dots \underset{e/h}{+} L^{n-1}} = F_{L^1} \underset{e_1}{+} F_{L^2} \dots \underset{e_1}{+} F_{L^{n-1}}$ محققة .

ونبرهن صحة العلاقة من أجل n .

بما أن $\underset{e/h}{+}$ تجميعية حسب المبرهنة 2 .1 فإن

$$F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2 \dots \underset{e/h}{+} L^n} = F_{(L^1 \underset{e/h}{+} \dots \underset{e/h}{+} L^{n-1}) \underset{e/h}{+} L^n}$$

وبما أن المجموع فوق/تحت البياني لدوال محدبة- مقعرة هو دالة محدبة- مقعرة حسب المبرهنة 3 .1 والعلاقة محققة من أجل $n = 2$ فإن:

$$F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2 \dots \underset{e/h}{+} L^n} = F_{(L^1 \underset{e/h}{+} \dots \underset{e/h}{+} L^{n-1})} \underset{e_1}{+} F_{L^n}$$

والعلاقة محققة من أجل $n-1$

ومنه : $F_{L^1 \underset{e/h}{+} L^2 \dots \underset{e/h}{+} L^n} = F_{L^1} \underset{e_1}{+} F_{L^2} \dots \underset{e_1}{+} F_{L^n}$ وهو المطلوب ■

مبرهنة 3 .2 :

لتكن $L : X \times Y \to \overline{R}$ دالة محدبة- مقعرة عندئذٍ:

$$F_{\frac{1}{n} \underset{e/h}{*} L}(x, y^*) = \left[\frac{1}{n} \underset{e_1}{*} F_L(., y^*) \right](x)$$

<u>البرهان:</u>

$$F_{\frac{1}{n} \underset{e/h}{*} L}(x, y^*) = \sup_{y\in Y} \left\{ \left(\frac{1}{n} \underset{e/h}{*} L \right)(x,y) + \left\langle y, y^* \right\rangle \right\}$$

$$= \sup_{y\in Y} \left\{ \frac{1}{n} L(nx, ny) + \left\langle y, y^* \right\rangle \right\}$$

$$F_{\frac{1}{n} \underset{e/h}{*} L}\left(x, y^*\right) = \frac{1}{n} \sup_{y \in Y}\left\{L\left(nx, ny\right) + \left\langle ny, y^*\right\rangle\right\}$$
$$= \frac{1}{n} F_L\left(nx, y^*\right) = \left[\frac{1}{n} \underset{e_1}{*} F_L\left(., y^*\right)\right](x)$$

وهو المطلوب ■

ينتج من المبرهنتين السابقتين النتيجة الآتية :

نتيجة 4 .2 :

لتكن أسرة الدوال المحدبة– المقعرة $\left\{L^1, \dots, L^n : X \times Y \to \overline{R}\ , n \in N\right\}$ بحيث كل من هذه الدوال يحقق شروط المبرهنة 1.4 عندئذٍ:

$$F_{\frac{1}{n} \underset{e/h}{*}\left(L^1 \underset{e/h}{+} L^2 \dots \underset{e/h}{+} L^n\right)}\left(x, y^*\right) = \frac{1}{n} \underset{e_1}{*}\left(F_{L^1}\left(., y^*\right) \underset{e_1}{+} F_{L^2}\left(., y^*\right) \dots \underset{e_1}{+} F_{L^n}\left(., y^*\right)\right)(x)$$

نظرية 5 .2 :

ليكن X, Y فضاءي باناخ انعكاسيين قابلين للفصل , و (Ω, Λ, μ) فضاء احتمالي ولتكن $\left\{L^n : \Omega \times X \times Y \to \overline{R}; n \in N\right\}$ متتالية من الدوال العشوائية $epi \mid hypo - iid$ بحيث تقريباً لكل $\omega \in \Omega$ ولكل $n \in N$ يكون $L^n(\omega, ., .) \in L_{CCF}(X \times Y)$ و زيادة على ذلك نفرض أنَّ :

i. من أجل كل $y \in Y$: $x \to L^n(\omega, x, y)$ دالة شبه قسرية .

ii. من أجل كل متتالية $(x_n)_{n \in N}$ محدودة في X يكون :

$\Psi^n(\omega, x_n, .) = \frac{1}{n} \underset{e_2}{*}\left[F^1(\omega, x_n, .) \underset{e_2}{+} \dots \underset{e_2}{+} F^n(\omega, x_n, .)\right]$ دالة شبه مستمرة على Y^* .

