المقارنة بين تكراريتي S.Thianwan, Agarwal لمؤثرات Zamfirescu

الدكتور عدنان متيلج*

(تاريخ الإيداع 17 / 5 / 2012. قُبِل للنشر في 5 / 12 /2012)

ملخّص

نبرهن في هذه المقالة التكافؤ بين تكراريتي S.Thianwan, Agarwal من أجل تطبيقات Zamfirescu المعرفة على مجموعات جزئية محدبة ومغلقة وغير خالية من فضاءات باناخ، ثم نثبت أن تكرارية Agarwal تتقارب إلى نقطة ثابتة لمؤثر Zamfirescu بسرعة أكبر من تقارب تكرارية S.Thianwan .

وأخيراً تمت دراسة مثال تطبيقي بمساعدة برنامج باسكال .

الكلمات المفتاحية: مؤثر Zamfirescu، شبيه اللاتمددي، تكرارية النقطة الثابتة، تكرارية Agarwal، تكرارية جديدة بمرحلتين .

* أستاذ مساعد - قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية- جامعة تشرين – اللاذقية- سورية.

A comparison between Agarwal and S. Thianwan iterations for - Zamfirescu operators

Dr. Adnan Mtelej*

(Received 17 / 5 / 2012. Accepted 5 / 12 /2012)

☐ ABSTRACT ☐

In this paper we prove that the Agarwal, S. Thianwan iterative schemes are equivalent for – Zamfirescu operators defined on an arbitrary closed convex subset of a Banach spaces. In addition , we proved that the Agarwal iteration converges is faster than the S. Thianwan iterations to the fixed point of Zamfirescu operator .Finally we solved a practical example using the Pascal program.

Keywords: Zamfirescu operator, Quasi –non expansive, fixed point iteration, Agarwal iteration, New tow step iteration.

مقدمة:

***Associate Professor, Department of Basic science, Faculty of Mechanical & Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

ليكن X فضاءً حقيقياً لـ باناخ ولتكن D مجموعة جزئية من X مغلقة ومحدبة وليست خالية وبفرض $T : D \to D$ تطبيقاً ذاتياً على D .

سنرمز لمجموعة النقط الثابتة لـ T بـ : $F_T = \{ p \in D : Tp = p \}$.

يزداد الاهتمام بالعلوم التطبيقية ، والتحليل العددي ، والتحليل الدالي بأنواع محددة من التطبيقات وبخاصة الضعيفة التقليص منها انظر التعريفين $(2,1)$ لما تلعبه من دور هام في تقريب حلول العديد من المسائل المطروقة . ففي العقود الأخيرة استخدمت بنجاح بعض التكراريات (المتتاليات) المولدة بتطبيقات لها نقطة ثابتة على الأقل في البحث عن الحلول التقريبية لهذه المسائل مثل :

Picard , Mann ، Ishikawa ، Noor ،..........

إذ تعرف تكرارية بيكارد (Picard) بـ :

$$x_{n+1} = Tx_n \quad , n = 0,1,2,3,........$$

وقد طبقت بشكل ناجح في تقريب حلول مختلف مسائل التطبيقات المقلصة تماماً أي التطبيقات التي تحقق المتراجحة :

$$\|Tx - Ty\| \le a\|x - y\| \qquad \forall x, y \in D \ , \ a \in [0,1)$$

(يدعى الشرط السابق بمبدأ التطبيق المقلص لـ باناخ).

إلا أن إخفاق تكرارية Picard عند استخدام تطبيقات لاتحقق شرط التقليص التام دفع إلى البحث عن تكراريات جديدة وبالفعل :

عرف Mann في عام 1953 التكرارية :

$$\begin{Bmatrix} x_0 \in D \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

وعرف Ishikawa في عام 1974 التكرارية :

$$\begin{Bmatrix} x_0 \in D \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

وعرف Noor في عام 2000التكرارية :

$$\begin{Bmatrix} x_0 \in D \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

لقد استخدمت هذه التكراريات في عمليات التقريب من أجل التطبيقات المقلصة تماماً وحتى الضعيفة التقليص إلا أن البحث عن تكراريات أخرى وبشروط جديدة وميزات أفضل بقي مستمراً .

ففي السنوات القليلة الماضية ظهرت تكراريات جديدة إلى جانب التكراريات السابقة.

إذ عرف Agarwal [1] في عام 2007 التكرارية :

$$\begin{cases} x_0 \in D \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \quad (4)$$

وعرف S.Thianwan [2] في عام 2008 التكرارية:

$$\begin{cases} u_0 \in D \\ u_{n+1} = (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n Tv_n \\ v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n Tu_n \end{cases} \quad (5)$$

التي تدعى أيضاً (تكرارية جديدة بمرحلتين)

تجدر الإشارة إلى أن $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ تمثل متتاليات من الأعداد الحقيقية الموجبة وتحقق المتراجحات : $o \leq \gamma_n < 1$, $0 \leq \beta_n < 1$, $0 \leq \alpha_n < 1$.

