مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

الخواص المقاربة لحلول معادلات تفاضلية غير خطية ولا متجانسة من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$

الدكتور محمد مناف محمد أمين الحمد*

(تاريخ الإيداع 5 / 10 / 2011. قُبِل للنشر في 24 / 11 /2011)

□ ملخّص □

نقدم في هذه الورقة البحثية دراسة الوجود الشامل ($Global\ existence$) والسلوك المقارب لحلول معادلة تفاضلية غير خطية وغير متجانسة من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$ من الشكل الآتي:

$$[|u''(t)|^{p-1}u''(t)]' + f\big(t, u(t)\big) = e(t) \quad ; p \geq 1 \qquad (1)$$

عندما $t \to +\infty$ ، مستخدمين بذلك المتراجحات التكاملية الشهيرة من نمط بيللمان – بيهاري –جرونوول، حيث سنحصل على حلول للمعادلة التفاضلية (1) والتي من أجلها يكون السلوك المقارب للحلول الشاملة ($Global\ solutions$) هو $at^2 + bt + c$ عندما $t \to \infty$ حيث $a, b, c \in R; a \neq 0$.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية غير خطية – السلوك المقارب – ثابت لابلاسي $p \geq 1$ – متراجحة بيهاري – متراجحة جرونوول – الوجود الشامل .

* أستاذ مساعد– قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة دمشق– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (2) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (2) 2011

Asymptotic properties of solutions to a third order for nonlinear and nonhomogeneous differential equations with p-Laplacian

Dr. Mhd Mounaf Alhamed*

(Received 5 / 10 / 2011. Accepted 24 / 11 /2011)

□ ABSTRACT □

This work is concerned with the Global existence and asymptotic properties of solutions of a third – order for nonlinear and nonhomogeneous differential equations with $-p$ Laplacian $p \geq 1$:

$$[|u''(t)|^{p-1}u''(t)]' + f(t, u(t)) = e(t) \qquad ; p \geq 1 \qquad (1)$$

Locally near infinity . Making use of Bihari's and Gronwall's integral inequalities , to have Global solutions of the (1) which are asymptotic to $\mathrm{at}^2 + \mathrm{bt} + \mathrm{c}$; as $\mathrm{t} \to \infty$ where a,b,c are real constant ; $a \neq 0$.

Key words: nonlinear differential equations ; asymptotic behavior; p≥ 1 Laplacian Bihari's inequality, Gronwall's inequality, *Global existence*.

*associate prof., Department of mathematics-Faculty of science, Damascus university ,Syria.

مقدمة:

لا يستطيع أحد أن ينكر الدور الفعال والمميز الذي يؤديه السلوك المقارب لحلول المعادلات التفاضلية غير الخطية في حقول الميكانيك وفي حل الكثير من القضايا العلمية الإلكترونية والفيزيائية ، حيث يؤول الكثير من مسائل القيم الحدية للفيزياء الرياضية بثابت لابلاسي $p \geq 1$ إلى تكاملات معتلة متقاربة وبالتالي إلى حلول لها سلوك مقارب من شكل معين عندما $t \to +\infty$ ، علاوة على ذلك فإن السلوك المقارب لحلول المعادلات التفاضلية غير الخطية يعد أداة هامة في الكثير من فروع التحليل الرياضي(وخاصة التحليل التابعي) والرياضيات التطبيقية. والجدير بالذكر أن هذا الثابت ينسب للعالم الرياضي الفرنسي بيير لابلاس $(1740 - 1827)$.

سنعالج في هذا البحث واحدة من أهم المعادلات التفاضلية غير الخطية وغير المتجانسة من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$ والتي لا تحوي المشتقين من الشكل:$u'(t)$ و $u''(t)$ مقرونة بالشروط الابتدائية الآتية:

$$u(t_0) = |u_1|\ ;\ u'(t_0) = |u_2|\ ;\ u''(t_0) = |u_3|^p$$

حيث تم تقديم مبرهنات جديدة مدعمة بالأمثلة التطبيقية المناسبة على معادلات تفاضلية غير خطية وغير متجانسة مستخدمين بذلك المتراجحات التكاملية لجرونوول [5] وبيهاري [9] فحصلنا بذلك على حلول شاملة (مستمرة وقابلة للتمديد على كامل المحور الحقيقي) لها السلوك المقارب $at^2 + bt + c$ عندما $t \to \infty$ حيث$a, b, c \in R$; و$a \neq 0$.

