مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

دراسة حول بعض العلاقات في الفضاء L_p

الدكتور محمد علي*

(تاريخ الإيداع 7 / 2 / 2012. قُبِل للنشر في 12 / 6 /2012)

□ ملخّص □

ندرس في هذا البحث بعض العلاقات في الفضاء $L_p(\Gamma)$ وفي الفضاء الموزّن $L_p(\Gamma,V)$ ، وهذه العلاقات تربط بين نظيم الدالة في الفضاء L_p الموزّن (وغير الموزّن) على منحني Γ مع نظيم نفس الدالة في نفس الفضاء ولكن على منحني السوية Γ_p .

وقد تمت دراسة المساواة بين معامل الاستمرار للدالة على المنحني المفتوح Γ ومعامل الاستمرار على المنحني المغلق C في الفضاء L_p .

الكلمات المفتاحية : معامل الاستمرار، منحنى السوية ، فضاء L_p

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (2) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (2) 2012

On Some Relations in the Space L_p

Dr. Mohammad Ali *

(Received 7 / 2 / 2012. Accepted 12 / 6 /2012)

□ ABSTRACT □

In this study we discuss some relations in L_p space and in weighted space $L_p(\Gamma, V)$; these relations are between the norm of the function f in the space L_p on the curve Γ and the norm of the same function in the same space, but on the level curve Γ_ρ

Also the equivalence between the module of continuity of function in $L_p(\Gamma)$ and $L_p(C)$ would be studied .

Key Words : Module of continuity, level curve,L_p *space*.

*Associate professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

نشير في البداية إلى أن نتائج هذا البحث تندرج ضمن المبرهنات التي تلعب دورا أساسيا في الوصول إلى حل بعض مسائل نظرية تقريب الدوال العقدية، لذلك انطلاقا من أساسيات نظرية تقريب الدوال العقدية والتي تتلخص بالآتي:

1-فضاء الدوال المقرب

2- أسرة كثيرات الحدود التي تشكل وسيلة التقريب

3-معامل الاستمرار الذي يفيد في تقدير درجة التقريب

قمنا في هذا البحث بدارسة بعض العلاقات في فضاء واسع من الدوال وهو فضاء دوال ليبغ L_p مستخدمين النظيم الشهير في هذا الفضاء ، من أجل الوصول إلى النتائج المرجوة.

وبشكل أكثر تحديدا أثبتنا في هذا البحث بعض المتراجحات في المستوي العقدي التي تعطي العلاقة بين نظيم الدالة f في الفضاء L_p على المنحني Γ وبين نظيم نفس الدالة f في الفضاء L_p على منحني السوية Γ_p ، وقد أوجدنا هذه المتراجحات من أجل حالات مختلفة للدالة f ومن أجل حالات مختلفة للمنحني Γ أدخلنا في النتيجة الأخيرة مفهوم معامل الاستمرار وقد حصلنا على علاقة بين معامل الاستمرارية في الفضاء $L_p(\Gamma)$ و معامل الاستمرار في الفضاء $L_p(C)$ حيث إن C هو المنحني الذي يشكل صورة المنحني Γ وفق تحويل جوكوفسكي العكسي .

أهمية البحث وأهدافه:

الهدف الأساسي في هذا البحث هو الوصول إلى المتراجحة :

$$\|f\|_{L_p(\Gamma_p)} \leq c\,\|f\|_{L_p(\Gamma)}$$

في الحالات الآتية :

1) $f \in E_p(\Omega)$ حيث إن Ω هو الجزء من المستوي العقدي الذي يقع خارج المنحني المفتوح Γ . (f دالة من فضاء سميرنوف $(E_p(\Omega))$.

2) $f \in E_p(\Omega, V)$ حيث إن Ω هي المنطقة الواقعة خارج المنحني المغلق C . (f دالة من دوال فضاء سميرنوف الموزّن) .

3) $f \in E_p(G, V)$ حيث إن G هي المنطقة الواقعة داخل المنحني المغلق C .

4) $f \in L_p(C, V)$ حيث إن C منحنٍ مغلق يشكل محيطاً للمنطقة G .

5) $f \in L_p(\Gamma)$ حيث إن Γ هو منحنٍ مفتوح .

