مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

الخواص المحيطية لبعض الداليات في فضاء الدوال التحليلية C_α

الدكتور حسن بدور[*]
الدكتور محمد علي[**]
هناء سكاف[***]

(تاريخ الإيداع 21 / 11 / 2011. قُبِل للنشر في 6 / 3 /2012)

ملخّص

يقدم هذا البحث طريقة معينة لتحديد مجموعات قيم بعض الداليات العقدية المختارة في الفضاء C_α وهو فضاء التوابع التحليلية f في قرص الواحدة $|z|<1$ التي تقبل التمثيل التكاملي الآتي:

$$f(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}\,d\mu(t)\quad |z|<1,\ -1\le\alpha\le1 ,$$

حيث μ دالة غير متناقصة ضمن المجال $[-\pi,\pi]$ وتحقق الشرط $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$. و قد تم ، في هذا الفضاء ، تعيين مجموعتي قيم الداليين:

$$F(f)=f(z_0),\quad F(f)=z_0 f(z_0)$$

حيث تبين أن كلاً من هاتين المجموعتين هو قرص مغلق $|w-w_0|\le R$ تم تحديد مركزه w_0 ونصف قطره R في كل من الحالتين . وقد تم الحصول أيضاً على نتائج أخرى متعلقة بتقدير طويلة الدالة f ومشتقاتها في هذا الفضاء.

الكلمات المفتاحية:
الدالة المحيطية
المسائل القصوى
الدالي

[*] أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.
[**] أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.
[***] قائمة بالأعمال – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (34) العدد (1) 2012
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (34) No. (1) 2012

The Boundary Propertieses of Some Functionals in Class C_α

Dr. Hassan Baddour [*]
Dr. Mohammad Ali [**]
Hanaa Skaf [***]

(Received 21 / 11 / 2011. Accepted 6 / 3 /2012)

□ ABSTRACT □

This paper presents a certain method to determine the range of variability of some functionals defined in the Class C_α (i.e the class of analytic functions in the unit disk $(|z|<1)$ of the form:

$$, \quad -1\le\alpha\le 1 \ \ f(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}\,d\mu(t)$$

Where μ is nondecreasing functions on the interval $[-\pi,\pi]$ such that

$\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$).

It has been shown that the ranges of variability of functional:

$$F(f)=f(z_0),\ \ F(f)=z_0 f(z_0)$$

are the closed disc $|w-w_0|\le R$ with w_0 and R precisely determined . Also the modulus of function f and its derivative were estimated.

Key Words:

Boundary function
Extremal function
Functional

[*] **Professor, Department of Mathematics at University of Tishreen, Lattaki, Syria.**
[**] **Associate Professor, Department of Mathematics at University of Tishreen, Lattaki, Syria.**
[***] **Academic Assistant, Department of Mathematics at University of Tishreen, Lattaki, Syria.**

مقدمة:

في عام 1968 عرف غول (Goel) الفضاء $C[M]$ على أنه فضاء الدوال التحليلية في قرص الواحدة $D(|z|<1)$ التي لها الشكل:

$$(1) \qquad f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad z \in D$$

والتي تحقق عناصرها العلاقة:

$$(2) \qquad |f(z) - M| < M\,,\, M > \frac{1}{2}\;,\;\; |z| < 1\;.$$

وقد تبعه آخرون في دراسة هذا الفضاء وفضاءات أخرى مرتبطة به وفي دراسة خواص الداليات المعرفة في هذه الفضاءات. من بين هذه الفضاءات فضاء الدوال (أو أسرة الدوال) C_α الذي تقبل عناصره التمثيل التكاملي الآتي:

$$(3) \qquad f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + e^{it} z}{1 - \alpha\, e^{it} z}\, d\mu(t)\;, \qquad z \in D\,,\; -1 \le \alpha \le 1$$

حيث μ دالة غير متناقصة على المجال $[-\pi, \pi]$ وتحقق الشرط:

$$(3') \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu(t) = \mu(+\pi) - \mu(-\pi) = 1$$

(نرمز لمجموعة الدوال هذه بالرمز U) . بملاحظة أن:

$$\left| \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + e^{it} z}{1 - \alpha\, e^{it} z}\, d\mu(t) - \frac{1}{1 - |\alpha|} \right| < \frac{1}{1 - |\alpha|}$$

نستنتج أن $C_\alpha \subset C[M]$ حيث $|\alpha| = 1 - \frac{1}{M}$ مع ملاحظة أن $-1 < \alpha < 1$ عندما $M > \frac{1}{2}$.