إذ $\underset{e_2}{+}$ يعني المجموع فوق البياني بالنسبة للمتحول y^* .

عندئذٍ تقريباً في كل مكان لدينا :

$$\frac{1}{n} \underset{e/h}{*}\left[L_1(\omega, ., .) \underset{e/h}{+} \dots \underset{e/h}{+} L_n(\omega, ., .)\right] \xrightarrow{M-e/h} \oint_{e/h} L_1(\omega, ., .)\mu(d\omega)$$

<u>البرهان :</u>

نفرض $\Phi^n(\omega, ., .)$ الدالة القرينة العشوائية المحدبة للدالة : $\frac{1}{n} \underset{e/h}{*}\left[L^1(\omega, ., .) \underset{e/h}{+} \dots \underset{e/h}{+} L^n(\omega, ., .)\right]$

و $\Phi(\omega, ., .)$ الدالة القرينة العشوائية المحدبة للدالة : $\oint_{e/h} L^1(\omega, ., .)\mu(d\omega)$

وحسب النتيجة 2.4 :

$$\Phi^n\left(\omega, x, y^*\right) = \frac{1}{n} \underset{e_1}{*}\left[F^1\left(\omega, ., y^*\right) \underset{e_1}{+} \dots \underset{e_1}{+} F^n\left(\omega, ., y^*\right)\right](x)$$

وبالاعتماد على المبرهنة 2.1 :

$$\Phi(\omega, x, y^*) = \inf_{\int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega) = x} \int_\Omega F^1(\omega, u(\omega), y^*)\mu(d\omega)$$

وبما أن المتتالية $\left\{L^n\left(\omega,.,.\right);n\in N\right\}$ هي متتالية من الدوال العشوائية المحدبة-المقعرة المغلقة و $epi\setminus hypo-iid$ عندئذٍ تكون $\left\{F^n\left(\omega,.,y^*\right);n\in N\right\}$ متتالية من الدوال العشوائية المحدبة نصف المستمرة من الأدنى و $epi-iid$ لكل $y^*\in Y^*$.

وبتطبيق النظرية 1.5 نحصل من أجل كل $y^*\in Y^*$ على مجموعة مهملة N_{y^*} ومن أجل كل $\omega\in\Omega\setminus N_{y^*}$ يكون :

$$\frac{1}{n}\underset{e_1}{*}\left[F^1\left(\omega,.,y^*\right)\underset{e_1}{+}.....\underset{e_1}{+}F^n\left(\omega,.,y^*\right)\right]\xrightarrow{M-e_1}\oint_{e_1}F^1\left(\omega,.,y^*\right)\mu(d\omega)\qquad(2)$$

لكن نحن نحتاج وفق المبرهنة 1.1 لبرهان أن :

$$\frac{1}{n}\underset{e}{*}\left[F^1\left(\omega,.,.\right)\underset{e}{+}.....\underset{e}{+}F^n\left(\omega,.,.\right)\right]\xrightarrow{M-e}\oint_e F^1\left(\omega,.,.\right)\mu\left(d\omega\right)$$

بوضع :

$$\Psi^n\left(\omega,.,.\right)=\frac{1}{n}\underset{e}{*}\left[F^1\left(\omega,.,.\right)\underset{e}{+}.....\underset{e}{+}F^n\left(\omega,.,.\right)\right]$$
$$\Psi\left(.,.\right)=\oint_e F^1\left(\omega,.,.\right)\mu\left(d\omega\right)$$

ولنبرهن شرطي تقارب موسكو فوق البياني الآتيين:

$$\left(1^\circ\right)\ \forall\left(x,y^*\right)\in X\times Y^*,\forall\left(x_n,y_n^*\right)\xrightarrow{w}\left(x,y^*\right):\liminf_n\ \Psi^n\left(\omega,x_n,y_n^*\right)\geq\Psi\left(x,y^*\right)$$
$$\left(2^\circ\right)\forall\left(x,y^*\right)\in X\times Y^*,\exists\left(x_n,y_n^*\right)\xrightarrow{s}\left(x,y^*\right):\limsup_n\Psi^n\left(\omega,x_n,y_n^*\right)\leq\Psi\left(x,y^*\right)$$