أما الهدف الآخر فهو الوصول إلى العلاقة : $\omega_{p,V}(f_*, \delta) = \omega_p(f, \delta)$

حيث إن $\omega_{p,v}(f_*, \delta)$ هو معامل الاستمرار للدالة f_* في فضاء ليبغ الموزن

و $\omega_p(f, \delta)$ هو معامل الاستمرار للدالة f

طرائق البحث ومواده:

البحث يقع ضمن اختصاص الرياضيات وبشكل خاص ضمن التحليل الرياضي وهو يملك صبغة نظرية تستخدم فيه طرائق نظرية تخص بشكل عام نظرية الدوال العقدية والتحليل الدالي .

تعاريف ومفاهيم أساسية :

لتكن Ω – منطقة وحيدة اتصال في المستوي العقدي تحوي ∞ ولتكن $\overline{G}$ هي متممة Ω و $\Gamma = \partial\Omega = \partial G$ الحدود المشتركة لنرمز بـ $w = \varphi(z)$ للدالة التي تحول بشكل محافظ Ω إلى خارج قرص الوحدة D بحيث يحقق $\varphi(\infty) = \infty$ و $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{\varphi(z)}{z} > 0$

تعريف $\underline{(1)}$: [1] منحني السوية $\Gamma_{1+\sigma}$

نرمز بـ $\Gamma_{1+\sigma}$ لمنحن السوية لـ $\overline{G}$ المعرف بالشكل التالي :

$$\Gamma_{1+\sigma} = \{t \;;\; |\varphi(t)| = 1 + \sigma \geq 1 \quad \}$$

سوف نرمز في كل المبرهنات القادمة لمنحنيات السوية بالرمز $\Gamma_\rho ; \rho \geq 1$ او بـ C_ρ

تعريف $\underline{(2)}$:[2] فضاء الدوال $L_P(\,C\,)$.

سوف نرمز بـ $L_p(\,C\,)$ ، $1 \leq P < \infty$ ، لأسرة كل الدوال العقدية المقيسة على C والتي من أجلها يكون $|\,f\,|^P$ قابلاً للمكاملة ليبيغياً ، أي :

$$\int_C |f(z)|^P dz \leq c < \infty$$

ويعرّف النظيم في هذا الفضاء بالشكل :

$$\|f\|_{L_p(C)} = \left(\int_C |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}$$

تعريف $\underline{(3)}$:[3] فضاء الدوال الموزّن $L_P(C\,,V\,)$.

لتكن V دالة وزن (دالة غير سالبة وقابلة للمكاملة) على C ، سوف نرمز بـ $L_p(C\,,V\,)$ لفضاء ليبيغ الموزّن على C وهو مجموعة الدوال f المقيسة على C والتي من أجلها :

$$\|f\|_{L_p(C,V)} = \left(\int_C |f(z)V(z)|^P \,|dz| \right)^{\frac{1}{P}} < \infty$$

نلاحظ أنه من أجل $V(Z) \equiv 1$ فإن $L_p(C\,,V\,) = L_p(\,C\,)$.

تعريف $\underline{(4)}$:[2] صف دوال سميرنوف $E_P(\,G\,)$.

تكون الدالة f منتمية إلى صف سميرنوف $E_P(\,G\,)$ حيث $1 \leq p < \infty$ إذا كانت تحليلية في المنطقة G وتحقق

$$\sup_{0\le r<1}\int_{\Gamma_r}|f(z)|^p|dz|<\infty$$

حيث إن Γ_r هي صورة الدوائر $\{z:|z|=r\}$ وفق الدالة التي تحول قرص الوحدة D إلى المنطقة G يعرّف في هذا الفضاء النظيم المعرّف في الفضاء $L_p(C)$. ويمكن للمهتمين ايجاد تعريف لهذا الصف بصياغة أخرى في [4] و[5]

تعريف (5) : **يعرّف صف دوال سميرنوف الموزّن** $E_P(G,V)$ بالشكل[3] : .

$$E_p(G,V)=\{f\in E_1(G)\ ;\ f\in L_p(C,V)\}$$

بشكل آخر نقول: إن $f\in E_P(G,V)$ إذا كان $f.V\in E_p(G)$

تعريف (6) [1]: **صف دوال الوزن** $W_p(C)$.