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $\alpha = 1$ نحصل على الفضاء $C = C_1$ التي تقبل دواله التمثيل التكاملي الآتي:

$$(4) \qquad , \;\; z \in D \qquad f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + e^{it} z}{1 - e^{it} z}\, d\mu(t)$$

وهو فضاء الدوال التحليلية (1)، ذات القسم الحقيقي الموجب ، المعروفة بفضاء (أو أسرة) كاراتيودوري (Caratheodory) [2] .

أهمية البحث وأهدافه:

تنبع أهمية البحث من كونه متابعة لدراسات سابقة في المسائل القصوى (أي المسائل الحدية) المتعلقة بالداليات العقدية وتحديداً تلك التي تملك تمثيلاً تكاملياً من نوع ريمان– ستلجس حيث يتم التوصل إلى نتائج جديدة متعلقة بتحديد مستقرات الداليات ومشتقاتها كما يتم التوصل إلى نتائج معروفة سابقاً في هذا المجال ولكن بطريقة أخرى.

طرائق البحث ومواده:

طريقة البحث المتبعة هي استخدام النظريات الأساسية المتعلقة بصيغ التحولات المتمثلة بالمبرهنة 1 وانعكاس ذلك على أسر الدوال التي تملك تمثيلاً تكاملياً مثل الأسرة C_α والأسر المرتبطة بها ، حيث يمكن في هذه الحالة استخدام خواص تكامل ريمان – ستلجس للحصول على بعض النتائج بسهولة.

النتائـج والمناقشة:

لقد وجدت طرق كثيرة ([3] ,[1]) لدراسة الدالي :

$$(5) \qquad F(f)= J\left[f(z_0),\overline{f}(z_0),f'(z_0),\overline{f'}(z_0),...,f^{(n)}(z_0),\overline{f^{(n)}}(z_0)\right]$$

المعرف في بعض أسر الدوال التحليلية في قرص الواحدة D حيث z_0 نقطة مثبتة من هذا القرص. وكانت المسألة تتلخص في معظم الأحيان بإيجاد مجموعة تحول قيم هذا الدالي إذا كان عقدياً أو إيجاد قيمته الصغرى إذا كان حقيقياً.

نحاول في هذا العمل إيجاد مجموعة تحول قيم هذا الدالي(أي مستقره أو مجموعة قيمه)، في بعض الحالات الخاصة، عندما يكون معرفاً في الفضاء C_α

باستخدام المبرهنة1 (التي سنعرضها فيما بعد) نحصل على الشكل العام للدالة الحدودية في هذه الأسرة ومن خلال هذه الدالة نستطيع تحديد مستقر الدالي(5) في الحالتين الخاصتين عندما يكون $F(f)=f(z_0)$ أو $F(f)=z_0 f(z_0)$ حيث نحصل بشكل دقيق على المستقر في الفضاء C_α وهذا المستقر – كما سنرى – وهو قرص مغلق تم تعيين مركزه ونصف قطره في كل من الحالتين المذكورتين. هذا بالإضافة إلى الحصول على نتائج أخرى متعلقة بتقدير طويلة الدالي ومشتقاته.

الدوال الحدودية:

لتكن z_0 نقطة كيفية مثبتة من قرص الواحدة D ولتكن C_α مجموعة الدوال $f(z)$ المعرفة في هذه النقطة ولنعرف على هذه المجموعة الدالي $F(f)$ بواسطة العلاقة (5) ولنرمز لمجموعة القيم التي يقبلهاهذا الدالي (أي مستقره) عندما تتحول f على الأسرة C_α بالرمز B.