نجد الكثير من الأبحاث العلمية المتعلقة بالوجود الشامل وسلوك حلول معادلات تفاضلية غير خطية وغير متجانسة من المرتبة الثانية بثابت لابلاسي $p \geq 1$ في المدى الزمني البعيد عند العديد من الباحثين الرياضيين [1-4,7,8,10].

تم إجراء هذا البحث في رحاب جامعة دمشق منذ مطلع العام الميلادي 2011.

1-1-تعريف 1 [11]:

إذا تحقق:$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ عندئذ يكون :$f(t) = \mathrm{o}(g(t))$.

وكمثال على ذلك :$\sqrt{t^2+1} = \mathrm{t} + \mathrm{o}(1)$ عندما$t \to \infty$

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث في الحصول لأول مرة على نتائج جديدة في دراسة الخواص المقاربة لحلول معادلات تفاضلية غير خطية وغير متجانسة من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$ مستخدمين بذلك المتراجحات التكاملية الشهيرة من نمط بيللمان– بيهار– وجرونوول.

يهدف البحث إلى التحقق من السلوك المقارب للحلول الشاملة للمعادلة التفاضلية المفروضة في جوار عدم النهاية .

طرائق البحث ومواده:

الاستفادة من المكتبات المركزية والمختبرات في رحاب جامعة دمشق ونشرات الأبحاث والكتب العلمية من الإنترنت .

النتائج والمناقشة:

2-1- تعريف2: يقال عن الدالة $u:[t_0,t_1) \to (-\infty,+\infty);\ t_1 > t_0$ أنها حل للمعادلة (1) إذا حققت الدالة $u(t)$ المعادلة (1)من أجل جميع قيم $t \in [t_0,t_1)$.

2-2- تعريف3: نقول عن الدالة $u(t)$ أنها تحقق الخاصية (L_1) إذا كان :

$$u(t) = at^2 + bt + c + o(t^2)\ ; t \to \infty\ ; a,b,c \in R$$

فيما يلي سنفرض أن $p \geq 1\ ;\ r > 0\ ;\ t_0 = 1\ ;\ p \geq r > 0$.

2-3- مبرهنة1:

إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) الدالة $f(t,u)$ مستمرة على الساحة : $D = \{(t,u): t \geq 1, u \in R\}$

(ii) المشتق الجزئي الثاني $f_{uu}(t,u)$ موجود وموجب تماماً على D.

(iii) المتراجحة : $|f(t,u) - e(s)| \leq f_{uu}(t,0).|u(t)|^r + \mathrm{e}(s)$ محققة على كافة أنحاء الساحة D.

(iv) $\int_1^\infty t^{2r} f_{uu}(t,0)dt < \infty \quad \& \ k = \int_1^\infty e(s)\,ds < \infty$

فإن أي حل شامل $u(t)$ للمعادلة (1) يحقق الخاصية (L_1).

__البرهان:__ بحسب [6] ينتج أن المعادلة (1) تملك حلاً $u(t) \in C^2([1,\infty))$ يوافق الشروط الابتدائية :

$$u(1) = |u_1|\ ;\ u'(1) = |u_2|\ ;\ u''(1) = |u_3|^p$$

وبمكاملة المعادلة (1) من 1 إلى t نحصل لأجل $t \geq 1$ على :

$$|u''(t)|^{p-1}u''(t) = c_3 - \int_1^t [f(s,u(s)) - e(s)]ds\ ; c_3 = |u_3|^p$$

$$(u''(t))^p \leq\ |u''(t)|^p \leq c_3 + \int_1^t |f(s,u(s)) - e(s)|ds \qquad (2)$$

وبوضع:
$$Q(t) = c_3 + \int_1^t |f(s,u(s)) - e(s)|ds \qquad (3)$$

عندئذ فإن (2) تصبح:
$$(u''(t))^p \leq Q(t) \qquad (4)$$

ومنها فإن :
$$u''(t) \leq [Q(t)]^{\frac{1}{p}} \qquad (5)$$

وبمكاملة المعادلة (5) من 1 الى t والاستفادة من عمليات الترجيح نجد :

$$u'(t) \leq c_2 + \int_1^t [Q(s)]^{\frac{1}{p}}ds\ \leq c_2 + (t-1)[Q(t)]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq t\left[c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right]\ ; t \in [1,\infty);\quad c_2 = |u_2|$$