الأسرة $W_p(C)$ هي أسرة جميع الدوال V المقيسة والمحدودة على المنحن الذي يملك طولا محدودا C *(rectifiable)* والتي من أجلها يكون تكامل كوشي الشاذ $S_c f$ مؤثراً محدوداً في الفضاء $L_p(C,V)$ ، أي إن :

$$\|S_c f\|_{L_p(C,V)}\le c\,\|f\|_{L_p(C,V)}$$

حيث إن :

$$S_c f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\quad ;\quad z\in C$$

تعريف (7) : **صف منحنيات ريس** .

نقول عن منحن ذي طول محدود C إنه ينتمي إلى أسرة منحنيات ريس R_p إذا كان تكامل كوشي الشاذ محدوداً في الفضاء $L_p(C)$ ، أي إذا كان :

$$\|S_c f\|_{L_p(C)}\le A\,\|f\|_{L_p(C)}$$

النتائج والمناقشة :

مبرهنة (1) [1]: لتكن G منطقة محيطها C ذو طول محدود و$\Omega=CG$ بحيث $\infty\in\Omega$ ، عندئذٍ إذا كانت $f\in E_p(\Omega)$ $(P\ge 1)$ فإنه من أجل أي $R>1$ ومن أجل كل $\rho\in(1,R]$ يكون :

$$\|f\|_{L_p(C_\rho)}\le R^{2/p}\,\|f\|_{L_p(C)}$$

من هذه المبرهنة سوف نثبت مجموعة من المبرهنات والنتائج كما يأتي :

نتيجة (1) : إذا كان $f\in E_p(\Omega,V)$ ، $(P\ge 1)$ ، فإن :

$$\|f\|_{L_p(C_\rho,V)}\le R^{2/p}\,\|f\|_{L_p(C,V)}$$

الإثبات : بما أن $f\in E_p(\Omega,V)$ فإن $f.V\in E_p(\Omega)$ منه ومن المبرهنة (1) يكون :

$$\|f.V\|_{L_p(C_\rho)}\le R^{2/p}\,\|f.V\|_{L_p(C)}$$

وهذا يعني أن :

$$\| f \|_{L_p(C_\rho,V)} \le R^{2/p} \| f \|_{L_p(C,V)}$$

مبرهنة (2) : ليكن Γ منحناً مفتوحاً (قوس) يملك طولا محدودا و Ω هي المنطقة الواقعة خارج Γ عندئذٍ من أجل أية دالة $f \in E_p(\Omega)$ ، $(P \ge 1)$ ، و $\infty \in \Omega$ عندئذ من أجل أي $R > 1$ ومن أجل كل $\rho \in (1, R]$ تتحقق المتراجحة :

$$\| f \|_{L_p(\Gamma_\rho)} \le R^{2/p} \| f \|_{L_p(\Gamma)}$$

الإثبات: من أجل الإثبات نستخدم تحويل جوكوفسكي العكسي $t = \frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$ (ويكون : $z = t + \frac{1}{t}$)

لن تتأثر عمومية المبرهنة إذا فرضنا أن نهايتي المنحني Γ في المستوي العقدي تقعان في النقطتين -2 و 2 من الواضح [1]عندها أن تحويل جوكوفسكي العكسي سوف ينقل المنحني المفتوح Γ إلى منحن مغلق C يحوي داخله الصفر كما أن خارج Γ سينتقل إلى خارج C

لدينا $f(z) \in E_p(\Omega)$ من الواضح أن $f_*(t) = f(t+t^{-1})(1-1/t^2)^{1/P} \in E_P(G)$ حيث إن G−خارج C منه ومن المبرهنة 1 (التي تسمى مبرهنة اندراشكا) يكون:

$$\|f_*\|_{L_P(C_\rho)} \le R^{2/P} \|f_*\|_{L_P(C)} \qquad (1)$$

$$\|f_*\|_{L_P(C_\rho)} = \left(\int_c |f_*(t)|^P dt\right)^{1/p} = \left(\int_c |f(t+t^{-1})|^P \left|1-1/t^2\right| |dt|\right)^{1/p} = \left(\int_c |f(t+t^{-1})|^P |d(t+t^{-1})|\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_\Gamma |f(z)|^P dz\right)^{1/p} = \| f \|_{L_P(\Gamma)} \qquad (2)$$