برهان الشرط $\left(1^\circ\right)$:

لتكن $\left(y_k^*\right)$ متتالية كثيفة في Y^* عندئذٍ من أجل كل $k\in N$ يوجد مجموعة مهملة N_k بحيث تكون العلاقة (2) محققة من أجل كل y_k^* لنضع $N=\bigcup_{k\in N}N_k$ و لتكن $\omega\in N$ عندئذٍ بما أنَّ $x_n\xrightarrow{w}x$ تكون $\left(x_n\right)_{n\in N}$ محدودة أي يوجد عدد $\rho\in R$ بحيث $\left\|x_n\right\|\leq\rho$ وحسب الفرض ii يكون $\Psi^n\left(\omega,x_n,.\right)$ دالة شبه مستمرة على Y^* فهي شبه مستمرة عند كل نقطة $y_0^*\in Y^*$ وبالتالي لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\left\|y_k^*-y_n^*\right\|>0$ بحيث لكل $n\in N$ و $\left\|y^*-y_0^*\right\|\leq\left\|y_k^*-y_n^*\right\|$ يكون

$$\left|\Psi^n\left(\omega,x_n,y^*\right)-\Psi^n\left(\omega,x_n,y_0^*\right)\right|\leq\varepsilon$$

أي :

$$\ell_p\left(\left\|y_k^*-y_n^*\right\|\right)=\sup_{\substack{\|x_n\|\leq\rho\\ \|y^*-y_0^*\|\leq\|y_k^*-y_n^*\|}}\left|\Psi^n\left(\omega,x_n,y^*\right)-\Psi^n\left(\omega,x_n,y_0^*\right)\right|$$

عندئذٍ يكون :

$$\ell_p\left(\left\|y_k^*-y_n^*\right\|\right)\geq\Psi^n\left(\omega,x_n,y_k^*\right)-\Psi^n\left(\omega,x_n,y_n^*\right)$$

وبالتالي :

$$\Psi^n\left(\omega,x_n,y_n^*\right)\ge\Psi^n\left(\omega,x_n,y_k^*\right)-\ell_p\left(\left\|y_k^*-y_n^*\right\|\right)$$

بجعل y_k^* تتقارب نحو y^* عندما $k\to\infty$ يكون :

$$\Psi^n\left(\omega,x_n,y_n^*\right)\ge\Psi^n\left(\omega,x_n,y^*\right)-\ell_p\left(\left\|y^*-y_n^*\right\|\right)$$

وبأخذ النهاية الدنيا على n للعلاقة السابقة :

$$\liminf_n\Psi^n\left(\omega,x_n,y_n^*\right)\ge\liminf_n\Psi^n\left(\omega,x_n,y^*\right)\qquad(3)$$

وبالاستفادة من العلاقة (2) يكون الشرط الأول من تقارب موسكو فوق البياني محقق أي :

$$\forall\left(x,y^*\right)\in X\times Y^*,\forall(x_n,y^*)\xrightarrow{w}(x,y^*):\liminf_n\Psi^n\left(\omega,x_n,y^*\right)\ge\Psi\left(x,y^*\right)$$

نعوض العلاقة السابقة في (3) :

$$\liminf_n\Psi^n\left(\omega,x_n,y_n^*\right)\ge\Psi\left(x,y^*\right)$$

ومنه تحقق الشرط $\left(1^\circ\right)$.

برهان الشرط $\left(2^\circ\right)$:

بما أن العلاقة (2) محققة من أجل كل $y^*\in Y^*$ فإنَّ الشرط الثاني من تقارب موسكو فوق البياني محقق أي:

$$\forall\left(x,y^*\right)\in X\times Y^*,\exists(x_n,y^*)\xrightarrow{s}(x,y^*):\limsup_n\Psi^n\left(\omega,x_n,y^*\right)\le\Psi\left(x,y^*\right)$$

وبالتالي بوضع $\left(x_n,y_n^*\right)=\left(x_n,y^*\right)$ يتحقق الشرط $\left(2^\circ\right)$.