تعريف (1) [3]:

ليكن X فضاءً حقيقياً لـ باناخ نقول إن التطبيق $T: X \to X$ يحقق شرط Zamfirescu ويرمز له بـ Z إذا وجدت أعداد حقيقية فقط a,b,c تحقق $b,c \in [0,\frac{1}{2})$, $0 \leq a < 1$ حيث إنه من أجل أي $x,y \in X$ واحد على الأقل من الشروط الآتية محققاً:

$$i) \quad \|Tx - Ty\| \leq a\|x-y\|$$

$$ii) \quad \|Tx - Ty\| \leq b\{\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\}$$

$$iii) \quad \|Tx - Ty\| \leq c\{\ \|x - Ty\| + \|y - Tx\|\ \}$$

يعد المؤثر Z أحد الأنواع الخاصة للتطبيقات الشبه اللاتمددية (الضعيفة التقليص) ومن أكثرها استخداماً في مسائل النقط الثابتة ويمكن التأكد بسهولة من أن تطبيق Zamfirescu يحقق المتراجحة الآتية :

$$\| Tx - Ty \ \| \leq \delta\|x-y\| + 2\delta\|x - Tx\| \quad (6)$$

حيث : $\delta = \max\left\{a, \dfrac{b}{1-b}, \dfrac{c}{1-c}\right\}$ ومنه $0 \leq \delta < 1$

تعريف (2) [4] :

ليكن (X,d) فضاءً مترياً وليكن $T: X \to X$ يسمى T شبيه اللاتمددي (Quasi–non expansive) إذا كان من اجل كل $x,y \in X$, $0 \leq k < 1$ فإن :

$$d(Tx,Ty) \leq k \max\{d(x,y), d(x,Tx)\ , d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}. \quad (7)$$

أيضاً عرف Berinde [5] على الفضاءات النظيمة نوعاً جديداً من المؤثرات الضعيفة التقليص كما يلي :

$$\| Tx - Ty \ \| \leq \delta\|x-y\| + L\|x - Tx\| \quad (8)$$

حيث $0 \leq \delta < 1$, $L \geq 0$

إن التطبيقات التي تحقق أحد الشروط (6) أو (7) أو(8) أو التي تحقق شروط تقليص أخرى لامجال لذكرها كلها هنا قد استخدمت على نطاق واسع في دراسة تقارب التكراريات السابقة .

فأثبت S.M.Soltuz على سبيل المثال التكافؤ بين تكراريتي Mann و Ishikawa ، كما أثبت التكافؤ بين المتتاليات: Mann و Ishikawa و Picard و Noor عندما يحقق T الشرط (6) انظر [6] ,[7] .

بعد التحقق من التكافؤ يتجه الاهتمام إلى دراسة سرعة التقارب نحو النقطة الثابتة ، وبالفعل أجرى العديد من الباحثين مقارنات ناجحة بين بعض التكراريات المتكافئة :

فبرهن BABU , PRASAD في[8] أن تكرارية Mann تتقارب بشكل أسرع من تقارب تكرارية Ishikawa في حالة مؤثرات Zamfirescu .

وأثبت Berinde في [9] أن تكرارية Picard تتقارب بسرعة أكبر من تقارب Mann في حالة المؤثرات الضعيفة التقليص، كما أجرى Rhoades , Xue في [10] مقارنة بين تقارب التكراريات Picard ، Mann , Noor , Ishikawa من أجل نوع محدد من التطبيقات (Quasi–non expansive) وضمن شروط محددة وبرهن S.Thianwan في [2] أن التكرارية (5) تتقارب بسرعة أكبر من تقارب Mann و Ishikawa عند تطبيق مؤثرات Zamfirescu .

في هذه المقالة سنبرهن تكافؤ التكراريتين Agarwal و S.Thianwan في حالة مؤثرات Zamfirescu ثم نثبت أن تقارب التكرارية (4) نحو نقطة ثابتة للمؤثر Z أسرع من تقارب التكرارية (5) نحو النقطة ذاتها. أخيراً نحل مثالاً تتضح من خلاله صحة النتيجة التي توصلنا إليها مع الأخذ بعين الحسبان عدة حالات لـ بارامترات التكراريتين.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث من كونه يبرهن على تكافؤ تكراريتين تستخدمان في حل مسائل النقط الثابتة، ويحدد أيضاً أيهما الأسرع في الاقتراب من الحل وذلك عند استخدام مؤثر Zamfirescu

طرائق البحث ومواده :

اعتمدت الطريقة التحليلية وطبقت النظريات ذات الصلة لإثبات التكافؤ وإجراء المقارنة، ثم استخدمت الطريقة التجريبية من خلال حل مثال عددي لاختبار صحة النتائج ومعرفة عدد المراحل المطلوب إنجازها للوصول إلى الحل المطلوب .

تمهيد :

يتضمن هذا التمهيد بعض الأساسيات والتعاريف الضرورية للحصول على النتائج المطلوبة .

تعريف (2) [11]:

لتكن $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ متتاليتين من الأعداد الحقيقية متقاربتين نحو a , b على الترتيب ولتكن :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|a_n-a\|}{\|b_n-b\|}=l$$

فإذا كانت $l=0$ عندئذٍ $\{a_n\}$تتقارب نحو a بسرعة أكبر من تقارب $\{b_n\}$ نحو b

ومن أجل $0<l<\infty$ عندئذٍ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ لهما درجة التقارب ذاتها .

تمهيدية (1) $[12]$:

إذا كان العدد الحقيقي K حيث $0 \le K < 1$ وكانت $\{\varepsilon_n\}$ متتالية من الأعداد الموجبة بحيث $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

عندئذٍ كل متتالية من الأعداد الموجبة $\{u_n\}$ تحقق المتراجحة :

$$u_{n+1} \le u_n K + \varepsilon_n \qquad , \quad n = 0,1,2,3,.........$$

تكون متقاربة نحو الصفر .