من المعلوم [5] أن المجموعة B مغلقة عندما يكون F معرفاً في الفضاء $C[M]$وأن نقاطها المحيطية (أي الطرفية) تملك الخاصة الآتية (المعروفة بخاصة القيمة القصوى الصغرى):

خاصة 1: لتكن F° نقطة كيفية خارجية للمجموعة B وليكن Γ محيط هذه المجموعة . يوجد عندئذ نقطة محيطية F^* $\left(F^*\in\Gamma\right)$ بحيث يكون :

$$(6) \qquad \left|F-F^\circ\right|\geq\left|F^\circ-F^*\right|$$

من أجل كل النقاط $F\in B$ الواقعة في جوار صغير بما فيه الكفاية للنقطة F^*.

ويصح الكلام نفسه في الفضاء C_α لأن $C_\alpha \subset C[M]$. نستنتج من ذلك أنه لتحديد مجموعة قيم الدالي F أي نقاط المجموعة B يكفي تحديد النقاط المحيطية التي تحقق الشرط(6).

تعرف كل دالة:

$$f^*(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z} d\mu^*(t)$$

من C_α محققة للشرط $F(f^*) \in \Gamma$ بالدالة الحدودية بالنسبة للدالي (5). وإذا كان هذا الدالي حقيقياً فإن $f^*(z)$ تعرف بالدالة القصوى بالنسبة له.

وهكذا وفي النتيجة نلاحظ أن مسألة تحديد المنطقة B تؤول إلى البحث عن جميع الدوال الحدودية بالنسبة للدالي (5) والتي يتحقق من أجلها الشرط(6).

تساعد الخاصة القصوى(6) في الحصول على الشرط اللازم لوجود الدالة المحيطية من خلال المبرهنة الآتية [8] :

مبرهنة1. ليكن للدالي $F(f)$ المعطى بالعلاقة (5) معرفاً في الفضاء C_α. إذا كان الشرط :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| b \frac{\partial F(f)}{\partial f^{(k)}(z_0)} + \bar{b} \overline{\frac{\partial F(f)}{\partial f^{(k)}(z_0)}} \right| > 0 \; , \quad , |b| = 1 \qquad (7)$$

محققاً، من أجل الدالة المحيطية $f^*(z)$ كان لهذه الدالة الشكل:

$$f^*(z) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{1+e^{it_k}z_0}{1-\alpha e^{it_k}z_0} \qquad (8)$$

مع العلم أن λ_k هي قفزات الدالة $\mu^*(t)$ في نقاط الانقطاع t_k وإضافة إلى ذلك:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \; , \quad \lambda_k \geq 0 \; , \quad k = 1,2,\dots, m$$

مستقر الدالي $F(f) = f$

بالإعتماد على المبرهنة 1 وما سبقها سوف نجد مستقر الدالي (5) في الحالة الخاصة التي يكون فيها $F(f) = f \, , f \in C_\alpha$ وسوف نحدد بعض الخواص الأخرى المرتبطة به .

من المعلوم [2] أن الأسرة C متراصة ومترابطة (في توبولوجيا التقارب المنتظم) ولذلك سيكون للأسرة C_α الصفة نفسها . بالإضافة إلى ذلك فإن C_α محدبة لأنه إذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تابعين كيفيين من C_α فإنه يوجد تابعان $\mu_1(t)$ و $\mu_2(t)$ من U بحيث يكون:

$$f_1(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z} d\mu_1(t)$$

$$f_2(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z} d\mu_2(t)$$

وعندئذ إذا وضعنا:

$$\mu_\lambda(t) = \lambda\mu_1(t) + (1-\lambda)\mu_2(t), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (9)$$

كان التابع المعرف بالعلاقة:

$$(10)\qquad f_\lambda(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}\,d\mu_\lambda(t)$$