وبالشكل نفسه نثبت أن :

$$\|f_*\|_{L_P(C_\rho)} \approx \| f \|_{L_P(\Gamma_\rho)} \qquad (3)$$

من العلاقات (1) و (2) و (3) ينتج :

$$\| f(z) \|_{L_p(\Gamma_\rho)} \le R^{2/p} \| f \|_{L_p(\Gamma)}$$

بالاعتماد على المبرهنة (2) نحصل على النتيجة الآتية التي تخص صف دوال سميرنوف الموزّن :

نتيجة (2) : ليكن Γ منحنياً مفتوحاً و Ω هي المنطقة الواقعة خارج Γ و $\infty \in \Omega$.
إذا كان $f \in E_p(\Omega, V)$ ، $(P \ge 1)$ ، فإن :

$$\| f \|_{L_p(\Gamma_\rho,V)} \le R^{2/p} \| f \|_{L_p(\Gamma,V)}$$

مبرهنة 3 : لتكن G منطقة وحيدة اتصال محيطها C يملك طولا محدودا بحيث $0 \in G$ ولتكن Ω هي خارج C أي $C = \partial G = \partial\Omega$، إذا كان $f \in E_p(G)$ $(P \ge 1)$ عندئذ من أجل أي $R > 1$ ومن أجل كل $\rho \in (1, R]$ تتحقق المتراجحة :

$$\| f \|_{L_p(C_\rho)} \le R^{2/p} \| f \|_{L_p(C)}$$

حيث إن C_ρ هي منحنيات السوية للمنطقة G

الإثبات : لنأخذ التحويل $t=\frac{1}{z}$. فإذا رمزنا بـ C^* لصورة C وفقاً لهذا التحويل و Ω^* للمنطقة الواقعة خارج C^* في المستوي t عندئذٍ باستخدام التحويل $t=\frac{1}{z}$ فإن المنطقة G سوف تتحول إلى Ω^* لنرمز بـ. $f^*(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{p}}$ عندئذٍ :

بما أن $f(z)\in E_p(\mathrm{G})$ فإن $f^*(t)\in E_p(\Omega^*)$ استنادا للمبرهنة (1) يكون :

$$\left\|f^*(t)\right\|_{L_p(C_\rho)}\le R^{2/p}\left\|f^*(t)\right\|_{L_p(C)} \tag{4}$$

و لدينا :

$$\|f^*(t)\|_{L_p(C^*)}=\left(\int_{C^*}|f^*(t)|^p|dt|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{C^*}\left|f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p|dt|\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{C}|f(z)|^p|d(z)|\right)^{\frac{1}{p}}$$

أي إن :

$$\|f^*(t)\|_{L_p(C^*)}=\left(\int_{C^*}|f^*(t)|^p|dt|\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{C}|f(z)|^p|d(z)|\right)^{\frac{1}{p}}=\|f(z)\|_{L_p(C)}$$

بنفس الطريقة نثبت أن $\left\|f^*(t)\right\|_{L_p(C_\rho)}=\left\|f(z)\right\|_{L_p(C_\rho)}$

منه ومن العلاقة (4) يكون :

$$\|f(z)\|_{L_p(C_\rho)}\le R^{2/p}\|f\|_{L_p(C)}$$

بالاعتماد على المبرهنة(3) وباستخدام طريقة إثبات النتيجة (1) نحصل على النتيجة الآتية

نتيجة (3) :: إذا كان $f\in E_p(G,V)$ ، $P\ge 1$ ، فإن

$\|f\|_{L_p(C_\rho,V)}\le R^{2/p}\|f\|_{L_p(C,V)}$.

مبرهنة مساعدة [4] : إذا انتمت دالة الوزن V إلى الصف $\mathrm{W_p}(\Gamma)$ فإن $\frac{1}{V}\in L_q(\Gamma)$.