ونظراً إلى حاجتنا إلى الصيغ الرياضية الواردة في النظرية الآتية سنبرهن على صحتها علماً بأن برهان القسم الأول منها يوجد وبأسلوب مشابه في $[13]$حيث يتم البرهان هناك على التقارب من أجل التطبيقات المحققة للشرط (8) ومن المعلوم أن المؤثر Z هو حالة خاصة من هذه التطبيقات، أما برهان القسم الثاني فيوجد وبأسلوب مشابه أيضاً في $[14]$.

نظرية (1) :

بفرض X فضاء باناخ و $D \subset X$ مجموعة محدبة و مغلقة وليست خالية ،

ولنفرض أن $T : D \to D$ تطبيق Zamfirescu ولتكن التكراريتان (4) و(5)

بحيث : $0 \le \alpha_n \ , \ \beta_n < 1$ و $\sum_n \alpha_n = \infty$

عندئذٍ :

1- التكرارية (4) تتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة لـ T .

2- التكرارية (5) تتقارب بقوة نحو نقطة ثابتة لـ T .

البرهان :

1- بفرض $p \in F_T$ ولتكن $\{x_n\}$ التكرارية (4) عندئذً :

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\le (1-\alpha_n)\|Tx_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - p\| \le (1-\alpha_n)\delta\|x_n - p\| + \alpha_n\delta\|y_n - p\| \le \\
&\le (1-\alpha_n)\delta\|x_n - p\| + \alpha_n\delta\{(1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|Tx_n - p\| \ \} \le \\
&\le \left[(1-\alpha_n)\delta + \alpha_n\delta(1-\beta_n) + \alpha_n\beta_n\delta^2\right]\|x_n - p\| \le \\
&\le \left[1-\alpha_n + \alpha_n\delta(1-\beta_n) + \alpha_n\beta_n\delta^2\right]\|x_n - p\| = \\
&= \left[1-\alpha_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta)))\right]\|x_n - p\| \le \\
&\le (1-\alpha_n(1-\delta))\|x_n - p\| \le \prod_{i=0}^{n}(1-\alpha_i(1-\delta))\|x_0 - p\| \le \\
&\le \ e^{-(1-\delta)\sum_{i=0}^{n}\alpha_i}\|x_0 - p\| \to 0
\end{aligned}$$

2- بفرض $p \in F_T$ ولتكن $\{u_n\}$ التكرارية (5) عندئذً :

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\| &\le (1-\alpha_n)\|v_n - p\| + \alpha_n\|Tv_n - p\| \le (1-\alpha_n)\|v_n - p\| + \alpha_n\delta\|v_n - p\| \le \\
&\le (1-\alpha_n(1-\delta))\|v_n - p\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\left[(1-\beta_n)\|u_n - p\| + \beta_n\delta\|u_n - p\|\right] = \\
&= (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - p\| \le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - p\| \le \\
&\le \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i(1-\delta))\|u_0 - p\| = e^{-(1-\delta)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\|u_0 - p\| \to 0
\end{aligned}$$

النتائج والمناقشة :

سنقوم بتجزئة العمل إلى مرحلتين إذ نبرهن في المرحلة الأولى على التكافؤ بين التكراريتين (4) و (5) وفي المرحلة الثانية نقارن بين سرعتي تقاربهما نحو النقطة الثابتة للتطبيق Z

ا- إثبات تكافؤ التكراريتين :

نظرية (2): بفرض X فضاء باناخ و $D\subset X$ مجموعة غير خالية ، محدبة ، مغلقة وليكن : $T:D\to D$ تطبيق Zamfirescu ولتكن $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ التكراريتين (4) و (5) على الترتيب و $\sum_n \alpha_n=\infty$

عندئذ من أجل $x_0=u_0\in D$ تتكافأ الحقيقتان الآتيتان:

1- التكرارية (4) تتقارب نحو p ، 2- التكرارية (5) تتقارب نحو p

البرهان : بفرض :

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)v_n+\alpha_n Tv_n \qquad\text{و}\qquad x_{n+1}=(1-\alpha_n)Tx_n+\alpha_n Ty_n$$
$$v_n=(1-\beta_n)u_n+\beta_n Tu_n \qquad\qquad y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n$$

ولتكن $\|u_n-p\|\to 0$ عندئذٍ :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\|&\le(1-\alpha_n)\|Tx_n-v_n\|+\alpha_n\|Ty_n-Tv_n\|\le\\ &\le (1-\alpha_n)\|Tx_n-v_n\|+\alpha_n\delta\|y_n-v_n\|+2\alpha_n\delta\|v_n-Tv_n\| .\end{aligned}\tag{9}$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\|Tx_n-v_n\|&\le\|Tx_n-Tu_n\|+\|Tu_n-Tv_n\|+\|Tv_n-v_n\|\le\\ &\le\delta\|x_n-u_n\|+2\delta\|u_n-Tu_n\|+\delta\|u_n-v_n\|+2\delta\|u_n-Tu_n\|+\|Tv_n-v_n\|=\\ &=\delta\|x_n-u_n\|+4\delta\|u_n-Tu_n\|+\delta\|u_n-v_n\|+\|Tv_n-v_n\| .\end{aligned}\tag{10}$$

أيضاً :

$$\begin{aligned}\|u_n-v_n\|&=\beta_n\|u_n-Tu_n\|\le\beta_n\|u_n-p\|+\beta_n\|Tu_n-p\|\le\\ &\le\beta_n(1+\delta)\|u_n-p\| .\end{aligned}\tag{11}$$