ومنه فان:
$$u'(t)\ \leq t\left[c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right]\ ;\quad c_2 = |u_2| \qquad (6)$$

وبمكاملة المعادلة(6) من 1 الى t والاستفادة من عمليات الترجيح نجد :

$$u(t) \leq t^2\left[c_1 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right];\ c_1 = |u_1| \qquad (7)$$

وبالتالي من (6) ,(7) نجد ان :
$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^p \leq [c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}]^p \qquad (8)$$

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq [c_1 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}]^p \qquad (9)$$

وبتطبيق المتراجحة الشهيرة: $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)\ ;\ \ a,b \geq 0$ على (9) نحصل على:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq 2^{p-1}[{c_1}^p + Q(t)] = 2^{p-1}{c_1}^p + 2^{p-1}Q(t)$$

$$\leq 2^{p-1}{c_1}^p + 2^{p-1}\left[c_3 + \int_1^t \left|f\left(s,u(s)\right) - e(s)\right| ds\ \right]$$

وبالأخذ بعين الاعتبار الشرط (iii)من المبرهنة 1 نجد:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq e_1 + 2^{p-1}\int_1^t f_{\mathrm{uu}}(\mathrm{s},0).\,|u(s)|^r\, ds$$

$$= e_1 + 2^{p-1}\int_1^t \mathrm{s}^{2\mathrm{r}}.\, f_{\mathrm{uu}}(\mathrm{s},0).\,[\frac{|u(s)|}{s^2}]^r\, ds \qquad (10)$$

حيث : $e_1 = 2^{p-1}({c_1}^p + c_3 + k)$

وبتطبيق متراجحة جرونوول[5] على المتراجحة (10) نحصل على :

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq e_1.\exp(2^{p-1}\int_1^t \mathrm{s}^{2\mathrm{r}}.\, f_{\mathrm{uu}}(\mathrm{s},0)\, ds) \qquad (11)$$

وبوضع :

$$A = e_1.\exp\left(2^{p-1}\int_1^\infty \mathrm{s}^{2\mathrm{r}}.\, f_{\mathrm{uu}}(\mathrm{s},0)\, ds\right) \qquad (12)$$

وبالتالي تصبح المتراجحة (11) بالشكل:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq A \qquad (13) \Rightarrow \quad \frac{|u(t)|}{t^2} \leq [A]^{\frac{1}{p}}$$

وحسب الشرط (iv) من المبرهنة1 نحصل من أجل $t \geq 1$ على :

$$\frac{|u(t)|}{t^2} < +\infty$$

وبالاستفادة من الشرط (iii)من المبرهنة 1 نجد أن :

$$\int_1^{\mathrm{t}} \left|f\left(s,u(s)\right) - e(s)\right| \mathrm{ds} \leq \int_1^{\mathrm{t}} f_{uu}(s,0).\,|u(s)|^r\,\mathrm{ds} + \int_1^t e(s)ds$$

$$\leq \mathrm{k} + \int_1^{\mathrm{t}} \mathrm{s}^{2\mathrm{r}}.\, f_{uu}(s,0).\,[\frac{|u(s)|}{\mathrm{s}^2}]^r\,\mathrm{ds}$$

$$\leq k + (\mathrm{A})^{\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{p}}}\int_1^{\mathrm{t}} \mathrm{s}^{2\mathrm{r}}.\, f_{uu}(s,0)\,\mathrm{ds} < +\infty$$

وهذا يبرهن أن التكامل $\int_1^t [f\left(s,u(s)\right) - e(s)]ds$ متقارب اطلاقاً وبالتالي فإن:

$\lim_{t\to\infty}\int_1^t [f\left(s,u(s)\right) - e(s)]ds$ موجودة ومحدودة ، وبالتالي يوجد ثابت حقيقي $a \in R$

بحيث يكون: $\lim_{t\to\infty} u''(t) = a$

وأخيراً، وباستخدام قاعدة أوبيتال الشهيرة نجد أن:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{t^2} = \frac{u_1 + \int_1^t u'(s)ds}{t^2} = \lim_{t\to\infty} u''(t) = a$$

ومن أجل أي ثابتين حقيقيين b, c يكون:

$$\lim_{t\to\infty}\{\frac{u(t) - (at^2 + bt + c)}{t^2}\} = 0$$

وهذا يعني بدوره أن الحل الشامل $u(t)$ له السلوك المقارب هو $a\,t^2 + bt + c$ عندما $t \to \infty$.

وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة 1.

مثال تطبيقي: لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة التالية:

$$[\left|u''(t)\right|^{p-1}u''(t)]' + \frac{u}{t^{2+2r}}.\sin u = \frac{1}{1+t^2} \qquad (*)$$

من المعادلة $(*)$ نجد أن : $f(t,u) = \frac{u}{t^{2+2r}}.\sin u \quad \& \quad e(t) = \frac{1}{1+t^2}$

وبحساب المشتقات الجزئية نجد أن : $f_u(t,u) = \frac{\sin u}{t^{2+2r}} + \frac{u}{t^{2+2r}}\,.\cos u$

$$f_{uu}(t,u) = 2\frac{\cos u}{t^{2+2r}} - \frac{u}{t^{2+2r}}\,.\sin u$$

$$f_{uu}(t,0) = \frac{2}{t^{2+2r}}$$

وبالتالي يكون:
$$|f(t,u)| \leq \frac{|u|}{t^{2+2r}} < 2.\frac{|u|^r}{t^{2+2r}} = f_{uu}(t,0).|u|^r$$
$$\int_1^\infty t^{2r} f_{uu}(t,0)dt = \int_1^\infty t^{2r}.\frac{2}{t^{2+2r}}dt = 2 < \infty$$
$$\int_1^\infty e(t)dt = \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4} < \infty$$

وبالتالي جميع شروط المبرهنة 1 محققة وهذا يعني بدوره إن كل الحلول للمعادلة $(*)$ تحقق الخاصية (L_1).

2-4- مبرهنة2:

إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) الدالة $f(t,u)$ مستمرة على الساحة : $D = \{(t,u): t \geq 1, u \in R\}$

(ii) توجد دوال مستمرة غير سالبة: $g_1, g_2, g_3: R^+ \to R^+$ بحيث :
$$\int_1^\infty g_1(t).g_2(t).g_3(t) < +\infty \quad \& \quad \int_1^\infty e(s)ds < +\infty$$

(iii) توجد دالة $g(u)$ مستمرة من أجل $u \geq 0$ وموجبة وغير متناقصة من أجل $u > 0$.

وإذا رمزنا بِ : $G(x) = \int_1^x \frac{du}{g(u^{\frac{r}{p}})} = \infty$

فإن: $G(+\infty) = \int_1^{+\infty} \frac{du}{g(u^{\frac{r}{p}})} = \frac{p}{r}\int_1^{+\infty} \frac{s^{\frac{p}{r}-1}}{g(s)}ds = +\infty$

(iv) $|f(t,u) - e(s)| \leq g_1(\mathrm{t}).g_2(t).g_3(\mathrm{t}).g\left([\frac{|u(t)|}{t^2}]^r\right) + e(s)$

فإن أي حل شامل $u(t)$ للمعادلة (1) يحقق الخاصية (L_1).

2-5-ملاحظة: إذا وضعنا في المبرهنة 2 :
$$g_1(t) = f_{uu}(t,0) \;\; ; \;\; g_2(t) = g_3(t) = t^r \;\; ; \;\; g(u) = u$$
عندئذٍ نحصل على المبرهنة 1.

<u>**البرهان:**</u> بحسب [6] ينتج أن المعادلة (1) تملك حلاً $u(t) \in C^2([1,\infty))$ يوافق الشروط الابتدائية :
$$u(1) = |u_1| \; ; \; u'(1) = |u_2| \; ; \; u''(1) = |u_3|^p$$
وبمكاملة المعادلة (1) من 1 إلى t نحصل لأجل $t \geq 1$ على :
$$|u''(t)|^{p-1}u''(t) = c_3 - \int_1^t[f(s,u(s)) - e(s)]ds \; ; c_3 = |u_3|^p$$
$$(u''(t))^p \leq \; |u''(t)|^p \leq c_3 + \int_1^t |f(s,u(s)) - e(s)|ds \qquad (2)$$
وبوضع: $Q(t) = c_3 + \int_1^t |f(s,u(s)) - e(s)|ds \qquad (3)$