عنصراً من الأسرة C_α وذلك لأن :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mu_\lambda(t)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\mu_1(t)+(1-\lambda)\int_{-\pi}^{\pi}\mu_2(t)=\lambda+1-\lambda=1$$

تفيد هذه الحقيقة في البرهان على التمهيدية الآتية:

<u>تمهيدية1</u>: إذا كان الدالي (5) من الشكل:

$$(11)\qquad F(f)=\int_{-\pi}^{+\pi}q(z,t)\,d\mu(t)$$

حيث $q(z,t)$ دالة تحليلية في D واشتقاقية بالنسبة للمتحول t على المجال $[-\pi,\pi]$ و $\mu(t)$ دالة كيفية من U ، كانت المجموعة B متراصة ومترابطة ومحدبة.

البرهان: من النظريات المعروفة حول مجموعة قيم الداليات المعرفة على المجموعات المترابطة والمتراصة [1] ينتج ترابط المجموعة B وتراصها. لبرهان تحدب المنطقة B نفرض أن $f_1(z),f_2(z)\in C_\alpha$ وليكن $\mu_1(t),\mu_2(t)\in U$ بحيث يكون بحسب الفرض:

$$(12)\qquad F(f_1)=\int_{-\pi}^{+\pi}q(z,t)\,d\mu_1(t)$$

$$(13)\qquad F(f_2)=\int_{-\pi}^{+\pi}q(z,t)\,d\mu_2(t)$$

ولتكن $\mu_\lambda(t),-\pi\le t\le\pi$ دالة من الشكل (9) حيث $0\le\lambda\le 1$. عندئذ سيكون للدالة $f_\lambda(z)$ شكل مشابه للشكل (10) وسيكون للدالي (11) الشكل:

$$F(f_\lambda)=\int_{-\pi}^{+\pi}q(z,t)\,d\mu_\lambda(t)$$

ينتج من ذلك ومن العلاقة (9) أن:

$$(14)\qquad F(f_\lambda)=\lambda F(f_1)+(1-\lambda)F(f_2),\quad 0\le\lambda\le 1$$

وينتج من ذلك أن انتماء النقطتين $F(f_1),F(f_2)$ إلى B يؤدي إلى انتماء النقطة (14) إلى B .

<u>مبرهنة</u> 2 . مجموعة قيم الدالي

$$(15)\qquad F(f)=f(z_0)$$

عندما يكون $f\in C_\alpha$ و z_0 نقطة من قرص الواحدة D ، هي القرص المغلق $|w-w_0|\le R$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$(16)\quad w_0=\frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2r^2},\quad R=\frac{(1+\alpha)r}{1-\alpha^2r^2},\quad |z_0|=r\,.$$

البرهان. لتكن B مجموعة قيم الدالي (15) وليكن المنحني Γ محيط هذه المجموعة. من المبرهنة 1 (العلاقة 8) ينتج أن هذا المحيط يعطى بالعلاقة: $\Gamma: \ w = w(t), -\pi \le t \le \pi$ حيث

$$w(t) = \frac{1 + e^{it} z_0}{1 - \alpha e^{it} z_0}, \ -\pi \le t \le \pi . \qquad (17)$$

لإيجاد شكل هذا المنحني نفرض أولاً أن $z_0 = x_0 + iy_0 = re^{i\beta}$ ثم نضع معادلته بالشكل الديكارتي $w(t) = u + iv$ فنجد بعد تحويلات بسيطة أن :

$$u = \frac{1 - \alpha r^2 + (1-\alpha)(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi)}{1 + \alpha^2 r^2 - 2\alpha(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi)}$$

$$v = \frac{(1+\alpha)(x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi)}{1 + \alpha^2 r^2 - 2\alpha(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi)}$$