مبرهنة (4) : ليكن C منحناً مغلقاً منتميا إلى صف منحنيات ريس R_p و G هي المنطقة المحاطة بالمنحني C .إذا كان $f\in L_p(C,V)$ ، $(P\ge 1)$ ، و $V\in \mathrm{W_p}(\mathrm{C})$ عندئذ من أجل أي $R>1$ ومن أجل كل $\rho\in(1,R]$ تتحقق المتراجحة :

$$\|f\|_{L_p(C_\rho)}\le 2R^{2/p}\|f\|_{L_p(C)}$$

الإثبات : بما أن $f\in L_p(C,V)$ و $V\in \mathrm{W_p}(\mathrm{C})$ فإن :

$$\left(\int_C|f(z)V(z)|^p|dz|\right)^{1/p}<\infty \tag{5}$$

ولدينا

$$\int_C |f(z)||dz| = \int_C |f(z).V(z)|\left|\frac{1}{V(z)}\right||dz|$$
$$\leq \left(\int_C |f(z).V(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_C \left|\frac{1}{V(z)}\right|^q |dz|\right)^{\frac{1}{q}}$$

من العلاقة (5) ومن المبرهنة المساعدة ينتج أن :

$$\int_C |f(z)|\,|dz| < \infty$$

الأمر الذي يعني أن : $f \in L_1(C)$.

وهذا يؤدي حسب مبرهنة بريفالف إلى أن تكامل كوشي الشاذ للدالة f على المنحني C موجود وبالتالي توجد دالتان f^+ و f^- بحيث إن $f^+ \in E_p(G,V)$ و $f^- \in E_p(\Omega,V)$ و $f = f^+ - f^-$ حيث إن [1] :

$$f^+ = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}S_C f$$
$$f^- = -\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}S_C f$$

(هذه العلاقات الشهيرة تسمى علاقات سوخوتسكي)

منه ومن كون $C \in R_p$ فإن :

$$\|f^+\|_{L_p(C)} \leq \|f\|_{L_p(C)} \tag{6}$$
$$\|f^-\|_{L_p(C)} \leq \|f\|_{L_p(C)} \tag{7}$$

– بالنسبة لـ f^+ تتحقق من النتيجة (3) المتراجحة :

$$\|f^+\|_{L_p(C_\rho,V)} \leq R^{2/p}\|f^+\|_{L_p(C,V)} \tag{8}$$

– أما بالنسبة لـ f^- فمن النتيجة (1) يكون :

$$\|f^-\|_{L_p(C_\rho,V)} \leq R^{2/p}\|f^-\|_{L_p(C,V)} \tag{9}$$

من العلاقات (9) و (6)و (7) و (8) ينتج أن :

$$\|f\|_{L_p(C_\rho,V)} = \|f^+ - f^-\|_{L_p(C_\rho,V)} \leq \|f^+\|_{L_p(C_\rho,V)} + \|f^-\|_{L_p(C_\rho,V)}$$
$$\leq R^{2/p}\|f^+\|_{L_p(C,V)} + R^{2/p}\|f^-\|_{L_p(C,V)}$$
$$\leq R^{2/p}\|f\|_{L_p(C,V)} + R^{2/p}\|f\|_{L_p(C,V)}$$
$$= 2R^{2/p}\|f\|_{L_p(C,V)}$$

– ليكن Γ منحناً مفتوحاً يملك طولا محدودا تقع نهاياته عند النقطتين -2 و 2، ولنرمز بـ C للمنحني المغلق الذي يمثل صورة Γ وفقاً لتحويل جوكوفسكي العكسي : $t=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$ أو $\left(z=t+\frac{1}{t}\right)$، [1] وليكن $f(z)\in L_p(\Gamma)$. ندخل في دراستنا الرموز الآتية:

– نرمز بـ $f_*(t)=f\left(t+\frac{1}{t}\right)$ من الواضح أن هذاه الدالة تنتمي إلى $L_p(C,V)$ حيث إن : $V=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{p}}$.

– نرمز بـ $w=\varphi(z)$ للتابع الذي يحوّل خارج المنحني المفتوح Γ إلى خارج الدائرة الواحدية γ_0 . $z=\psi(w)$ التابع العكسي لـ $\varphi(z)$.

