مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية ـ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (3) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (3) 2012

الحل الفعال لجمل المعادلات الخطية التي معاملاتها مصفوفات محدودة

الدكتور أحمد الكردي*
الدكتور محمد الشيخ**

(تاريخ الإيداع 26 / 4 / 2012. قُبِل للنشر في 18 / 9 /2012)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو دراسة مسألة حل جمل المعادلات الخطية التي معاملاتها مصفوفات محدودة مربعة من المرتبة n. تظهر هذه الأنواع من جمل المعادلات في العديد من مجالات الرياضيات التطبيقية و في نظرية التحكم و تحليل الاهتزازات و في الفيزياء و الهندسة.

نحاول في هذه المقالة أن نصف خوارزميات فعالة لحل النوع المدروس من جمل المعادلات بحيث نحافظ على العناصر اللاصفرية الأصلية في مصفوفة الأمثال لنحصل بالنتيجة على جملة معادلات خطية سهلة الحل أكثر من الجملة الأصلية. تعتمد الخوارزميات المقترحة على الأفكار:

1. إيجاد بنية لاصفرية جديدة للمصفوفة المحدودة بحيث يمكن تطبيق طريقة التحليل لنحصل على مصفوفة جديدة لا تحوي عناصر لاصفرية إضافية هي بالأصل عناصر صفرية في المصفوفة المحدودة .

2. تجزئة المصفوفة الحدودية إلى مصفوفة كتلية مربعة من المرتبة الثانية سهلة الحل و لا تتضمن عناصر لاصفرية إضافية باستثناء العناصر اللاصفرية للمصفوفة المحدودة.

الكلمات المفتاحية: مصفوفة محدودة ، بنية لاصفرية ، جملة معادلات خطية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية ـ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (3) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (3) 2012

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – حمص – سورية.
** مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

Efficient Solution of Linear Systems of Equations Whose Coefficients Matrices are Bordered

Dr. Ahmad Al-Kurdi*
Dr. Mohammad Al Cheikh**

(Received 26 / 4 / 2012. Accepted 18 / 9 /2012)

□ ABSTRACT □

In this paper, we consider the problem of solving linear equations systems whose coefficients matrices are bordered and square of order n . Such systems appear in several applications of applied mathematics, control theory and oscillations analysis, physics and engineering. We describe efficient algorithms to solve such systems such that no extra nonzeros in the bordered matrix to obtain linear system of equations to solve easier than the original system. The proposed algorithms depend on the ideas:

1. Finding new sparsity structure of the ordered matrix such that we can apply the factorization method to obtain new matrix that does not contain extra nonzeros.

2. Portioning the matrix into block matrix of order 2 easier to solve and no including extra nonzero elements containing no nonzero elements of bordered matrix.

Key words: Bordered matrix, sparsity structure, Linear System of Equations.

***Associate Professor, Dept. of Mathematics, Faculty of Sciences, Al-Baath University, Homs, Syria.**
****Professor, Dept. of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

ما يحدث غالبا أن مصفوفة ما تتمتع بخواص معينة. يجب أن نأخذ بعين الحسبان هذه الخواص عندما ندرس تطوير خوارزميات جديدة لحل المسائل التي تتضمن مثل هذا النوع من المصفوفات.

في هذه المقالة، ندرس مسألة حل جمل المعادلات الخطية لمصفوفات أمثالها حدودية (**bordered**) غير متناظرة من الشكل

$$Ax = d \qquad \textbf{(1)}$$

حيث A هي مصفوفة غير متناظرة مربعة نظامية من المرتبة n تأخذ الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & & c_2 & & & & \\ . & & & . & & & \\ . & & & & . & & \\ b_{n-2} & & & & & c_{n-2} & \\ b_{n-1} & & & & & & c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

حيث $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ و $d = [d_1, d_2, ..., d_n]^T$ و $b = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}]^T$ ، $c = [c_1, c_2, ..., c_{n-1}]^T$ و $a = [a_1, a_2, ..., a_n]^T$.

تؤدي المصفوفات الحدودية (**Bordered**) دورا هاما في العديد من مجالات الرياضيات التطبيقية ، فمثلا في البرمجة التربيعية بقيود المساواة و بعض أنواع الاستيفاء ببعدين و إيجاد المعكوس العام للمصفوفات و غيرها [1−5]. علاوة على ذلك، يظهر هذا الصف من المصفوفات في العديد من التطبيقات التي نصادفها في نظرية التحكم و تحليل الاهتزازات [6−9] و في الفيزياء التي تتضمن الانتقال اللاإشعاعي في الجزيئات المعزولة و غيرها [10] و في الهندسة [11−13] أيضا.

يمكن تخزين المصفوفة (2) باستخدام ثلاث متجهات هي $b = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}]^T$ ، $c = [c_1, c_2, ..., c_{n-1}]^T$ و $a = [a_1, a_2, ..., a_n]^T$ من المرتبة $n-1$ ، $n-1$ و n على الترتيب. أي أننا نحتاج إلى ذاكرة لتخزين $3n-2$ عنصرا لاصفريا.

إحدى الطرائق المعروفة لحل (1) هو كتابة المصفوفة (2) بتطبيق طريقة تحليل LU، أي بالشكل [14−16]:

$$A = LU \qquad (3)$$

بما أن المصفوفة (2) كثيرة الأصفار محددة البنية الصفرية ، فإنه لا يمكن تطبيق تحليل LU على المصفوفة (2) لنحصل على المعاملين L و U حيث إنهما كثيرا الأصفار أيضا. إذ إنه لا يمكن تطبيق هذه الطريقة دوماً للأسباب التالية: في الخطوة الأولى من تطبيق طريقة تحليل LU ، فإننا نضيف جداء السطر الأول إلى كل سطر من الأسطر المتبقية لجعل جميع العناصر في العمود الأول تحت القطر الرئيس أصفاراً. إنها كارثة! لقد أصبحت المصفوفة كثيفة تحوي $n(n-1)+1$ عنصراً لاصفرياً بدلاً من $3n-2$ [14−16]. لذا نحاول في هذه المقالة أن

نصف خوارزميات فعالة بحيث نحافظ على العناصر اللاصفرية الأصلية في المصفوفة A لنحصل بالنتيجة على جملة معادلات خطية سهلة الحل أكثر من الجملة الأصلية. تعتمد هذه الخوارزمية على فكرتين أساسيتين هما:

1. إيجاد بنية لاصفرية جديدة للمصفوفة (2) بحيث يمكن تطبيق طريقة التحليل لنحصل على مصفوفة جديدة لا تحوي عناصر لاصفرية إضافية هي بالأصل عناصر صفرية في المصفوفة (2).

2. تجزئة المصفوفة A إلى مصفوفة كتلية مربعة من المرتبة الثانية سهلة الحل و لا تتضمن عناصر إضافية باستثناء العناصر اللاصفرية في المصفوفة (2).