حيث $|z_0| = r$ و $\varphi = t + \beta$. للتخلص من الوسيط φ نضع العلاقتين أعلاه بالشكل:

$$(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi) = \frac{u + \alpha r^2 u + \alpha r^2 - 1}{2\alpha u + 1 - \alpha}$$

$$(x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi) = \frac{v}{1+\alpha}\left(1 + \alpha^2 r^2 + \frac{u + \alpha r^2 u + \alpha r^2 - 1}{2\alpha u + 1 - \alpha}\right)$$

فنحصل (بعد تربيع الطرفين والجمع) على المعادلة الآتية:

$$u^2 + v^2 - 2\frac{1 + \alpha r^2}{1 - \alpha^2 r^2} u + \frac{1 - r^2}{1 - \alpha^2 r^2} = 0 \ (18)$$

التي يمكن تحويلها إلى الشكل:

$$\left(u - \frac{1 + \alpha r^2}{1 - \alpha^2 r^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{(1+\alpha) r}{1 - \alpha^2 r^2}\right)^2 . \qquad (19)$$

هذه المساواة تمثل معادلة دائرة مركزها w_0 ونصف قطرها R معطيان بالعلاقة (16) . وبما أن الأسرة B متراصة ومترابطة وكذلك محدبة بحسب التمهيدية1 فإن B هي القرص المغلق $|w - w_0| \le R$ المذكور وهو المطلوب.

مستقر الدالي $F(f) = z f$

سوف نستفيد من الحسابات السابقة لإيجاد مجموعة قيم الدالي $F(f) = z f$ المعرف على الفضاء C_α.

مبرهنة 3. إذا كان $f \in C_\alpha$ و z_0 نقطة من قرص الواحدة D حيث $Re\, z_0 > 0$ فإن مجموعة قيم الدالي

$$F(f) = z_0 f(z_0) \qquad (20)$$

هي القرص المغلق $|W-W_0|\le R_*$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$(21)\ \ W_0=\left(x_0\frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2},y_0\frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2}\right),\quad R_*=\frac{(1+\alpha)r^2}{1-\alpha^2 r^2}\ ,\ |z_0|=r\ .$$

حيث $z_0=x_0+iy_0\ ,\ |z_0|=r$.

البرهان. لدينا:

$$F(f)=z_0 f(z_0)=\int_{-\pi}^{+\pi} z_0\frac{1+e^{it}z_0}{1-\alpha e^{it}z_0}d\mu(t)$$

ولذلك و بحسب المبرهنة 1 ستكون B مجموعة قيم الدالي (20)، في هذه الحالة ، محاطة بالمنحني Γ الذي معادلته:

$$(22)\qquad \Gamma: W=W(t)=z_0\frac{1+e^{it}z_0}{1-\alpha e^{it}z_0}\ ,\ -\pi\le t\le\pi\quad .$$

(لقد فرضنا أن $Re\, z_0=x_0>0$ لكي يبقى الشرط (7) محققاً في المبرهنة 1) . لإيجاد شكل هذا المنحني نفرض أولاً أن $z_0=x_0+iy_0\ ,|z_0|=r$ ثم نضع معادلته بالشكل الديكارتي $W(t)=u_*+iv_*$. بملاحظة أن $W(t)=z_0 w(t)$ ، حيث $w(t)$ معطاة بواسطة العلاقة (17)، نستنتج على التوالي أن:

$$W(t)=u_*+iv_*=z_0(u+iv)=(x_0+y_0)(u+iv)$$

$$u_*=x_0u-y_0v\quad ,\qquad v_*=y_0u+x_0v$$

$$u=\frac{1}{r^2}(x_0u_*+y_0v_*),\quad v=\frac{1}{r^2}(-y_0u_*+x_0v_*)$$

بتعويض u و v بقيمتيهما في (19) نجد أن

$$\left(\frac{1}{r^2}(x_0u_*+y_0v_*)-\frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2}\right)^2+\left(\frac{1}{r^2}(y_0u_*+x_0v_*)\right)^2=\left(\frac{(1-\alpha)r}{1-\alpha^2 r^2}\right)^2$$

ويكون بعد إجرلء الحسابات:

$$(22)\qquad \left(u_*-x_0\frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2}\right)^2+\left(u_*-y_0\frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2}\right)^2=\left(\frac{(1+\alpha)r^2}{1-\alpha^2 r^2}\right)^2$$

والناتج هو معادلة دائرة $|W-W_0|=R_*$ تتطابق عنناصرها مع العناصر الواردة في(21). بذلك تكون مجموعة B هي القرص المغلق $|W-W_0|\le R_*$ وهو المطلوب.