عندئذ فان (2) تصبح: $\left(u''(t)\right)^p \leq Q(t) \qquad (4)$

ومنها فان $u''(t) \leq [Q(t)]^{\frac{1}{p}} \qquad (5)$

وبمكاملة المعادلة (5) من 1 الى t والاستفادة من عمليات الترجيح نجد :
$$u'(t) \leq c_2 + \int_1^t [Q(s)]^{\frac{1}{p}}ds \; \leq c_2 + (t-1)[Q(t)]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq t\left[c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right] ; t \in [1,\infty); \quad c_2 = |u_2|$$
ومنه فان: $u'(t) \; \leq t\left[c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right] \; ; \quad c_2 = |u_2| \qquad (6)$

وبمكاملة المعادلة(6) من 1 الى t والاستفادة من عمليات الترجيح نجد :
$$u(t) \leq t^2\left[c_1 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right]; \; c_1 = |u_1| \qquad (7)$$

وبالتالي من $(6),(7)$ نجد ان : (8) $\quad [\frac{|u'(t)|}{t}]^p \leq [c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}]^p$

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq [c_1 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}]^p \qquad (9)$$

وبتطبيق المترجحة الشهيرة: $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)\ ;\ \ a,b \geq 0$ على (9) نحصل على:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq 2^{p-1}[{c_1}^p + Q(t)] = 2^{p-1}{c_1}^p + 2^{p-1}Q(t)$$
$$\leq 2^{p-1}{c_1}^p + 2^{p-1}\left[c_3 + \int_1^t \left|f(s,u(s)) - e(s)\right| ds\ \right]$$

وبالأخذ بعين الاعتبار الشرط (ii) من المبرهنة 1 نجد:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq e_1 + 2^{p-1}\int_1^t g_1(\mathrm{s}).\, g_2(s).\, g_3(\mathrm{s}).\, g\left([\frac{|u(s)|}{s^2}]^r\right) ds \quad (14)$$

حيث : $e_1 = 2^{p-1}({c_1}^p + c_3 + k)$

وبوضع :

$$A(t) = e_1 + 2^{p-1}\int_1^t g_1(\mathrm{s}).\, g_2(s).\, g_3(\mathrm{s}).\, g\left([\frac{|u(s)|}{s^2}]^r\right) ds \qquad (15)$$

وبالتالي تصبح المتراجحة (14) بالشكل:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq A(t) \qquad (16)$$

وهكذا نجد : (17) $\quad [\frac{|u(t)|}{t^2}]^r \leq\ [A(t)]^{\frac{r}{p}}$

وبما أن الدالة $g(s)$ غير متناقصة من أجل $s > 0$ ،عندئذ نحصل من (17) على:

$$g([\frac{|u(t)|}{t^2}]^r) \leq\ g([A(t)]^{\frac{r}{p}}) \qquad (18)$$

وبناء على ذلك نحصل من(15) من أجل$1 \geq t$ على:

$$A(t) \leq e_1 + 2^{p-1}\int_1^t g_1(\mathrm{s}).\, g_2(s).\, g_3(\mathrm{s}).\ \ g([A(s)]^{\frac{r}{p}})\, ds \qquad (19)$$

وبتطبيق متراجحة بيهاري [9]على (19) نجد أنه من أجل $t \geq 1$ يكون :

$$A(t) \leq G^{-1}[G(e_1) + 2^{p-1}\int_1^t g_1(\mathrm{s}).\, g_2(s).\, g_3(\mathrm{s}) ds] \qquad (20)$$

حيث : $G(w) = \int_1^w \frac{ds}{g(s^{\frac{r}{p}})}$

$G^{-1}(w)$ هي الدالة العكسية للدالة$G(w)$ والتي تكون معرفة لأجل $w \in (G(+0), +\infty)$

والأكثر من ذلك فإن: $G(+0) < 0$ و $G^{-1}(w)$ متزايدة .