أهمية البحث وأهدافه:

نقدم في هذه المقالة خوارزميات فعالة لحل جمل المعادلات الخطية التي مصفوفات أمثالها محددة البنية اللاصفرية تدعى بالمصفوفات الحدودية. تعتمد هذه الخوارزميات على تحديد بنية لاصفرية جديدة لمصفوفة أمثال الجملة المدروسة بحيث يمكن تطبيق طريقة التحليل على البنية الجديدة دون أن تظهر أية عناصر لاصفرية جديدة. علاوة على ذلك، يمكن تجزئة المصفوفة الحدودية بحيث نتفادى ظهور أية عناصر لاصفرية إضافية و نحصل على جملة معادلات سهلة الحل. نجري العديد من تجارب المحاكاة العددية لتوضيح فعالية الخوارزميات المقترحة مقارنة بطريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفة (2).

طرائق البحث ومواده:

نستخدم طريقة الاستنتاج المباشر بالإضافة إلى بعض الخوارزميات .

النتائج والمناقشة:

(I) الخوارزمية الأولى: خوارزمية تحليل المصفوفة (2)

نصف في هذه الفقرة خوارزمية تتضمن خوارزميتين إحداهما لإيجاد البنية اللاصفرية لمصفوفة الحذف والأخرى لتطبيق عملية الحذف.

الخوارزمية 1. حساب البنية اللاصفرية للمصفوفة U

في هذه الفقرة، نقدم خوارزمية تتألف من الخطوتين التاليتين:

1. الخطوة 1: تحديد البنية اللاصفرية للمصفوفة المثلثية العلوية U قبل أن نبدأ بتطبيق عملية التحليل على المصفوفة (2) لإيجاد U.

2. الخطوة 2: تطبيق عملية التحليل على المصفوفة (2) لإيجاد U.

الهدف من حساب البنية اللاصفرية لتحليل المصفوفة (2) هو تجنب العمل على عناصر صفرية ومحاولة لتخفيض عدد العناصر fill–ins الذي له تأثير في مقدار التخزين و عدد العمليات الحسابية المطلوبة لتحليل المصفوفة (2). نحاول أن نوجد طريقة لحساب أدلة العناصر اللاصفرية قبل أن نبدأ بإيجاد تحليل المصفوفة (2) لأنه يعتمد على بنية المصفوفة و ليس على قيمة العناصر اللاصفرية. يمكن معالجة كل شيء ببنية معطيات ثابتة ندعوها بالتحليل الرمزي. هدفنا هنا تحديد متطلبات الذاكرة للمعامل U قبل أن يبدأ تحليل المصفوفة (2) و من ثم إيجاد U بحيث يكون عدد العناصر اللاصفرية في U هو تماماً العدد نفسه في (2). تتضمن الفكرة الأساسية في إيجاد خوارزمية

لإعادة كتابة المصفوفة (2) بشكل جديد بحيث نحصل على البنية اللاصفرية للمصفوفة U. نوضح فيما يلي هذه الأفكار تمهيداً لاشتقاق الخوارزمية 1

لنأخذ المصفوفة (2) من المرتبة الرابعة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

بتطبيق خطوة واحدة من حذف غاوس على المصفوفة (3) نحصل على المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

بمتابعة تطبيق حذف غاوس نحصل على المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

نلاحظ أن خطوة الحذف الأولى في (4) تولد عناصر لاصفرية بدلا من العناصر الصفرية في (2). و هكذا فإن الحاسوب يستبدل الأصفار في العمود الأول من المصفوفة (3) بالمضاريب (العناصر المستخدمة لحذف العناصر الواقعة تحت القطر الرئيس). العناصر اللاصفرية المتولدة خلال عملية الحذف تسمى العناصر fill–ins. مما سبق نستنتج أن المصفوفات من النوع (2) تعاني من العناصر fill–ins. إذ تصبح المصفوفة كاملة ممتلئة بهذه العناصر التي تتطلب ذاكرة إضافية في الحاسوب لتخزينها. عدد العناصر fill–ins هو $n^2-(3n-2)$. فإذا كانت n كبيرة جدا ، فإن ذلك يتطلب تخزين $3n-2$ عنصراً لاصفرياً تمثل عناصر المصفوفة (2) بالإضافة إلى العناصر fill–ins مما يتطلب تخزين n^2 عنصراً وهذا غير مقبول. لذا نحاول أن نجري تحويلات أولية على المصفوفة (2) بحيث نحول البنية اللاصفرية للمصفوفة (2) إلى شكل نستطيع أن نطبق عليه عملية الحذف دون أن تظهر العناصر fill–ins مما يعني اقتصار التخزين في ذاكرة الحاسوب فقط على العناصر اللاصفرية في المصفوفة (2). نشرح فيما يلي خوارزمية إيجاد البنية اللاصفرية للمصفوفة U قبل تطبيق عملية الحذف:

(A) خوارزمية 1: إيجاد البنية اللاصفرية للمصفوفة U

نلخص خطوات هذه الخوارزمية كما يلي:

الخطوة I: نبادل بين السطر الأول و السطر الأخير في المصفوفة (2) و المركبة الأولى و المركبة الأخيرة في المتجه d فنحصل على جملة معادلات تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} b_{n-1} & & & & & & c_{n-1} \\ b_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & & c_2 & & & & \\ . & & & . & & & \\ . & & & & . & & \\ b_{n-2} & & & & & c_{n-2} & \\ a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-1} \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

الخطوة II: نبادل بين المتغيرين x_1 و x_n فنحصل على جملة تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & & b_{n-1} \\ & c_1 & & & & & b_1 \\ & & c_2 & & & & b_2 \\ & & & . & & & . \\ & & & & . & & . \\ & & & & & c_{n-2} & b_{n-2} \\ a_n & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

من المعادلة (7) نجد أننا حصلنا على مصفوفة بنيتها اللاصفرية هي البنية اللاصفرية للمصفوفة نفسها(2) مما يعني أن عدد العناصر اللاصفرية لا يزال $3n-2$.

خوارزمية 2. حل الجملة (1).