– نرمز بـ $w=\varphi_1(z)$ للتابع الذي يحوّل خارج المنحني المغلق C إلى خارج الدائرة الواحدية γ_0 . $z=\psi_1(w)$ التابع العكسي لـ $\varphi_1(z)$.

–يعرف معامل الاستمرارية للتابع $f(z)$ بالشكل[1] :

$$\omega_p(f,\delta)_\Gamma=SUP_{|h|\le\delta}\|f(z_h)-f(z)\|_{L_p(\Gamma)}$$

حيث إن : $z_h=\psi\left(\varphi(z)e^{ih}\right)$.

ونعرّف معامل الاستمرارية للتابع $f_*(t)$ في الفضاء $L_p(C,V)$ بالشكل :

$$\omega_{P,V}(f_*,\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\|f_*(t_h)-f_*(t)\|_{L_P(C,V)}$$

حيث إن : $t_h=\psi_1\left(\varphi_1(t)e^{ih}\right)$.

المبرهنة الآتية تعطينا العلاقة بين معامل الاستمرار للدالة f ومعامل الاستمرار للدالة f_* :

<u>**مبرهنة 5**</u> : إذا كان $f\in L_p(\Gamma)$ فإن :

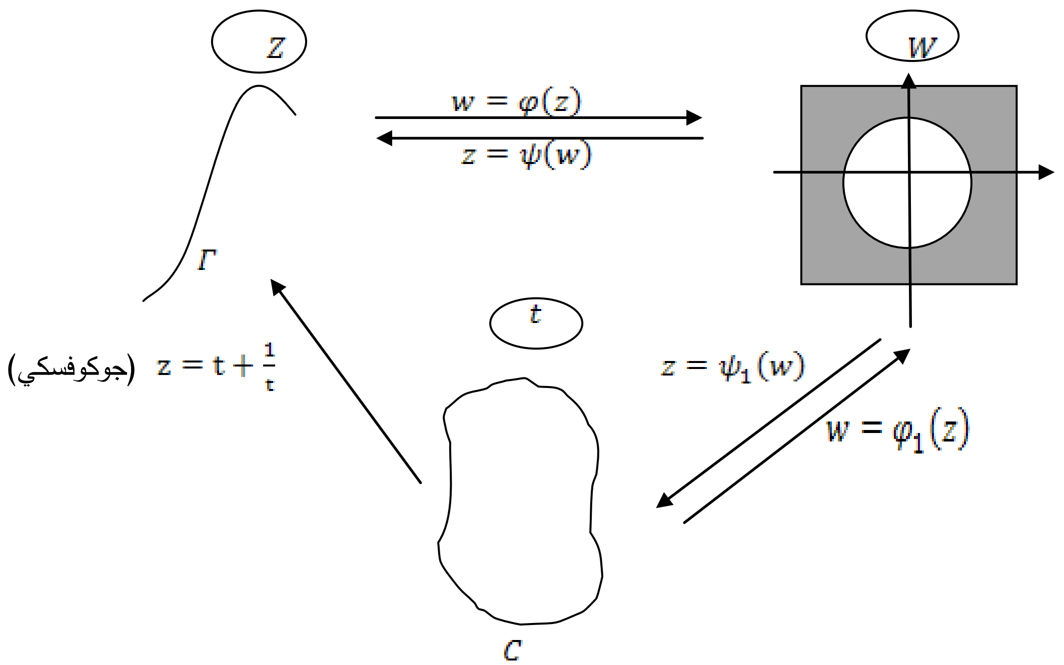
$$\omega_{p,V}(f_*,\delta)_C=\omega_p(f,\delta)_\Gamma$$

<u>**الإثبات**</u> : المطلوب إثبات أن :

$$\|f(z_h)-f(z)\|_{L_p(\Gamma)}=\|f(t_h)-f(t)\|_{L_p(C,V)}$$

$$\left\|f\left(\psi\left(\varphi(z)e^{ih}\right)\right)-f(z)\right\|_{L_p(\Gamma)}=\left\|f\left(\psi_1\left(\varphi_1(t)e^{ih}\right)\right)-f(t)\right\|_{L_p(C,V)}$$

لذلك نوجد أولاً العلاقة بين φ و φ_1 وبين ψ و ψ_1 وبالتالي العلاقة بين z_h و t_h كما يأتي :