وإذا فرضنا أن : $k = G(e_1) + 2^{p-1}\int_1^{\infty} g_1(\mathrm{s}).\, g_2(s).\, g_3(\mathrm{s}) ds\ < +\infty$

ومن كون G^{-1} متزايدة نجد أن: $A(t) \leq G^{-1}(k) < +\infty$

وينتج من (16):

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq\ G^{-1}(k) \quad \Rightarrow \quad \frac{|u(t)|}{t^2} \leq\ [G^{-1}(k)]^{\frac{1}{p}}$$

وبالاستفادة من الشرط (ii) من المبرهنة 2 نجد أن :

$$\int_1^t \left|f(s,u(s)) - e(s)\right| ds \leq \int_1^t g_1(\mathrm{s}).\, g_2(s).\, g_3(\mathrm{s}).\, g\left([\frac{|u(s)|}{s^2}]^r\right) \mathrm{ds} + \int_1^t \mathrm{e(s)ds}$$
$$\leq e_1 + 2^{p-1}\int_1^t g_1(\mathrm{s}).\, g_2(s).\, g_3(\mathrm{s}).\ \ g([A(s)]^{\frac{r}{p}})\, ds$$
$$= A(t) \leq G^{-1}(k) < +\infty \quad ; \quad t \geq 1$$

وهذا يبرهن أن التكامل $\int_1^t [f(s,u(s)) - e(s)] ds$ متقارب اطلاقاً وبالتالي فإن:

$\lim_{t\to\infty}\int_1^t [f(s,u(s)) - e(s)]ds$ موجودة ومحدودة.

وبالتالي يوجد ثابت حقيقي $a \in R$ بحيث يكون: $\lim_{t\to\infty} u''(t) = a$

وأخيراً ، وباستخدام قاعدة أوبيتال الشهيرة نجد أن:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{t^2} = \frac{u_1+\int_1^t u'(s)ds}{t^2} = \lim_{t\to\infty} u''(t) = a$$

ومن أجل أي ثابتين حقيقيين b, c يكون:

$$\lim_{t\to\infty}\{\frac{u(t)-(at^2+bt+c)}{t^2}\} = 0$$

وهذا يعني بدوره أن الحل الشامل $u(t)$ له السلوك المقارب $at^2 + bt + c$ عندما $t \to \infty$.

وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة 2.

مثال تطبيقي:لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة التالية:

$$[|u''(t)|^{p-1}u''(t)]' - \frac{2}{t^2}.(\frac{u}{t^2})^{p-r}.\ln(1+(\frac{u}{t^2})^r) = e^{-t}\ ;\ r>0\ ;\ \ p\geq 1\ ; t\geq 1 \quad (**)$$

نلاحظ أن : $f(t,u) = -\frac{2}{t^2}.(\frac{u}{t^2})^{p-r}.\ln(1+(\frac{u}{t^2})^r) \quad \&\ e(t) = e^{-t}$

$$|f(t,u)| \leq \frac{2}{t^2}.|u|^{p-r}.\ln(1+|u|^r)$$

$$g_1(t) = \frac{2}{t^2} \quad \& \quad g_2(t) = g_3(t) = 1 \quad \& \, g(u) = u^{\frac{p}{r}-1}.\ln(1+u)$$

$$\int_1^\infty g_1(t).g_2(t).g_3(t)dt = \int_1^\infty \frac{2}{t^2}dt = 2 < +\infty$$

$$\int_1^\infty e(t)dt = \int_1^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{e} < +\infty$$

$$G(+\infty) = \int_1^{+\infty}\frac{du}{g(u^{\frac{r}{p}})} = \frac{p}{r}\int_1^{+\infty}\frac{s^{\frac{p}{r}-1}}{g(s)}ds$$

$$= \frac{p}{r}\int_1^{+\infty}\frac{s^{\frac{p}{r}-1}}{s^{\frac{p}{r}-1}.\ln(1+s)}ds > \frac{p}{r}\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+s)}ds = +\infty$$

وبالتالي جميع شروط المبرهنة 2 محققة وهذا يعني بدوره أن كل الحلول للمعادلة $(**)$ تحقق الخاصية (L_1).

2-6-مبرهنة 3:

إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) الدالة $f(t,u)$ مستمرة على الساحة : $D = \{(t,u): t\geq 1, u\in R\}$

(ii) توجد دوال مستمرة غير سالبة: $h_1, h_2, g: R^+ \to R^+$ بحيث :

$$|f(t,u) - e(s)| \leq h_1(t).g\left([\frac{|u(t)|}{t^2}]^r\right) + h_2(t) + e(s)$$

(iii) توجد دالة $g(u)$ مستمرة من أجل $u \geq 0$ وموجبة وغير متناقصة من أجل $u > 0$.