الخطوة 1: تطبيق الخوارزمية 1 لتحويل المصفوفة الحدودية من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & & c_2 & & & & \\ . & & & . & & & \\ . & & & & . & & \\ b_{n-2} & & & & & c_{n-2} & \\ b_{n-1} & & & & & & c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

إلى الشكل:

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & & b_{n-1} \\ & c_1 & & & & & b_1 \\ & & c_2 & & & & b_2 \\ & & & . & & & . \\ & & & & . & & . \\ & & & & & c_{n-2} & b_{n-2} \\ a_n & a_2 & a_3 & . & . & a_{n-1} & a_1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

الخطوة 2 : تحليل المصفوفة (14) بالشكل (12) وفق العلاقات (11) فنحصل على:

$$U = \begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & c_1 & & & & b_1 \\ & & c_2 & & & b_2 \\ & & & . & & . \\ & & & & . & . \\ & & & & c_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & & a_1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

الخطوة 3 : حل جملة معادلات مصفوفات أمثالها (15) وفق طريقة التعويض التراجعي و تعطى بالخوارزمية التالية:

من البنية اللاصفرية للمصفوفة U يمكننا أن نكتب خوارزمية حل الجملة

$$U\tilde{x} = \tilde{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & c_1 & & & & b_1 \\ & & c_2 & & & b_2 \\ & & & . & & . \\ & & & & . & . \\ & & & & c_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_1 \end{bmatrix}$$

كما يلي:

$$x_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

$$\text{for } i = n - 2 \text{ to } 1$$

$$\mathrm{x}_{i+1} = \frac{d_{i+1} - b_i x_1}{c_i}$$

$$\mathrm{x}_n = \frac{d_n - b_{n-1} x_1}{c_{n-1}}$$

تعقيد الخوارزمية I

تتطلب خطوة كتابة المصفوفة (13) بالشكل (14) ما يقارب n عملية تبديل. أما خطوة التحليل (15) فتتضمن ما يقارب $3n-3$ عملية حسابية باستخدام العلاقات (11). أما الخوارزمية 2 فتتطلب $3n-2$ عملية حسابية. أخيرا، تتطلب الخوارزمية الأولى جهداً حسابياً مقداره $6n-5$ عملية حسابية وهو أقل بكثير من n^3 تعقيد حل (1) وفق حذف غاوس دون إيجاد البنية اللاصفرية للمصفوفة U.

(II) الخوارزمية الثانية: خوارزمية تجزئة المصفوفة (14)

نصف في هذه الفقرة خوارزمية تتضمن تجزئة المصفوفة (14) فنحصل على جملة معادلات خطية سهلة الحل أكثر من الجملة الأصلية. تعتمد هذه الخوارزمية على فكرة أساسية تتضمن تجزئة المصفوفة (14) كما هو مبين في وصف الخوارزمية التالية:

لتكن $\tilde{A}$ مصفوفة حدودية غير متناظرة مربعة من المرتبة n كما هي معطاة في الشكل (14). بما أن المصفوفة (14) ذات بنية صفرية محددة ، فإنه يمكن تطوير خوارزمية فعالة لحل

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & & b_{n-1} \\ & c_1 & & & & & b_1 \\ & & c_2 & & & & b_2 \\ & & & . & & & . \\ & & & & . & & . \\ & & & & & c_{n-2} & b_{n-2} \\ a_n & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

تأخذ بعين الحسبان الشكل الخاص لمصفوفة أمثالها (14). هذه الخوارزمية هي كما يلي:

ندخل الرموز التالية:

$V=[b_{n-1}\ b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b_{n-2}]^T$ ، $f_1=[d_n,d_2,d_3,...,d_{n-1}]^T$ ، $f_2=[d_1]^T$ ، $d=[f_1,f_2]^T$

$\tilde{y}=[x_n,x_2,x_3,...,x_{n-1}]^T$. $\hat{y}=[x_1]^T$ ، و $x=[\tilde{y},\hat{y}]^T$ ، $U^T=[a_n\ a_2\ a_3\ .\ .\ a_{n-1}]$

وفقاً للرموز المدخلة أعلاه يمكننا كتابة الجملة (16) على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} T & V \\ U^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

حيث T هي مصفوفة قطرية مربعة من المرتبة $n-1$ تنتج من المصفوفة (14) بحذف السطر الأخير و العمود الأخير و تعطى بالشكل التالي:

$$T = \begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & \\ & c_1 & & & & \\ & & c_2 & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & . \\ & & & & & & c_{n-2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

و $Q=[a_1]$. تكافئ (16) الجملة التالية:

$$\begin{aligned} T\tilde{y}+V\hat{y} &= f_1 \\ U^T\tilde{y}+Q\hat{y} &= f_2 \end{aligned} \tag{19}$$

بحذف $\hat{y}$ من (19) نحصل على:

$$\hat{y}=Q^{-1}\left(f_2-U^T\tilde{y}\right) \tag{20}$$

بالتعويض في المعادلة الأولى من (19) نحصل على الجملة التالية:

$$T\tilde{y} + VQ^{-1}\left(f_2 - U^T\tilde{y}\right) = f_1 \Rightarrow \left(T - VQ^{-1}U^T\right)\tilde{y} = f_1 - VQ^{-1}f_2 \qquad (21)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل المختصر التالي:

$$\begin{aligned} &G\tilde{y} = f \\ &G = T - VQ^{-1}U^T \ \ \& \ \ f = f_1 - VQ^{-1}f_2 \end{aligned} \qquad (22)$$

نحاول فيما يلي الاستفادة من صيغة **Woodbury** لحل الجملة (22) كما يلي:

لتكن F مصفوفة مربعة من المرتبة n و لتكن $B\ ,\ C$ مصفوفتين من المرتبة $(n \le m)$ $n \times m$. إذا كانت المصفوفة $I_m + B^T F^{-1} C$ نظامية ، فإن المصفوفة $F + CB^T$ هي نظامية أيضا. علاوة على ذلك، يعطى معكوس المصفوفة $F + CB^T$ صراحة بالصيغة التالية:

$$\left(F + CB^T\right)^{-1} = F^{-1} - F^{-1}C\left(I_m + B^T F^{-1} C\right)^{-1} B^T F^{-1}$$

إذا طبقنا صيغة **Woodbury** على المصفوفة $G = T - VQ^{-1}U^T$ نحصل على:

$$G^{-1} = T^{-1} + T^{-1}V\left(Q - U^T T^{-1} V\right)^{-1} U^T T^{-1}$$

يعطى حل الجملة (22) بالصيغة:

$$\begin{aligned} &\tilde{y} = G^{-1}f = z + T^{-1}V\left(Q - U^T T^{-1} V\right)^{-1} U^T z \\ &z = T^{-1} f \end{aligned} \qquad (23)$$

من الواضح أنه يمكن إيجاد الحل x من الصيغة (23) وفق الحسابات المتتالية للعبارة التالية:

$$z = T^{-1}f \quad , \quad T^{-1}V \quad , \quad U^T T^{-1} V$$

$$\left(Q - U^T T^{-1} V\right)^{-1} \quad , \quad \left(Q - U^T T^{-1} V\right)^{-1} U^T z$$

الجزء الرئيس من الحسابات أعلاه هو إيجاد العبارتين الأوليتين اللتان تكافئان حل جملتين من المعادلات الخطية من المرتبة $n-1$ مصفوفة الأمثال هي T على حين أن الطرفين الأيمنين مختلفان. بعد إيجاد $\tilde{y}$ يمكن حساب $\hat{y}$ بتطبيق المعادلة (20).

خوارزمية II: خوارزمية حل الجملة (1)

تتألف الخوارزمية II لإيجاد (1) من الخطوات التالية:

مما سبق يمكننا أن نلخص خوارزمية حل الجملة (1) مصفوفة أمثالها معطاة في (2) كما يلي:

الخطوة 1: كتابة المصفوفة (2) بالشكل (14) وفق الخوارزمية 1.