كذلك :

$$\begin{aligned}\|v_n-Tv_n\|&\le\|v_n-p\|+\|p-Tv_n\|\le(1+\delta)\|v_n-p\|\le\\ &\le(1+\delta)\big[(1-\beta_n)\|u_n-p\|+\beta_n\|Tu_n-p\|\big]=\\ &=(1+\delta)\big[(1-\beta_n(1-\delta)\big]\|u_n-p\| .\end{aligned}\tag{12}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\|y_n-v_n\|&\le(1-\beta_n)\|x_n-u_n\|+\beta_n\|Tx_n-Tu_n\|\le\\ &\le(1-\beta_n)\|x_n-u_n\|+\beta_n\delta\|x_n-u_n\|+2\beta_n\delta\|u_n-Tu_n\|\le\\ &\le(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n-u_n\|+2\beta_n\delta\|u_n-Tu_n\| .\end{aligned}\tag{13}$$

نعوض (10)و(11)و(12)و(13) في (9) فنجد :

$$\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta))))\|x_n-u_n\| +$$
$$+ (1+\delta)\{(1-\alpha_n)[(4\delta+\beta_n\delta+2\alpha_n\delta(1-\beta_n)+2\alpha_n\beta_n\delta^2]+2\alpha_n\delta+4\alpha_n\beta_n\delta^2\}\ \|u_n-p\| \le$$
$$\le K\|x_n-u_n\|+L\|u_n-p\| \ .$$

حيث إن :

$$K = \ (1-\alpha_n(1-\delta(1-\beta_n(1-\delta))))$$
$$L=(1+\delta)\{(1-\alpha_n)[(4\delta+\beta_n\delta+2\alpha_n\delta(1-\beta_n)+2\alpha_n\beta_n\delta^2]+2\alpha_n\delta+4\alpha_n\beta_n\delta^2\}$$

من الواضح أن : $0 \le K \le 1 \quad , \ L \ge 0$

وباعتبار أن $\|u_n-p\| \to 0$ ينتج استناداً إلى التمهيدية (1) أن : $\|x_n-u_n\| \to 0$ ومنه :

$$\|x_n-P\| \le \|x_n-u_n\|+\|u_n-p\| \to 0$$

أي أن التكرارية $\{\ x_n\}$ تتقارب بقوة نحو p .

الآن نفرض العكس أي أن $\|x_n-p\| \to 0$ وسنبرهن أن $\|u_n-p\| \to 0$

لدينا بالفعل :

$$\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n)\|Tx_n-v_n\|+\alpha_n\|Ty_n-Tv_n\| \le$$
$$\le \ (1-\alpha_n)\|Tx_n-v_n\|+\alpha_n\delta\|y_n-v_n\|+2\alpha_n\delta\|y_n-Ty_n\| \le$$

$$\le (1-\alpha_n)\|Tx_n-Ty_n\|+(1-\alpha_n)\|Ty_n-y_n\|+(1-\alpha_n)\|y_n-v_n\|+$$
$$+\alpha_n\delta\|y_n-v_n\|+2\alpha_n\delta\|y_n-Ty_n\| \le$$
$$\le \delta(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|+2\delta(1-\alpha_n)\|x_n-Tx_n\|+ \tag{14}$$
$$+(1-\alpha_n+2\alpha_n\delta)\|y_n-Ty_n\|+(1-\alpha_n(1-\delta))\|y_n-v_n\| \ .$$

لكن :

$$\|y_n-x_n\| = \beta_n\|x_n-Tx_n\| \le \beta_n\|x_n-p\|+\beta_n\|p-Tx_n\| \le$$
$$\le \beta_n\ (1+\delta)\ \ \|x_n-p\| \ . \tag{15}$$

أيضاً :

$$\|x_n-Tx_n\| \le \|x_n-p\|+\|p-Tx_n\| \le (1+\delta)\|x_n-p\| \ . \tag{16}$$

كذلك :

$$\|y_n-v_n\| \le (1-\beta_n)\|x_n-u_n\|+\beta_n\|Tx_n-Tu_n\| \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|x_n-u_n\|+\beta_n\delta\|x_n-u_n\|+2\beta_n\delta\|x_n-Tx_n\| \le$$
$$\le (1-\beta_n(1-\delta)\|x_n-u_n\|+2\beta_n\delta\|x_n-p\|+2\beta_n\delta^2\|x_n-p\| =$$
$$= \ \ (1-\beta_n(1-\delta)\|x_n-u_n\|+2\beta_n\delta(1+\delta)\|x_n-p\| \ . \tag{17}$$

وكذلك :

$$\begin{aligned}\|y_n - Ty_n\| &\le \|y_n - P\| + \|Ty_n - p\| \le (1+\delta)\|y_n - p\| \le \\ &\le (1+\delta)\left[(1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\delta\|x_n - p\|\ \right] = \\ &= (1+\delta)\left[1-\beta_n(1-\delta)\right]\ \|x_n - p\| . \qquad (18)\end{aligned}$$

نعوض (15) و (16) و (17) و (18) بـ (14) فنجد :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|x_n - u_n\| + \\ &+ (1+\delta)\left\{\begin{matrix}2\delta(1-\alpha_n) + (1-\alpha_n(1-2\delta))(1-\beta_n(1-\delta)) + \\ + 2\beta_n\delta(1-\alpha_n(1-\delta))\end{matrix}\right\}\|x_n - p\| \le \\ &\le K\|x_n - u_n\| + L\|x_n - p\| \ .\end{aligned}$$