الشكل (1)

من الشكل (1) نستطيع بسهولة التوصل إلى :

$$w = \varphi_1(t) = \varphi\left(t + \frac{1}{t}\right) = \varphi(z)$$

أي إن :

$$\varphi_1(t) = \varphi(z)$$

أما بالنسبة لـ ψ و ψ_1 لدينا :

$$\psi(w) = z = t + \frac{1}{t} = \psi_1(w) + \frac{1}{\psi_1(w)} = \psi_1(w) + {\psi_1}^{-1}(w)$$

فإذا كانت $z \in \Gamma$ فإن $z = t + \frac{1}{t}$ ومنه يكون

$$z_h = \psi\left(\varphi(z)e^{ih}\right) = \psi_1\left(\varphi_1(t)e^{ih}\right) + {\psi_1}^{-1}\left(\varphi_1(t)e^{ih}\right) = t_h + {t_h}^{-1}$$

لدينا :

$$f_*(t) = f(t + t^{-1}) = f(z)$$

و

$$f_*(t_h) = f(t_h + {t_h}^{-1}) = f(z_h)$$

منه يكون :

$$\| f_*(t_h) - f_*(t) \|_{L_p(C,V)} = \left(\int_C \left| \left(f_*(t_h) - f_*(t) \right) . V(t) \right|^P |dt| \right)^{\frac{1}{P}}$$

$$=\left(\int_C |f_*(t_h)-f_*(t)|^p \left|\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt\right|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_\Gamma |f(z_h)-f(z)|^p|dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|f(z_h)-f(z)\|_{L_P(\Gamma)}$$

بالطريقة نفسها نستطيع تعميم هذه المبرهنة من أجل معامل الملاسة :

$$\omega_p^{(2)}(f,\delta)=SUP_{|h|\le\delta}\|f(z_h)+f(z_{-h})-2f(z)\|_{L_p(\Gamma)}$$

ومعامل الملاسة :

$$\omega_{p,V}^{(2)}(f_*,\delta)=SUP_{|h|\le\delta}\|f_*(t_h)+f_*(t_{-h})-2f_*(t)\|_{L_p(C,V)}$$

أي إثبات المبرهنة الآتية :

<u>مبرهنة (6)</u> : من أجل $f\in L_p(\Gamma)$ يكون :

$$\omega_{p,V}^{(2)}(f_*,\delta)_C=\omega_p^{(2)}(f,\delta)_\Gamma$$

<u>الإثبات</u>: من المبرهنة (5) وجدنا أن $f(z_h)=f_*(t_h)$.

و بالشكل نفسه نستطيع التوصل إلى أن :

$$f(z_{-h})=f_*(t_{-h})$$

وأن : $f(z)=f_*(t)$

منه وبتكرار نفس خطوات المبرهنة السابقة نحصل على :

$$\|f(z_h)+f(z_{-h})-2f(z)\|_{L_p(\Gamma)}=\|f_*(t_h)+f_*(t_{-h})-2f_*(t)\|_{L_p(C,V)}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

إن هذه النتائج يمكن توظيفها في عدة مجالات من التحليل الرياضي وخصوصاً في مجال تقريب التوابع العقدية ويمكن أن نبحث في نتائج مشابهة في صفوف تابعية أخرى مثل صف سميرنوف اورليتش.

المراجع :

[1]- MAMEDKHANOV, M , J.Y. Approximation in complex plane and singular Operetors with Cauchy′ s kernel . Dr. dis ,Ussr-Baku , 1982.

[2] - AKGÜN , R ; ISRAFILOV, D. M . Approximation by interpolating polynomials in Smirnov- Orlicz class . J. Korean Math, soc 43, No 2 , 2006 , 413 – 424 .

[3] - GUVEN, A ; ISRAFILOV, D. M. Multiplier theorems in weighted Smirnov spaces. J. Korean Math soc, 45, No 6, 2008 , 1535 – 1548.

[4]- ANDERSSON, J.E. On the degree of polynomial approximation of holomorphic function .Dr. disserdtation , University of Götebory , 1975 .

[5]- ALI, M . Problems approximation theory in complex plane . phd. dissertation, Baku, 1990, 98