الخطوة 2: إيجاد $T\ ,\ Q\ ,\ V\ \ ,\ U^T\ \ ,\ \ f = f_1 - VQ^{-1}f_2$ كما هو مبين في وصف الخوارزمية.

الخطوة 3: حل $Tz = f \ \ ,\ Tz_1 = V$ بالشكل $z = T^{-1}f \ \ ,\ z_1 = T^{-1}V$ لأن T مصفوفة قطرية، فنحصل على $z\ \&\ z_1$.

الخطوة 4: حساب

$$\tilde{y} = z + z_1\left(Q - U^T z_1\right)^{-1} U^T z$$

$$\hat{y} = Q^{-1}\left(f_2 - U^T \tilde{y}\right)$$

الخطوة 5: حساب حل الجملة (2) وفق $x = \left(\tilde{y}, \hat{y}\right)^T$.

تعقيد الخوارزمية II

تتطلب عملية كتابة المصفوفة (2) بالشكل (14) ما يقارب n عملية حسابية. أما الخطوة 2 من الخوارزمية II فتتطلب ما يقارب $2n-2$ عملية حسابية للضرب و الجمع. حل جملتي المعادلات فيتطلب $2n-2$ عملية حسابية. أما الخطوة 4 فتتطلب $3n-3$ عملية حسابية وبالتالي فإن الخوارزمية ككل تتطلب $7n-5$ عملية حسابية. بالنتيجة يتطلب حل الجملة (1) زمناً $8n+2$ عملية حسابية.

مثال توضيحي: لنفرض أن لدينا جملة المعادلات الخطية من النوع:

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & -1 \\ & 2 & & & -1 \\ & & 2 & & -1 \\ & & & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بتطبيق الخطوات التالية من الخوارزمية الثانية نجد أن:

$$U^T = [1\ 1\ 1\ 1] \quad , \quad V = [-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1]^T$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \qquad , \qquad Q = [2]$$

(III) الخوارزمية الثالثة: خوارزمية حساب معكوس بالاعتماد على تجزئة مصفوفة

لتكن $\tilde{A}$ مصفوفة حدودية غير متناظرة مربعة من المرتبة n كما هي معطاة في الشكل التالي:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & c_1 & & & & b_1 \\ & & c_2 & & & b_2 \\ & & & . & & . \\ & & & & . & . \\ & & & & c_{n-2} & b_{n-2} \\ a_n & a_2 & . & . & a_{n-1} & a_1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

بما أن المصفوفة $\tilde{A}$ محددة البنية الصفرية ، فإنه يمكن تطوير خوارزمية فعالة لحل (16) تأخذ بعين الحسبان الشكل الخاص لمصفوفة أمثالها (24). هذه الخوارزمية هي كما يلي:

لتكن u و v متجهتي عمود من المرتبة n ومعرفتين كما يلي:

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad u = \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_1 \\ -b_2 \\ . \\ . \\ -b_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

عندئذ:

$$uv^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & & & -b_1 \\ & & & & . \\ 0 & & 0 & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

بالاستفادة من العلاقتين (25) و (26) يمكننا أن نكتب المصفوفة (24) بالشكل التالي:

$$\tilde{A} = B - uv^T \tag{27}$$

حيث:

$$B = \begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & & \\ & c_1 & & & & & \\ & & c_2 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & c_{n-2} & \\ a_n & a_2 & a_3 & . & . & a_{n-1} & a_1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

هي مصفوفة نظامية مربعة من المرتبة n.

إذا كانت G مصفوفة نظامية مربعة من المرتبة n ، عندئذ يمكن حساب $(I+G)^{-1}$ وفق منشور تايلور كما يلي:

$$(I+G)^{-1} = I - G + G^2 - G^3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} (-G)^i \tag{29}$$

لتطبيق العلاقة (29) نكتب أولا المصفوفة المعطاة في (27) بالشكل التالي:

$$\tilde{A}^{-1} = \left(B - uv^T\right)^{-1} = \left(B\left(I - B^{-1}uv^T\right)\right)^{-1} = \left(I - B^{-1}uv^T\right)^{-1} B^{-1} \tag{30}$$

نطبق الآن العلاقة (29) على المصفوفة $\left(I - B^{-1}uv^T\right)^{-1}$ كما يلي:

$$\left(I - B^{-1}uv^T\right)^{-1} = I + B^{-1}uv^T - B^{-1}uv^T B^{-1}uv^T + B^{-1}uv^T + B^{-1}uv^T + B^{-1}uv^T - \ldots$$

لدينا:

$$\tilde{A}^{-1}=\left(I-B^{-1}uv^{T}\right)^{-1}=B^{-1}+B^{-1}uv^{T}B^{-1}-B^{-1}u\left(v^{T}B^{-1}u\right)v^{T}B^{-1}+B^{-1}u\left(v^{T}B^{-1}u\right)\left(v^{T}B^{-1}u\right)v^{T}B^{-1}-...$$

$$=B^{-1}+B^{-1}uv^{T}B^{-1}\left(1-\lambda+\lambda^{2}-...\right)=B^{-1}+B^{-1}uv^{T}B^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)$$

$$=B^{-1}+B^{-1}uv^{T}B^{-1}(1+\lambda)^{-1}=B^{-1}+\frac{B^{-1}uv^{T}B^{-1}}{1+\lambda}=\left(I+\frac{B^{-1}uv^{T}}{1+\lambda}\right)B^{-1}$$

$$=\left(I+\frac{\left(B^{-1}u\right)v^{T}}{1+v^{T}B^{-1}u}\right)B^{-1}=\left(I+\frac{\left(B^{-1}u\right)v^{T}}{1+v^{T}\left(B^{-1}u\right)}\right)B^{-1}$$

بهذا الشكل نكون قد وجدنا أن:

$$\tilde{A}^{-1}=\left(I+\frac{\left(B^{-1}u\right)v^{T}}{1+v^{T}\left(B^{-1}u\right)}\right)B^{-1} \tag{31}$$

من العلاقة (31) يمكننا أن نقول: تكون المصفوفة A نظامية إذا كان $1+v^{T}\left(B^{-1}u\right)\neq 0$ فقط. لحل الجملة (24) بتطبيق العلاقة (31) نكتب:

$$x=\tilde{A}^{-1}d=\left(I+\frac{\left(B^{-1}u\right)v^{T}}{1+v^{T}\left(B^{-1}u\right)}\right)B^{-1}d \tag{32}$$

نصف فيما يلي خوارزمية لحساب الحل x المعطى في (32) كما يلي:

خوارزمية III: خوارزمية حل الجملة (1)

تتألف الخوارزمية III لإيجاد (32) من الخطوات التالية:

الخطوة 1: حل الجملة $Bz=u$

$$Bz=u\Leftrightarrow\begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & & \\ & c_1 & & & & & \\ & & c_2 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & c_{n-2} & \\ a_n & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_n \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n-1} \\ z_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_1 \\ -b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -b_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

وفق ما يلي:

بما أن المصفوفة B مثلثية سفلية محددة البنية الصفرية ، فإنه يمكن حل الجملة $Bz=u$ وفق العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} & z_n=-\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}} \quad \& \quad z_1=\frac{0-a_n z_n-\sum_{i=2}^{n-1}a_i z_i}{a_1} \\ & for \quad i=2 \quad to \quad n-1 \quad do \\ & \qquad z_i=-\frac{b_{i-1}}{c_{i-1}} \end{aligned} \tag{34}$$

الخطوة 2: حساب $\gamma = 1 + v^T\left(B^{-1}u\right) = 1 + uv^T z = 1 + z_n$.