وهو المطلوب ■

الاستنتاجات والتوصيات:

تمت في هذه الدراسة مناقشة قانون الأعداد الكبيرة للدوال المحدبة – المقعرة العشوائية المغلقة في فضاءات باناخ انعكاسية وتحت شروط محددة و لأهمية هذا النوع من المسائل ننصح بأن تناقش هذه الدراسة في فضاءات أكثر عمومية مثل فضاءات باناخ غير انعكاسية و الفضاءات التبولوجية العامة .

المراجع :

[1] ARTSTEIN,Z. ; HART,S. *: Law of large numbers for random sets and allocation processes*, Mathematics of Operations Research 6 (1981), 482-492 .

[2] ARTSTEIN,Z.; VITALE,R.A. : *A strong law of large numbers for random compact sets*, The Annals of Probability, vol. 3, no. 5(1975), 879–882 .

[3] ATTOUCH, H. : *Variational convergence for functions and operators*, Pitman, London, 1984, 420.

[4] ATTOUCH,H. ; AZE,D. ; WETS,R. : *Convergence of convex-concave saddle functions*, Ann. H.Poincare, Analyse non linéaire, 5, 1988, 532-572.

[5] ATTOUCH,H. ; AZE,D. ; WETS,R. : *On continuity properties of the partial Legendre- Fenchel Trasform* : *Convergence of sequences augmented Lagrangian functions , Moreau- Yoshida approximates and subdiffferential operators*, FERMAT Days 85: Mathematics for Optimization, 1986.

[6] ATTOUCH, H. ; WETS,R. : *A convergence theory of saddle functions* ,Transactions of the American Mathematical Society 280, n (1), 1983 , 1-41.

[7] ATTOUCH,H. ; WETS,R. : *Epigraphic analysis*, *analyse non linéaire*, Gauthiers-villars, paris, 1989, 74-99.

[8] ATTOUCH,H ; WETS,R. : *Epigraphical processes*: *Laws of large numbers for random lsc functions*, Preprint February 1991 .

[9] BAGH, A. : *On the convergence of min/sup problems in some optimal control problems* .Journal of abstract and applied analysis , vol.6 ,N1,2001 , 53-71 .

[10] Castaing,C. ; Valadier,M. : *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics 580, Berlin, 1977 .

[11] Hiai,F. : *Strong laws of large numbers for multivalued random variables*, in Multifunctions and Integrals, G. Salinetti, ed., Springer-Verlag, Berlin, 1984, 160-172, (Lecture Notes in Mathematics 1091) .

[12] JOFER, A. ; WETS, R. : *Variational convergence of bivariate function* , Lopsided convergenc. Math. Program. 116 (2009), no. 1-2, Ser. B, 275-295 .

[13] MOREAU, J.J. : *Theoreme "inf-sup"* C.R.A.S.T. 285, 1964 , 2720-2722 .

[14] ROCKAFELLAR,R. : *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton N. J, 1970, 446 .

[15] ROCKAFELLAR,R. : *Integral functionals*, *normal integrands, and measurable selections*, *in Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, J.-P. Gossez & L.Waelbroeck, eds., Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics, no. 543, Berlin, 1976, 157-207 .

[16] ROCKAFELLAR, R. ; WETS, R. : *variational analysis*, 2en, Springer, New York, 2004.

[17] Soueycatt , Mohamed ; Alkhamir , Nisreen : *On $\varepsilon-$ saddle points of min\max* problems ,Tishreen University Journal, To be published 2012 .

[18] Taylor, RL.; Inoue, H. : *Laws of large numbers for random sets. Random Sets* (Minneapolis, MN,1996), pp.347-360.Springer, New York, NY,USA (1997) .

[19] Valadier,M. : *Intégration de convexes fermés notamment d'épigraphes. Inf-convolution continue*, Revue Francaise d'Automatique, d'Informatique et de Recherche Opérationelle (R.I.R.O.) 4-e an née R-2 (1970), 57-73 .