حيث فرضنا أن :

$$K = 1-\alpha_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))$$

$$L = (1+\delta)\left\{\begin{matrix}2\delta(1-\alpha_n) + (1-\alpha_n(1-2\delta))(1-\beta_n(1-\delta)) + \\ + 2\beta_n\delta(1-\alpha_n(1-\delta))\end{matrix}\right\}$$

من الواضح أن $0 \le K < 1 \quad , \quad L \ge 0$

واستناداً إلى التمهيدية (1) نستنتج أن : $\|x_n - u_n\| \to 0$

لكن : $\|u_n - p\| \le \|u_n - x_n\| + \|x_n - p\| \to 0$

وبالتالي التكرارية $\{u_n\}$ تتقارب بقوة نحو p .

وهكذا نجد أن تقارب إحدى التكراريتين إلى نقطة ثابتة p يؤدي إلى تقارب الأخرى إلى النقطة ذاتها وبالتالي فإن التكراريتين متكافئتان وذلك عند استخدام هذا النوع من التطبيقات.

ب- المقارنة بين سرعتي تقارب المتتاليتين (4)و(5) :

بعد أن أثبتنا التكافؤ بين المتتاليتين سنرى أيهما ألأفضل في عملية التقريب من خلال المقارنة بين سرعتيهما في الوصول إلى النقطة الثابتة .

سنرمز فيما يلي للتكرارية (4) بـ ARS_n وللتكرارية (5) بـ ST_n

لقد برهنا في النظرية (1) بالنسبة إلى التكرارية (4) أن :

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1} - p\| = \|ARS_{n+1} - P\| \ \le \ \left[\delta(1-\alpha_n) + \alpha_n\delta(1-\beta_n) + \alpha_n\beta_n\delta^2\right]\|x_n - p\| \\ &\Rightarrow \|ARS_{n+1} - P\| \ \le \delta\left[1-\alpha_n\beta_n(1-\delta)\right]\|x_n - p\| \le \prod_{i=0}^{n} \delta\left[1-\alpha_i\beta_i(1-\delta)\right]\|x_0 - p\| \ .\end{aligned}$$

وأيضاً بالنسبة للتكرارية(5) أن :

$$\begin{aligned}&\|u_{n+1} - p\| = \|ST_{n+1} - P\| \ \le (1-\alpha_n(1-\delta))(1-\beta_n(1-\delta))\|u_n - p\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|ST_{n+1} - p\| \ = \left[1-\alpha_n(1-\delta) - \beta_n(1-\delta) + \alpha_n\beta_n(1-\delta)^2\right]\|u_n - p\| = \\ &= \left[1-(1-\delta)(\alpha_n+\beta_n) + \alpha_n\beta_n(1-\delta)^2\right]\|\ u_n - p\| \le \\ &\le \left[1-(1-\delta)\alpha_n\beta_n + \alpha_n\beta_n(1-\delta)^2\right]\|\ u_n - p\| = \\ &= \left[1-\alpha_n\beta_n\delta(1-\delta)\right]\|u_n - p\| \le \prod_{i=0}^{n}\left[1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta)\right]\|\ u_0 - p\|\end{aligned}$$

نفرض أن :

$$a_n = \prod_{i=0}^{n} \delta\left[1-\alpha_i\beta_i(1-\delta)\right] \quad ، \quad b_n = \prod_{i=0}^{n}\left[1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta)\right]$$

من الواضح أن $a_n > 0 \;, b_n > 0$ ومنه :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{i=0}^{n}\delta(1-\alpha_i\beta_i(1-\delta))}{\prod_{i=0}^{n}(1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta))} = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}\frac{\delta(1-\alpha_i\beta_i(1-\delta))}{(1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta)}$$

لكن : $\delta(1-\alpha_i\beta_i(1-\delta)) < 1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta)$

ومنه :

$$\frac{\delta(1-\alpha_i\beta_i(1-\delta))}{(1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta))} < 1$$

نضع : $q_i = \dfrac{\delta(1-\alpha_i\beta_i(1-\delta))}{(1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta))}$ عندئذٍ $0 \le q_i < 1$ مهما تكن i

لنفرض أن $\max q_i = q$ وبالتالي $0 \le q < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\delta(1-\alpha_i\beta_i(1-\delta))}{(1-\alpha_i\beta_i\delta(1-\delta)} \le \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

وهذا يؤكد أن المتتالية $\{a_n\}$ تتقارب بشكل أسرع من تقارب المتتالية $\{b_n\}$ وبالتالي فإن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب بسرعة أكبر من تقارب المتتالية $\{u_n\}$ نحو النقطة الثابتة لـ T .

فيما يلي نقدم مثالاً نتأكد فيه من أن ARS_n تتقارب بسرعة أكبر من تقارب ST_n من أجل T مؤثر Zamfirescu .