إذا كانت $\gamma = 0$ ، فإن المصفوفة A غير نظامية وبالتالي المقلوب A^{-1} غير موجود.

الخطوة 3: حل الجملة $By = d$

$$By = d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{n-1} & & & & & & \\ & c_1 & & & & & \\ & & c_2 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & c_{n-2} & \\ a_n & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1} \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_n \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

وفق العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} & for \;\; i = 2 \;\; to \;\; n-1 \;\; do \\ & \quad y_i = \frac{d_i}{c_{i-1}} \\ & y_n = \frac{d_n}{c_{n-1}} \quad \& \quad y_1 = \frac{d_1 - a_n y_n - \sum_{i=2}^{n-1} a_i y_i}{a_1} \end{aligned} \quad (36)$$

الخطوة 4: حساب $\beta = \frac{v^T y}{\gamma} = \frac{y_1}{\gamma}$.

الخطوة 5: حساب حل الجملة (16) وفق العلاقة $x = y + \beta z$.

تعقيد حل الجملة $Bz = u$ و $By = d$

تتطلب العلاقات (34) أو (36) ما يقارب $n-1$ عملية ضرب و $n-1$ عملية طرح و n عملية قسمة. وبالتالي فالمجموع الكلي للعمليات المطلوبة لحل الجملة $Bz = u$ أو $By = d$ هو $3n-2$ عملية حسابية. بالنتيجة تعقيد حل الجملتين $Bz = u$ و $By = d$ هو $6n-4$ عملية حسابية.

تعقيد الخوارزمية III

نلاحظ أن الخوارزمية III تتطلب:

1. حل جملتي معادلات خطية مصفوفة أمثالها B كما هو مبين في الخطوتين 1 و 3 وتتطلبان $6n-4$ عملية حسابية.

2. أربع عمليات حسابية: عمليتي ضرب و عملية قسمة و عملية جمع.

3. عملية ضرب مقدار سلمي بمتجه كما هو مبين في الخطوة 5 و تتطلب n عملية حسابية.

بالنتيجة، فإن عدد العمليات الحسابية المطلوبة لإتمام الخوارزمية III هو من نفس مرتبة إيجاد حل جملة معادلات خطية مصفوفة أمثالها B و هي مصفوفة مثلثية سفلية محددة البنية الصفرية كما هو مبين في (28). و هكذا فإنه تعقيد الخوارزمية III هو $7n+2$. بالنتيجة يتطلب حل الجملة (1) زمنا $8n+2$ عملية حسابية منها n عملية لإيجاد الشكل المحدد لجملة المعادلات (16).

مقارنة تعقيد الخوارزميات الثلاث المقترحة في هذه المقالة

نقدم في هذه الفقرة مقارنة بين تعقيد الخوارزميات المقترحة من جهة و بين تعقيد الخوارزمية المطبقة على المصفوفة (2) مباشرة لتوضيح أية خوارزمية هي الأفضل.

الجدول 1. مقارنة تعقيد الخوارزميات المقترحة في المقالة

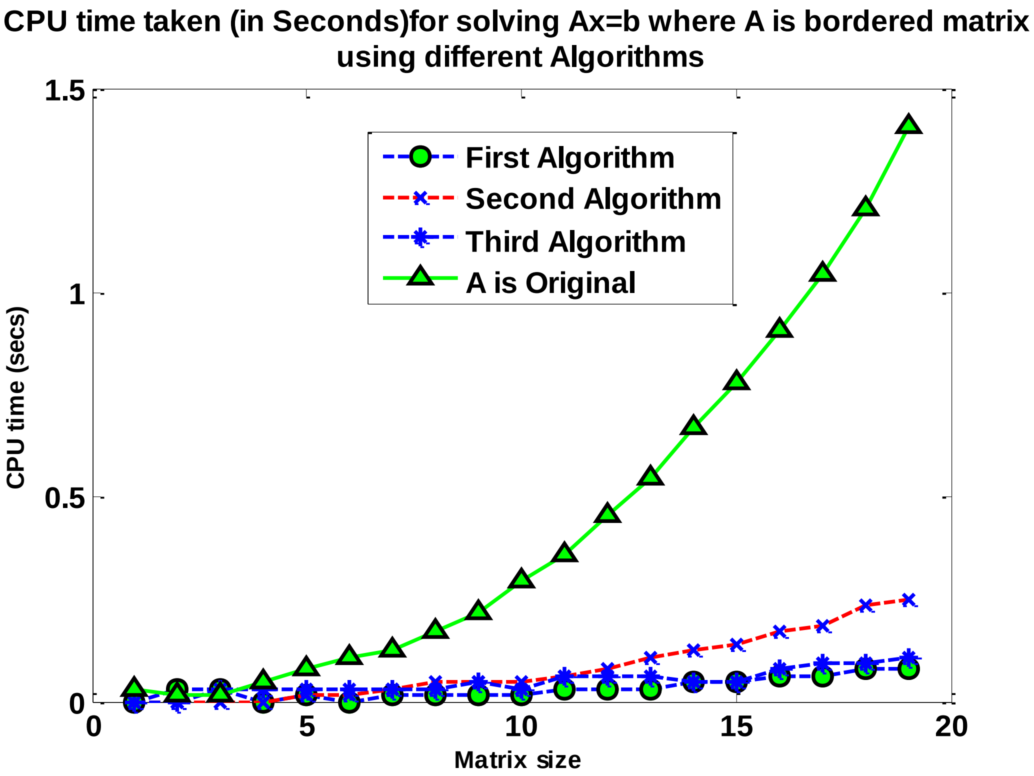
Suggested Algorithm	Complexity Of Algorithm
The First Algorithm	$6n-5$
The Second Algorithm	$8n+2$
The Third Algorithm	$8n+2$
The Algorithm applied to (2) directly	n^3

من الجدول يتضح أن جميع الخوارزميات أفضل من الخوارزمية المطبقة مباشرة على (2). من جهة أخرى، الخوارزمية الأولى هي الأسرع بينما تأتي الخوارزميات الباقيات في المرتبة الثانية و لهما التعقيد نفسه.