وإذا رمزنا بِ : $G(x) = \int_1^x \frac{du}{g(u^{\frac{r}{p}})} = \infty$

فإن: $G(+\infty) = \int_1^{+\infty}\frac{du}{g(u^{\frac{r}{p}})} = \frac{p}{r}\int_1^{+\infty}\frac{s^{\frac{p}{r}-1}}{g(s)}ds = +\infty$

(iv) $H_i = \int_1^\infty h_i(t)dt < +\infty\ ;\ \ i = 1,2 \quad \& \, k = \int_1^\infty e(t)dt < +\infty$

فإن أي حل شامل $u(t)$ للمعادلة (1) يحقق الخاصية (L_1).

البرهان:

بإجراء المناقشة نفسها كما في المبرهنة 1 نجد أنه من أجل $t \geq 1$ يكون:

$$|u''(t)| \leq [|u_3|^p + \int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds + \int_1^t h_2(\mathrm{s}) ds + + \int_1^t \mathrm{e}(\mathrm{s}) ds\,]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{|u'(t)|}{t} \leq |u_2| + [|u_3|^p + \int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds + \int_1^t h_2(\mathrm{s}) ds + \int_1^t \mathrm{e}(\mathrm{s}) ds\,]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{|u(t)|}{t^2} \leq |u_1| + [|u_3|^p + \int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds + \int_1^t h_2(\mathrm{s}) ds + \int_1^t \mathrm{e}(\mathrm{s}) ds\,]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\frac{|u(t)|}{t^2}\right]^p \leq 2^{p-1}[|u_1|^p + |u_3|^p + \int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds +$$

$$+ \int_1^t h_2(\mathrm{s}) ds + \int_1^t \mathrm{e}(\mathrm{s}) ds]$$

$$\leq 2^{p-1}[|u_1|^p + |u_3|^p + H_2 + k] + 2^{p-1}\left[\int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds\right]$$

$$\left[\frac{|u(t)|}{t^2}\right]^p \leq m + 2^{p-1}[\int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds]$$

حيث: $m = 2^{p-1}[|u_1|^p + |u_3|^p + H_2 + k]$

لنرمز للطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة ب $A(t)$ أي:

$$A(t) = m + 2^{p-1}\left[\int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds\right] \qquad (21)$$

عندئذ نستنتج :

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq A(t) \qquad (22)$$

وهكذا نجد :

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^r \leq [A(t)]^{\frac{r}{p}}$$

وبما أن الدالة $g(s)$ غير متناقصة من أجل $s > 0$ ،عندئذ نحصل على:

$$g([\frac{|u(t)|}{t^2}]^r) \leq g([A(t)]^{\frac{r}{p}})$$

وبناء على ذلك فإنه من أجل $t \geq 1$ نحصل من (21)على :

$$A(t) \leq m + 2^{p-1}[\int_1^t h_1(\mathrm{s})\, .\, g([A(s)]^{\frac{r}{p}})\, ds] \qquad (23)$$

وبتطبيق متراجحة بيهاري[9] على (23) نحصل من أجل $t \geq 1$:

$$A(t) \leq G^{-1}[G(m) + \int_1^t h_1(\mathrm{s}) ds] \qquad (24)$$

حيث : $G(w) = \int_1^w \frac{ds}{g\left(s^{\frac{r}{p}}\right)}$

$G^{-1}(w)$ هي الدالة العكسية للدالة$G(w)$ والتي تكون معرفة لأجل $w \in (G(+0), +\infty)$

والأكثر من ذلك فان: $G(+0) < 0$ و $G^{-1}(w)$ متزايدة .

وإذا فرضنا أن : $L = G(m) + 2^{p-1}\int_1^t h_1(\mathrm{s}) ds < +\infty$

ومن كون G^{-1} متزايدة نجد أن: $A(t) \leq G^{-1}(L) < +\infty$

وينتج من (16):

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq G^{-1}(L) \qquad \Rightarrow \frac{|u(t)|}{t^2} \leq [G^{-1}(L)]^{\frac{1}{p}}$$

وبالاستفادة من الشرط (ii)من المبرهنة 3 نجد أن :

$$\int_1^t |f(s, u(s)) - e(s)| ds \leq \int_1^t h_1(\mathrm{s}).\, g([\frac{|u|}{s^2}]^r)\, \mathrm{ds} + \int_1^t h_2(\mathrm{s}) ds + \int_1^t \mathrm{e}(\mathrm{s}) ds$$

$$\leq m + \int_1^t h_1(s).g\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right)ds$$
$$= A(t) \leq G^{-1}(k) < +\infty \quad ; \quad t \geq 1$$

وهذا يبرهن أن التكامل $\int_1^t [f(s,u(s)) - e(s)]ds$ متقارب اطلاقاً وبالتالي فإن:

$\lim_{t\to\infty} \int_1^t [f(s,u(s)) - e(s)]ds$ موجودة ومحدودة.