مثال عددي : بفرض $T:[0\,,1]\to[0,1]$ حيث $T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ وأن :

$$\alpha_n = \beta_n = 0 \quad : \quad n = 0,1,2,3,,,,,24$$

$$\alpha_n = \beta_n = \frac{4}{\sqrt{n}} \quad : \quad n \ge 25 \quad , x_0 = 0.9$$

(علماً بأن n يمكن أن تبدأ من أي رقم طبيعي بحيث تبقى القيم α_n, β_n ضمن المجال $[0,1[$ وهذا محقق مهما $n > 16$ وفي هذه الحالة يكون لدينا : $n = 0,1,2,3,,,,,16$: $\alpha_n = \beta_n = 0$)

من الواضح أن T يحقق الشرط Z لأن : $\|Tx - Ty\| \le \frac{1}{2}\|x-y\|$

وبالتالي لـ T نقطة ثابتة وهي $P = \frac{1}{2}$ لأن : $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in [0,1]$

ولنعين ARS_n , ST_n بالنسبة إلى T بدءاً من $x_0 \in [0\,,1]$

تعيين التكرارية ARS_n :

لدينا بالفعل :

$$x_{n+1} = (1-\frac{4}{\sqrt{n}})Tx_n + \frac{4}{\sqrt{n}}Ty_n$$

$$y_n = (1-\frac{4}{\sqrt{n}})x_n + \frac{4}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}\right]$$

عندئذٍ :

$$x_{n+1} = (1-\frac{4}{\sqrt{n}})(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}) + \frac{4}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{2}(1-\frac{2}{\sqrt{n}})x_n + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{4}\right]$$

ومنه :

$$x_{n+1} = (\frac{1}{2}-\frac{4}{n})x_n + \frac{2}{n} + \frac{1}{4}$$

$$\left\|x_{n+1} - \frac{1}{2}\right\| = \left\|ARS_{n+1} - \frac{1}{2}\right\| = \left\| (\frac{1}{2}-\frac{4}{n})x_n + \frac{2}{n} - \frac{1}{4} \right\| =$$

$$= (\frac{1}{2}-\frac{4}{n})\left\|x_n - \frac{1}{2}\right\| = \prod_{i=25}^{n}(\frac{1}{2}-\frac{4}{i})\left\|x_0 - \frac{1}{2}\right\|$$

تعيين التكرارية ST_n :

لدينا أيضاً :

$$u_{n+1} = (1-\frac{4}{\sqrt{n}})v_n + \frac{4}{\sqrt{n}}Tv_n$$

$$v_n = (1-\frac{4}{\sqrt{n}})u_n + \frac{4}{\sqrt{n}}Tu_n$$

ومنه :

$$v_n = (1-\frac{2}{\sqrt{n}})u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$u_{n+1} = (1-\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n})u_n + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}$$

عندئذٍ :

$$\left\|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right\| = \left\|ST_{n+1} - \frac{1}{2}\right\| = (1-\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n})\left\|u_n - \frac{1}{2}\right\| = \prod_{i=25}^{n}(1-\frac{4}{\sqrt{i}} + \frac{4}{i})\left\|u_0 - \frac{1}{2}\right\|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{ARS_{n+1}-\frac{1}{2}}{ST_{n+1}-\frac{1}{2}}\right\| = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=25}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{i}}{1-\frac{4}{\sqrt{i}}+\frac{4}{i}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=25}^{n}\left(1-\frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{\sqrt{i}}+\frac{8}{i}}{1-\frac{4}{\sqrt{i}}+\frac{4}{i}}\right) \le \lim_{n\to\infty}\prod_{i=25}^{n}(1-\frac{1}{i}) = \lim_{n\to\infty}\frac{24}{n} = 0$$

وبالتالي التكرارية ARS_n تتقارب نحو النقطة الثابتة لـ T بسرعة أكبر من تقارب التكرارية ST_n نحو النقطة ذاتها وهذا يتفق مع ما أثبتناه نظرياً .

نعد نقطة البدء $x_0 = 0,9$ للحالات كافة ونعين عدد الخطوات اللازمة لتقارب كل من التكراريتين (4)، (5) نحو النقطة الثابتة $p = 0.5$ للتطبيق المعرف بالمثال السابق بعد تغيير بارامتراتهما α_n, β_n .

فمثلاً من أجل $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}$ يصبح القانونان التدريجيان لـ ARS_n و ST_n على الشكل :

بالنسبة إلى ARS_n :
$$x_{n+1} = (\frac{1}{2}-\frac{1}{4.\sqrt[4]{n}})x_n + \frac{1}{8.\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{4}$$

و بالنسبة إلى ST_n :
$$x_{n+1} = (1-\frac{1}{\sqrt[8]{n}}+\frac{1}{4.\sqrt[4]{n}})x_n + \frac{1}{2.\sqrt[8]{n}} - \frac{1}{8.\sqrt[4]{n}}$$

وباستخدام برنامج باسكال نحصل على الجدول (1) الممثل لقيم المتتاليتين ARS_n و ST_n

ومن أجل $\beta_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ عندئذٍ يكون القانونان التدريجيان لـ ARS_n و ST_n آخذين الشكل:

قانون ARS_n التدريجي :
$$x_{n+1} = (\frac{1}{2}-\frac{1}{4n\sqrt{n}})x_n + \frac{1}{8n\sqrt{n}} + \frac{1}{4}$$

قانون ST_n التدريجي :
$$x_{n+1} = (1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{4n\sqrt{n}})x_n + \frac{1}{4\sqrt{n}} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n\sqrt{n}}$$

وباستخدام البرنامج ذاته نحصل على الجدول (2) الممثل لقيم المتتاليتين ARS_n و ST_n

ومن أجل $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ وباعتماد البرنامج ذاته نحصل على جدول جديد مشابه فنجد مثلاً عندما $n = 40$ أن ARS_n تقترب من 0.500001387997 وأن ST_n تقترب من 0.500210866499