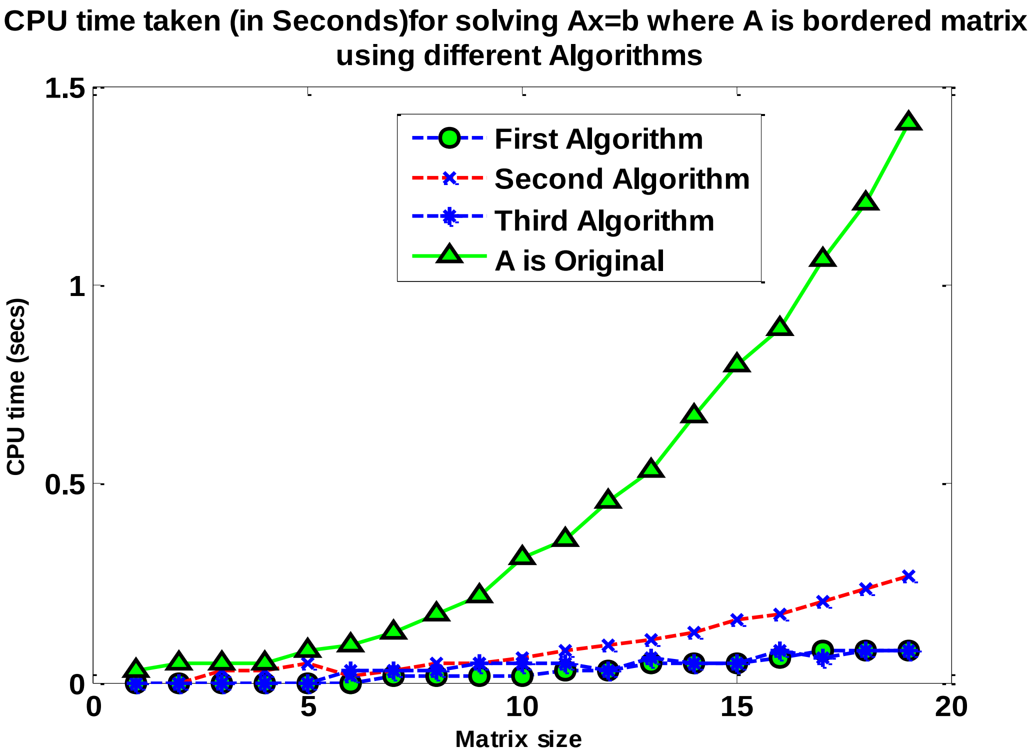
❶ التجارب العددية والنتائج

نقدم في هذه الفقرة العديد من التنفيذات الحاسوبية على 80 مسألة اختبار ولدناها عشوائيا لحل جمل المعادلات الخطية التي مصفوفات أمثالها من النوع (2) وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة في هذه المقالة. لتوضيح فعالية الخوارزميات الثلاثة المقترحة في حل جمل المعادلات الخطية التي مصفوفات أمثالها من النوع (2) نقارنها بطريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفات المدروسة. نفذنا جميع الخوارزميات على حاسوب بنتيوم IV بذاكرة RAM 3 Gb باستخدام لغة Matlab 10 تحت نظام ويندوز XP. جميع برامج لغة Matlab لتنفيذ الخوارزميات الثلاث هي من إعداد المؤلف.

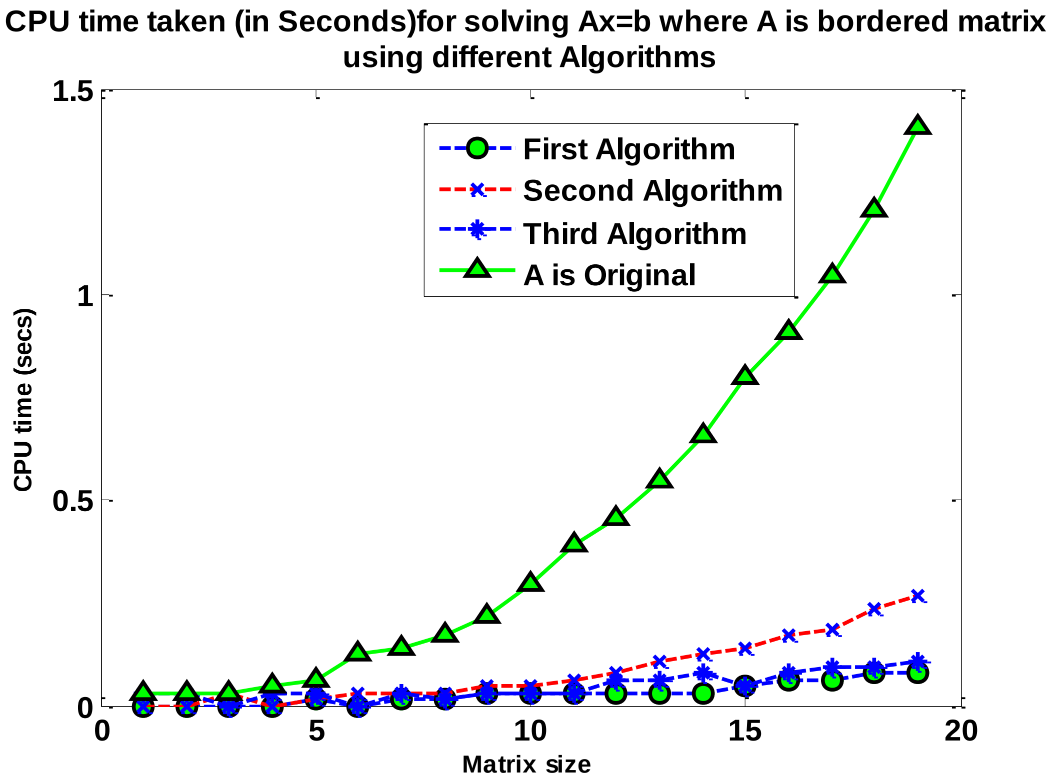
تتضمن النتائج الحاصلة أزمنة الحصول على الحل الدقيق في جميع الخوارزميات. مثلنا النتائج بيانياً مقابل بعد كل مصفوفة اختبار و من أجل كل طريقة. رمزنا لأزمنة حل مسائل الاختبار عند تطبيق طريقة التحليل مباشرة على المصفوفات (2) بالرمز A is Original بينما رمزنا لأزمنة مسائل الاختبار نفسها وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة بأسمائها: الخوارزمية الأولى (The First ALgorithm) والخوارزمية الثانية (The Second ALgorithm) والخوارزمية الثالثة (The Third ALgorithm).