نتائج وتطبيقات:

تفيد المبرهنة 2 في إيجاد التقديرات المتعلقة بالدوال ومشتقاتها في الأسرة C_α وأسرتها الجزئية C سوف نعرض بعضاً منها فيما يلي:

نتيجة1. من أجل كل دالة f من C_α حيث : $z=re^{i\beta}\ ,\ 0<r<1\ ,\ -\pi\le\beta\le\pi$

تكون التقديرات الآتية صحيحة :

$$\frac{1-r}{1+\alpha r} \le |f(z)| \le \frac{1+r}{1-\alpha r} \qquad (23)$$

$$\frac{1-r}{1+\alpha r} \le |Re\ f(z)| \le \frac{1+r}{1-\alpha r} \qquad (24)$$

$$|Im\ f(\varsigma)| \le \frac{(1+m)r}{1-\alpha^2 r^2} \qquad (25)$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!(1+\alpha)|\alpha|^n}{(1-|\alpha|r)^{n+1}},\ n=1,2,3,... \qquad (26)$$

البرهان: رأينا أن مجموعة قيم الدالي $F(f)=f(z_0)$ تقع داخل الدائرة (18) و z_0 نقطة كيفية من قرص الواحدة . لذلك ومن العلاقة:

$$|f(z)| - \left|\frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2}\right| \le \left||f(z)| - \frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2}\right| \le \frac{(1+\alpha)r}{1-\alpha^2 r^2}$$

يكون:

$$|f(z)| \le \frac{1+\alpha r^2}{1-\alpha^2 r^2} + \frac{(1+\alpha)r}{1-\alpha^2 r^2} = \frac{1+r}{1-\alpha r}$$

أو يكون:

$$|f(z)| \ge \frac{1+\alpha\ r^2}{1-\alpha^2\ r^2} - \frac{(1+\alpha)r}{1-\alpha^2\ r^2} = \frac{1-r}{1+\alpha\ r}$$

وبذلك تكون العلاقة(23) صحيحة.

لبرهان العلاقتين (24)و (25) نلاحظ أن مركز الدائرة $|w-w_0| \le R$ يقع على المحور الحقيقي ولذلك فإن العلاقة $|u+iv-w_0| \le R$ تؤدي إلى العلاقتين:

$$w_0 - R \le Re\ f(z) \le w_0 + R$$

$$-R \le Im\ f(z) \le +R$$

ومنهما تنتج العلاقتان (24)و (25).

لبرهان العلاقة الأخيرة(26) نحسب المشتق النوني للتابع $f(z)$ المعطى بالعلاقة (4) فيكون:

$$f^{(n)}(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{n!(1+\alpha)\alpha^{n-1}e^{int}}{(1-\alpha e^{it}z)^{n+1}}\ d\mu(t),\ n=1,2,3,...\ ,$$

ومنه نحصل على المطلوب:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \int_{-\pi}^{+\pi} \left|\frac{n!(1+\alpha)\alpha^{n-1}e^{int}}{(1-\alpha e^{it}z)^{n+1}}\right| d\mu(t) \le \frac{n!(1+\alpha)|\alpha|^{n-1}}{(1-|\alpha||z|)^{n+1}},\ n=1,2,3,...$$