ويستكمل البرهان كما في المبرهنات السابقة.

مثال تطبيقي:لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة التالية:

$$[|u''(t)|^{p-1}u''(t)]' + e^{-t}.\cos u = \frac{1}{e^t} \quad ; r > 0 \,; \; p \geq 1 \,; t \geq 1 \quad (***)$$

من المعادلة (***)وبإجراء الحسابات نحصل على :

$$g(u) = 1 \quad \& \quad h_1(t) = e^{-t} \;\; \& \;\; h_2(t) = 0 \;\; \& \;\; e(t) = \frac{1}{e^t}$$

وبذلك نستنتج أن جميع شروط المبرهنة 3 محققة وهذا يعني بدوره أن كل الحلول الشاملة للمعادلة (***) لها السلوك المقارب $at^2 + bt + c$ عندما $t \to \infty$ حيث$a, b, c \in R \; ; a \neq 0$.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تم التوصل إلى مبرهنات هامة وجديدة في السلوك المقارب للحلول الشاملة لنمط جديد من المعادلات التفاضلية غير الخطية وغير المتجانسة من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$ وسوف نواصل عملية البحث العلمي في موضوع السلوك المقارب والحلول الموجبة والحلول الشاذة بثابت لابلاسي $p \geq 1$.

نوصي زملاءنا من الأساتذة المتخصصين من أعضاء الهيئة التدريسية في الجامعات السورية بالاستمرار في عملية البحث العلمي حيث توجد العديد من المسائل المفتوحة في السلوك المقارب والسلوك التذبذبي وغير التذبذبي للمعادلات التفاضلية غير الخطية من مراتب مختلفة.

المراجع:

[1]BARTŬSEK,M.- *Singular solutions for the differential equation with p- Laplacian*, Archivum Math. (Brno), 41 (2005) 123–128.

[2]BARTŬSEK,M.- *On singular solutions of a second order differential equations, Electronic Journal of Qualitaive Theory of Differential Equations*, 8 (2006), 1–13.

[3]BARTŬSEK , M and MEDVĚD, M.- *Existence of global solutions for systems of second-order functional-differential equations with p-Laplacian*, Electronic Jornal of Differential Equations,2008(40) (2008), 1–8.

[4]BARTŬSEK,M.- and PEḰARKOV́A,E.- *On existence of proper solutions of quasilinear second order differential equations, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 1(2007), 1–14.

[5]BRAUER,F and NOHEL, J, A .- *The qualitative theory of ordinary differential equations*,university of Wisconsin,Canada,1969,305p.

[6]LADAS,G.and FINIZIO,N.-*An introduction to differential equations with difference equations,Fourier series,and Partial differential equations ,printed in the United states of America,Wadsworth publlshing company* ,1982,481p.

[7]MEDVĚD, M and PEḰARKOV́A,E.- *Existence of global solutions of systems of second order differential equations with p-Laplacian*, Electronic Journal of Differential Equations, 2007(136) (2007), 1–9.

[8]MEDVĚD, M and PEḰARKOV́A,E.- *large time behavior of solutions to second order differential equations with p-Laplacian*, Electronic Journal of Differential Equations, vol(2008),No(108),pp.1-12.

[9]MUSTAFA,O.G and ROGOVCHENKO,Y.V.-*Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second order nonlinear differential equations, Nonlinear Analysis.Apple.,v.* **51** ,2002,PP. 339– 368.

[10]PEḰARKOV́A,E.- Asymptotic *properties of second order differential equation with p-Laplacian* ,supervisor :prof .RANDR.Miroslva Bartušek,DrSc Bron 2009,pp.1-28.

[11]SHIMA, H. and NAKAYAMA, T.-*Higher Mathematics for physics and Engineering*.Springer Heidelberg Dordrecht London New York, Library of congress control Number:2009940406. ©Springer-verlag Berlin Heidelberg,2010 ,677p.