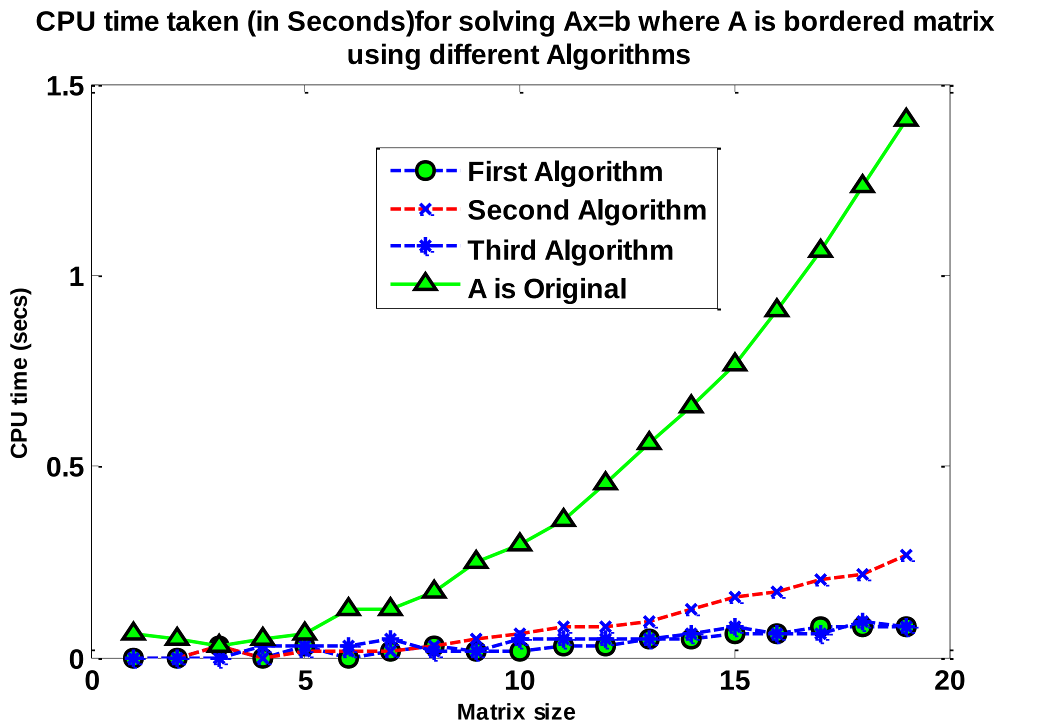
الشكل 1. أزمنة حل مسائل الاختبار التي مصفوفاتها من النوع (2) وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة بالإضافة إلى طريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفة (2).



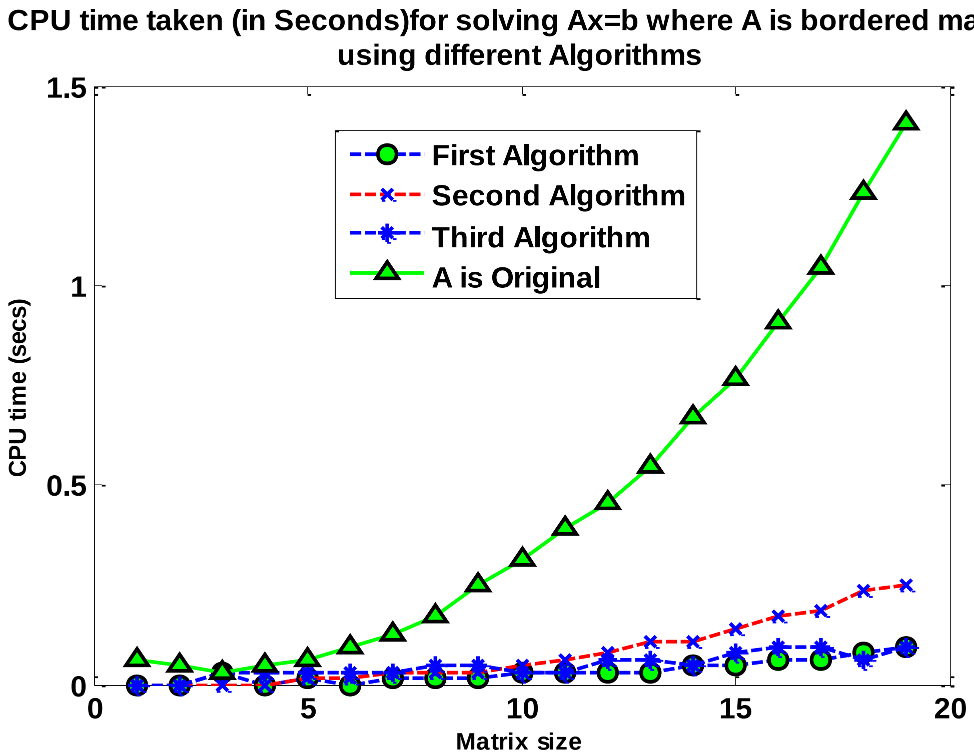
الشكل 2. أزمنة حل مسائل الاختبار التي مصفوفاتها من النوع (2) وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة بالإضافة إلى طريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفة (2).



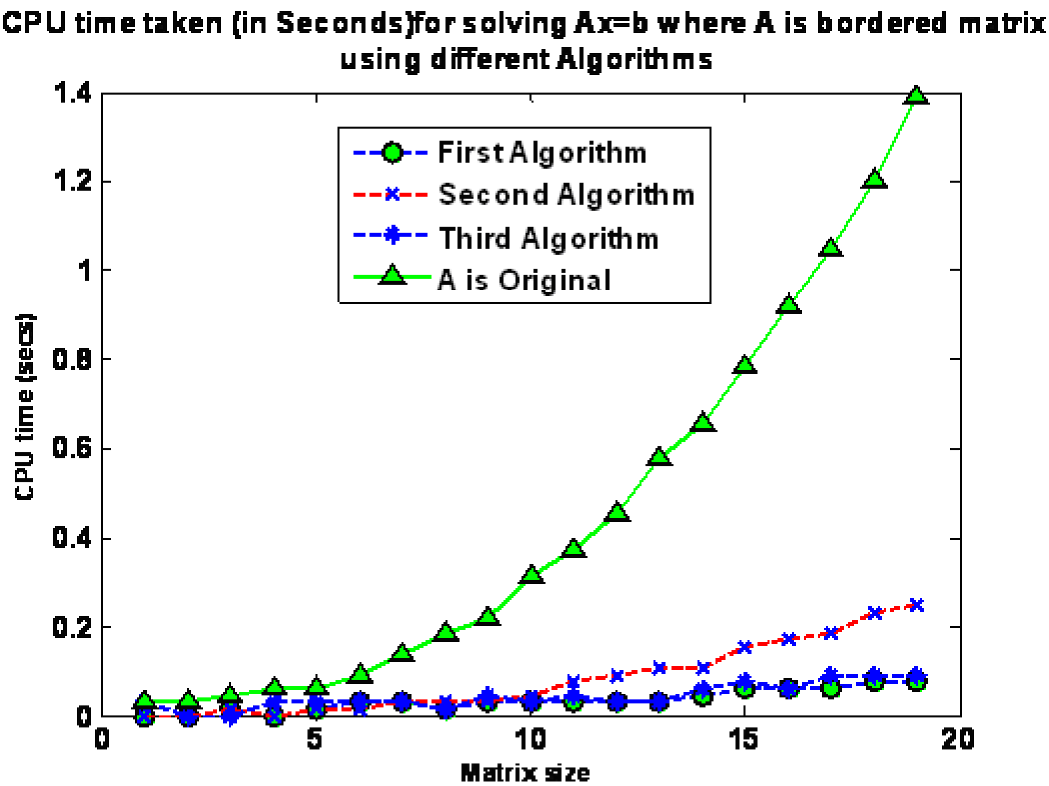
الشكل 3. أزمنة حل مسائل الاختبار التي مصفوفاتها من النوع (2) وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة بالإضافة إلى طريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفة (2).