نتيجة2. إذا كاننت الدالة f تنتمي إلى الأسرة C_α وكان $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ فإن:

$$|a_n|\le(1+\alpha)|\alpha|^{n-1}\ ,\ n=1,2,3,...$$

البرهان. من المعروف أن أمثال منشور الدالة التحليلية في منشور تايلور ، في جوار الصفر ، تعطى بالعلاقات:

$$b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\qquad n=1,2,3,...$$

ومنه بحسب (26) يكون:

$$|a_n|=\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|\le\frac{n!(1+\alpha)|\alpha|^{n-1}}{n!(1-|\alpha|\,0)^{n+1}}=(1+\alpha)|\alpha|^{n-1},\ n=1,2,3,...$$

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

قلنا إن أسرة كاراتيودوري C هي فضاء جزئي من الفضاء C_α . فعندما نضع $\alpha=1$ في المبرهنة 2 والنتائج التي تليها نحصل في الفضاء C مباشرة – كحالة خاصة– على النتائج الآتية :

1–إذا كان $f\in C$ فإن مجموعة قيم الدالي $F(f)=f(z)$ في النقطة z_0 من قرص الواحدة هي القرص المغلق $|w-w_0|\le R$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$(27)\qquad w_0=\frac{1+|z_0|^2}{1-|z_0|^2},\quad R=\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}.$$

2–إذا كان $f\in C$ فإن مجموعة قيم الدالي $F(f)=zf(z)$ في النقطة z_0 من قرص الواحدة هي القرص المغلق $|W-W_0|\le R_*$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$(28)\qquad W_0=\left(x_0\frac{1+|z_0|^2}{1-|z_0|^2},y_0\frac{1+|z_0|^2}{1-|z_0|^2}\right)\ R_*=\frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}.$$

3–إذا كان $f\in C$ وكان $|z|=r\ ,\ 0<r<1$ فإن (قارن العلاقات (23)-(26)):

$$(29)\qquad \frac{1-r}{1+r}\le|f(z)|\le\frac{1+r}{1-r}$$

$$(30)\qquad \frac{1-r}{1+r} \le |Re\ f(z)| \le \frac{1+r}{1-r}$$

$$(31)\qquad Im|f(z)| \le \frac{2r}{1-r^2}$$

$$(32)\qquad \left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{2n!}{(1-r)^{n+1}}$$

4- إذا كان $f \in C$ وكان $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ فإن :

$$|b_n| \le 2\ ,\ n = 1,2,3,...$$

التوصيات:

بالإمكان متابعة دراسة مجموعات قيم الداليات المختلفة في الفضاء C_α أو في فضاءات أخرى أكثر عمومية ولكنها واقعة ضمن الفضاء $C[M]$. فمثلاً بالإمكان البحث عن مجموعة تحول قيم الداليات من الشكل:

$$F(f) = z_0 f'(z_0)\ ,\ F(f) = z_0 f''(z_0),...$$

في الفضاء C و C_α وغيرهما حيث نتوقع الحصول على نتائج مشابهة لتلك التي توصلنا إليها في الفقرات السابقة.

المراجع:

[1] ALEKSANDROV, I. *Boundary Values of Functional on the Class of Holomorphic Holomorphic Functions Univalent in a Circle* . Sibirsk , Mat. Z. 4, (1963) , 17-31.

[2] BADDOUR,H. *About the range of variability of linear functionals in Caratheodory Classe*. Damascus univ.journal- No.28 – 1998

[3] BADDOUR,H. *The Set of Values of Functionals* in *classes of functions Having Integral Representation*. Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS) 2008, 1 (1),.91-96

[4] GOEL, R. *A Class of Close-to-convex Functions. Czchoslovak Mathematical Journal 18 (93) (1968) , 503-508*.W.N Warsaw 1975 .

[5] JANOWSKI, W. *About Some Family of Univalent Functions*. Annales Polonici Mathematici XVIII (1966) , 171-203

[6] KRZYZ J. *Theory and Problems in Analytic Functions*. P.W.N Warsaw 1975 .

[7] POMMERENKECh *Univalent Functions* . Vandehhoeck &Go`ttingen 1975.

[8] WALCZAK, S . *Extremal Problems in the Class of Close-to-convex Functions*. Annales Polonici Mathematici XXV (1971).