وبعد استخدام قيم مختلفة للمتتاليتين $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ لاحظنا ما يلي :

إن تغيير حدود المتتاليتين لا يؤثر بالدرجة ذاتها في سرعة تقارب ST_n و ARS_n فالتكرارية ST_n تتأثر بشكل كبير عند تصغير قيمهما حيث يحصل تباطؤ في تقارب ST_n والعكس بالعكس أما بالنسبة إلى ARS_n فلا يحصل الأمر ذاته إذ إن التأثر هنا لا يعدو كونه صغيراً

الاستنتاجات والتوصيات :

تم في هذا البحث إثبات التكافؤ بين تقارب التكراريتين ARS_n و ST_n عندما تطبق مؤثرات Zamfirescu وتكون نقطة الارتكاز ذاتها للتكراريتين. كما تم البرهان على أن سرعة الوصول إلى النقطة الثابتة ليست هي ذاتها للتكراريتين ، وتبين تجريبياً أن هذه السرعة ترتبط بـ $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ وبخاصة التكرارية ST_n التي تتأثر بشكل واضح بكبر أو صغر حدود α_n و β_n وبالتالي لا يفضل استخدام ST_n عندما تكون قيم حدود المتتاليتين صغيرة إنما يستحسن استخدام ARS_n في هذه الحالة.

يمكن اعتماد الأسلوب ذاته لدراسة المقارنة بتكراريات أخرى مولدة بتطبيقات جديدة شريطة أن تكون التكراريات كافة متقاربة واستنتاج دور $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ في سرعة التقارب من خلال معالجة حالات متعددة لهما .

ملحق (1) يتضمن برنامج باسكال للتكراريتين ARS_n و ST_n

الكود البرمجي لتكرارية ARS_n :

```
procedure TForm1.ButtonA1Click(Sender: TObject);
var x2,x1,N4,N8:Real48;
n:integer;
begin
  try
     beginningValue:=StrToInt(EdBegin.Text);
     RepeatingNum:=StrToInt(EdRepeating.Text);
  except
     ShowMessage('Input the beginning Value and Repeating Number ');
     exit
  end;
  MemoA1.Lines.Clear;
  MemoA1.Lines.Add('A1');
  x1:=0.9;
   for n:=beginningValue to RepeatingNum do
   begin
     n8:=Power(n,1/8);
     n4:=Power(n,1/4);
     x2:=(0.5-(1/(4*N4)))*x1;
     x2:= x2+(1/(8*n4))+0.25;
     MemoA1.Lines.Add(IntToStr(n)+'                                                    :
'+FormatFloat('0.00000000000000000000',x2)) ;
     x1:=x2;
   end;
end;
```

الكود البرمجي لتكرارية ST_n :

```
procedure TForm1.ButtonS1Click(Sender: TObject);
var x2,x1,N4,N8:Real48;
n:integer;
begin
  try
     beginningValue:=StrToInt(EdBegin.Text);
     RepeatingNum:=StrToInt(EdRepeating.Text);
  except
     ShowMessage('Input the beginning Value and Repeating Number ');
     exit
  end;
  MemoS1.Lines.Clear;
  MemoS1.Lines.Add('S1');
  x1:=0.9;
   for n:=beginningValue to RepeatingNum do
   begin
     n8:=Power(n,1/8);
     n4:=Power(n,1/4);
     x2:=(1-(1/N8)+(1/(4*n4)))*x1;
     x2:=x2+1/(2*n8)-(1/(8*n4));
     MemoS1.Lines.Add(IntToStr(n)+'                                                  :
'+FormatFloat('0.000000000000000000',x2));
     x1:=x2;
   end;
end;
```

ملحق (2) يتضمن جدولين لقيم التكراريتين المحسوبتين في المثال العددي:

جدول رقم (1)

$$\left(\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}} \right)$$

n	ARS_n	n	ST_n
25	: 0.65527864044997	25	: 0.677225237559
26	: 0.56044803319036	26	: 0.578908249296
27	: 0.52359450946005	27	: 0.535298425823
28	: 0.50923299829901	28	: 0.515861226233
29	: 0.50362181942637	29	: 0.507157902942
30	: 0.50142402061828	30	: 0.503243602362
31	: 0.50056113580285	31	: 0.501475681642
32	: 0.50022158576575	32	: 0.500673932406
33	: 0.50008768003954	33	: 0.500308914499
34	: 0.50003476242000	34	: 0.500142102645
35	: 0.50001380821049	35	: 0.500065592646
36	: 0.50000549481046	36	: 0.500030377199
37	: 0.50000219042158	37	: 0.500014113454
38	: 0.50000087465377	38	: 0.500006577608
39	: 0.50000034982622	39	: 0.500003074755
40	: **0.50000014013767**	40	**: 0.500001441523**
41	: 0.50000005622405	41	: 0.500000677742
42	: 0.50000002259093	42	: 0.500000319524
43	: 0.50000000909039	43	: 0.500000151045
44	: 0.50000000366253	44	: 0.500000071588
45	: 0.50000000147792	45	: 0.500000034015
46	: 0.50000000059662	46	: 0.500000016202
47	: 0.50000000024101	47	: 0.500000007736
48	: 0.50000000009731	48	: 0.500000003702
49	: 0.50000000003910	49	: 0.500000001776
50	: 0.50000000001546	50	: 0.500000000854
51	: 0.50000000000636	51	: 0.500000000411
52	: 0.50000000000272	52	: 0.500000000198
53	: 0.50000000000090	53	: 0.500000000096
54	: **0.50000000000000**	54	: 0.500000000046
55	: 0.50000000000000	55	: 0.500000000022
56	: 0.50000000000000	56	: 0.500000000010
57	: 0.50000000000000	57	: 0.500000000005
58	: 0.50000000000000	58	: 0.500000000002
59	: 0.50000000000000	59	**: 0.500000000000**
60	: 0.50000000000000	60	: 0.500000000000