الشكل 4. أزمنة حل مسائل الاختبار التي مصفوفاتها من النوع (2) وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة بالإضافة إلى لطريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفة (2).



الشكل 5. أزمنة حل مسائل الاختبار التي مصفوفاتها من النوع (2) وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة بالإضافة إلى طريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفة (2).



الشكل 6. أزمنة حل مسائل الاختبار التي مصفوفاتها من النوع (2) وفق الخوارزميات الثلاث المقترحة بالإضافة إلى طريقة التحليل المطبقة مباشرة على المصفوفة (2).

من الأشكال $1-6$ ، يتضح أن الخوارزمية الأولى أسرع من بقية الخوارزميات، إلا أن أداءها قريب جداً من أداء الخوارزمية الثالثة. فهما منافستان قويتان لحل (1) مصفوفات أمثالها من الشكل (2). أما أداء الخوارزمية الثانية فلم يكن متوقعاً إذ يفترض أن يكون قريباً من أداء الخوارزمية الثالثة. أخيرا، أداء جميع الخوارزميات المقترحة أفضل بكثير من تطبيق طريقة التحليل مباشرة على (2). بالنتيجة، ننصح بما يلي:

❶ تطبيق الخوارزمية الأولى أو الثالثة لحل جمل المعادلات الخطية التي مصفوفات أمثالها من النوع (2).

❶ استخدام الخوارزميتين الأولى و الثالثة كمسرعات في حل جمل المعادلات الخطية كثيرة الأصفار من الشكل المبين أدناه باستخدام طرائق كريلوف التكرارية:

$$A=\begin{bmatrix}
x & x & x & & & & & & x & x\\
x & x & x & x & & & & & x & x\\
 & x & x & x & x & & & & x & x\\
 & & x & x & x & x & & & x & x\\
 & & & & & & & & . & .\\
 & & & & & & & & . & .\\
 & & & & & & & & . & .\\
x & x & x & . & . & . & x & x & x & x\\
x & x & x & . & . & . & x & x & x & x\\
x & x & x & . & . & . & x & x & x & x
\end{bmatrix}$$

نرمز عادة لهذه المصفوفات بالرمز $A=Band\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right)$ حيث β_1 هو عدد الأقطار فوق القطر الرئيس، β_2 عدد الأقطار تحت القطر الرئيس، β_3 عدد الأسطر الأخيرة في المصفوفة و β_4 عدد الأعمدة الأخيرة في المصفوفة.

الاستنتاجات والتوصيات:

في هذه المقالة، قدمنا ثلاث خوارزميات فعالة لحل جمل المعادلات الخطية التي مصفوفات أمثالها حدودية. الفكرة الأساسية من هذه الخوارزميات هو إيجاد بنية لاصفرية جديدة للمصفوفة الحدودية بحيث يمكن تطبيق طريقة تحليل مصفوفة على البنية اللاصفرية الجديدة و لا تظهر أية عناصر إضافية يتطلب منا تخزينها حاسوبيا. تعتمد الخوارزميات الجديدة على طريقة تحليل المصفوفة بالبنية اللاصفرية الجديدة أو تجزئة المصفوفة بالبنية الجديدة أو بالبنية الأصلية إلى مصفوفة كتلية مربعة من المرتبة الثانية. أجرينا العديد من تجارب المحاكاة العددية باستخدام لغة Mathlab لتوضيح فعالية الخوارزميات المقترحة. أظهرت التجارب العددية نتائج هامة جدا مفادها أن الخوارزميات المقترحة سريعة جداً لحل النوع المدروس من جمل المعادلات الخطية. لذا ننصح باستخدامها في تطبيقات تظهر فيها جمل المعادلات الخطية من النوع المدروس.

المراجع:

[1] HALL, F. J. *Generalized inverses of a bordered matrix of operators*, SIAM J. Appl. Math., U. S. A., Vol. 29, No. 3, 1975, 152–163.

[2] HEARON, J. Z. *On the singularity of a certain bordered matrix*, SIAM J. Appl. Math 25 (1967) 1413– 1421.

[3] MANJUNATHA, K. and RAO, K. P. S. B. *On bordering of matrices*, Linear Algebra Alpp., U. S. A., Vol. 234, No. 5, 1996, 245–270.

[4] MARSAGLIA, and STYAN, G. P. H. *Equalities and inequalities for ranks of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, U. S. A., Vol. 2, No. 17, 1974, 269–292.

[5] MITRA, S. K. *Properties of the fundamental bordered matrix used in linear estimation, in: G. Kallianpur et al., (Ed.), Statistics and Probability*, Essays in Honor of C.R. Rao, North-Holland, New York, 1982, 505–509.

[6] BOLEY, D. and GOLUB, G. *A survey of matrix inverse eigenvalue problem*, Inverse Problems, U. S. A., Vol. 3, No. 12, 1987, 595–622.

[7] CHU, M. T. and GOLUB, G. H. *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms and Applications*, 1st Edition, Oxford University Press, New York, 2005, 236.

[8] GLADWELL, G. M. L. and WILLMS, N. B. *The construction of a tridiagonal system from its frequency response at an interior point*, Inverse Problems, , U. S. A., Vol. 4, No. 10, 1988, 1013–1024.

[9] PENG, J., HU, X. Y. and ZHANG, L. *Two inverse eigenvalue problems for a special kind f matrices*, Linear Algebra Appl., U. S. A., Vol. 416, No. 25, 2006, 336–347.

[10] STEWART, G. W. *Matrix Algorithms :Volume I "Basic Decompositions*", SIAM, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

[11] GLOOWINSKI, R. and NEITTAANMAKI, P. *Partial Differential Equations: Modeling and Numerical Simulation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1st Edition, 2008, 522.

[12] TOSELLI, A. and WIDLUND, O. *Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005, 712.

[13] ISPEN, I. C. F. *Numerical Matrix Analysis: Linear Systems and Least Squares*, 3rd Edition, SIAM, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, 346.

[14] O'LEARY, D. P. *Scientific Computing with cases studies*, 1st Edition, SIAM, Philadelphia, 2009, 587.

[15] DAHLQUIST, G. and BJORCK, Å. *Numerical Methods in Scientific Computing*, 1st Edition, Volume 1. SIAM, Philadelphia, PA, 2008, 684.

[16] DAVIS, T. A. *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. 1st Edition, SIAM, Philadelphia, PA, 2006, 542.