جدول رقم (2)

$$\left(\alpha_n = \frac{1}{n} \quad , \quad \beta_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right)$$

n		ARS_n	n		ST_n
25	:	0.69920000000001	25	:	0.852799999999
26	:	0.59922436217220	26	:	0.812085784650
27	:	0.54943536870268	27	:	0.776832069427
28	:	0.52463427000748	28	:	0.746197578018
29	:	0.51227769992510	29	:	0.719488039407
30	:	0.50612017003641	30	:	0.696127420786
31	:	0.50305122038116	31	:	0.675635389779
32	:	0.50152139624788	32	:	0.657609529327
33	:	0.50075869175179	33	:	0.641711208182
34	:	0.50037838915159	34	:	0.627654284502
35	:	0.50018873772296	35	:	0.615196020787
36	:	0.50009415041495	36	:	0.604129736383
37	:	0.50004697062468	37	:	0.594278833903
38	:	0.50002343518281	38	:	0.585491918447
39	:	0.50001169353618	39	:	0.577638790928
40	**:**	**0.50000583521250**	**40**	**:**	**0.570607144255**
41	:	0.50000291204923	41	:	0.564299827557
42	:	0.50000145334979	42	:	0.558632571634
43	:	0.50000072538659	43	:	0.553532090658
44	:	0.50000036207165	44	:	0.548934492074
45	:	0.50000018073569	45	:	0.544783940045
46	:	0.50000009022278	46	:	0.541031528268
47	:	0.50000004504181	47	:	0.537634326332
48	:	0.50000002248725	48	:	0.534554570456
49	:	0.50000001122771	49	:	0.531758974741
50	:	0.50000000560612	50	:	0.529218143340
51	:	0.50000000279942	51	:	0.526906067422
52	:	0.50000000139789	52	:	0.524799693588
53	:	0.50000000069849	53	:	0.522878552662
54	:	0.50000000034924	54	:	0.521124439656
55	:	0.50000000017462	55	:	0.519521137223
56	:	0.50000000008731	56	:	0.518054176143
57	:	0.50000000004365	57	:	0.516710627460
58	:	0.50000000002182	58	:	0.515478921699
59	:	0.50000000001091	59	:	0.514348691332
60	**:**	**0.50000000000545**	60	:	**0.513310633228**

المراجع:

1) Agarwal.R.P, Oregan .D ,Sahu.DR, *Iterative contraction of fixed point of nearly asymptotically non expansive mappings* ,j,Non linear convex Anal .8(1),61-79 (2007)
2) Thianwan.S, *Common fixed points of new iterations for two asymptotically non expansive non self mappings in Banach spaces*, Journal of computational and applied, Mathematics 2009(688-695)
3) RHOADES. B.E, *Fixed point iterations using infinite matrices,* Trans. Amer . Math. Soc. 196(1974) ,161-176
4) CIRIC, L.B., *Ageneralisation of Banach contraction principle* , proc.Amer.Math .Soc .45 (1974),267-273
5) BERINDE.V, *On the convergence of the Ishikawa iteration in the class of quasi contractive operators*. Acta. Math. Univ. Comeniane. Vol. LXXIII, 1(2004), 119-126
6) S,OLTUZ.S,.M, *The equivalence of picard , Mann and Ishikawa iterations dealing with quasi –contractive operators* ,Mathematical communications,10(2005),81-88
7) S,oltuz. S,.M, *The equivalence between Krasnoselskij, Mann, Ishikawa and multi step iterations,* Mathematical communications, 12 (2007)(53-61)
8) BABU, G,V.R .; VARA PRASAD. K.N.V.V, *Mann iteration* converges faster than Ishikawa iteration for the class of Zamfirescu operators, *Fixed point theory and applications* ,VOL 2006 (1-6)
9) BERINDE, V. *Picard iteration converges faster than Mann iteration for* aclass *of quasi –contractive operators Fixed point theory and applications,* 2004, 2(97-105)
10) Rhoades.B.E and Xue Zhiqun ,*Comparison of the rate of convergence among Picard, Ishikawa ,and Noor iterations applied to quasi contractive maps* , Fixed point theory and applications ,VOL 2010 ,(1-12) (2010)
11) OLALERU.J.O, *Acomparison of Picard and Mann iteration for quasi contraction maps* , Fixed point theory .VOL 8 No. 1 (2007),87-95
12) BERINDE.V, *Iterative approximation of fixed points* ,Springer, Verlag, Berlin Heidlberg , 2007
13) CHUGH. R, Kumar.V ,*Strong covergennce of SP iterative scheme for quasi contractive operators*, International Journal of computer applications (0975-8887), Volume 31 –No.5, 2011
14) RAFIQ. A, DAMJANORIC. B, LAZVIC. R, *On rate of convergence of varios iterative schemes* .Fixed point theory and applications 2011, 2011,45