مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

تقريب التوابع إلى كثيرات حدود على أقواس ريس

الدكتور محمد علي*
الدكتور عبد الباسط يونسو**
علا صادق***

(تاريخ الإيداع 12 / 1 / 2011. قُبِل للنشر في 21 / 2 / 2011)

□ ملخّص □

ندرس في هذا العمل مسألة تقريب التوابع العقدية التي تنتمي إلى الفضاء $L_{\mathrm{p}}(\Gamma)$ على المنحنيات المفتوحة Γ والتي تنتمي إلى أسرة واسعة من المنحنيات وهي أسرة منحنيات ريس. وقد استخدمنا من أجل ذلك بعض خواص تحويل جوكوفسكي و تأثيره في أسرة منحنيات ريس.

الكلمات المفتاحية: منحنيات ريس، تقريب التوابع، معامل الاستمرار.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** مدرّس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

Approximation of Functions to Polynomials on Reisz Arcs

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Abd Al-Baset Yonsu**
Ola Sadek***

(Received 12 / 1 / 2011. Accepted 21 / 2 / 2011)

□ ABSTRACT □

In this paper, we will study the approximation of complex functions from $L_p(\Gamma)$ space on the open curves Γ which are related to the Reisz class of Curves.
For that end, we have used some of Joukowski transformation properties and his effect on Reisz Curves.

Keywords: Reisz Curves, Approximation of Functions, Model of continuity.

* **Associate Prof., Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
** **Assistant Prof, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*** **Postgraduate Student; Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم أن العناصر الرئيسة في مسائل نظرية تقريب التوابع العقدية ترتبط بـ:

1- صف التوابع التي يتم تقريبها.

2- صف التوابع التي يتم التقريب إليها (كثيرات الحدود، التوابع الكسرية، ...) والتي نسميها أدوات التقريب.

3- أسرة المناطق التي يتم التقريب عليها.

4- دراسة الفروق والتي تسمى في حالة التقريب المعمّق بمعامل الاستمرار.

في بحثنا هذا قمنا بدراسة مسألة تقريب التوابع من صف شهير هو $\boldsymbol{L}_{\mathbf{p}}$ إلى كثيرات حدود تنتمي إلى صف واسع من كثيرات الحدود وهي كثيرات حدود فابيير. وعملية التقريب هذه تتم على منحنيات مفتوحة (أقواس) تنتمي إلى أسرة واسعة من المنحنيات وهي أسرة منحنيات ريس. معامل الاستمرار المستخدم يتعلّق بتابع معرّف على الدائرة الواحدية وسيرد تعريفه مفصّلا.

وقد استخدمنا في هذا العمل تحويلاً شهيراً وهو تحويل جوكوفسكي العكسي الذي يتمتّع بخاصة هامّة جدا وهي خاصة تحويله للمنحنيات المفتوحة إلى منحنيات مغلقة، فمن خلال ذلك استطعنا تحويل مسألة تقريب التوابع العقدية على منحنيات مفتوحة إلى مسألة تقريب التوابع العقدية على منحنيات مغلقة. وننوه بأنّنا من أجل الوصول إلى النتيجة الرئيسة لهذا العمل قمنا بإثبات بعض المبرهنات اللازمة وعندها أتى برهان النتيجة الرئيسة بشكل مبسّط.

أهمية البحث وأهدافه:

يملك هذا البحث أهمية في نظرية تقريب التوابع العقدية، فمن خلال معرفة الصفة الرئيسة للتوابع (الصف التي تنتمي إليه) قمنا بإيجاد كثيرة حدود (كثيرة حدود فابيير) قريبة منها بدرجة كافية.

طرائق البحث ومواده:

طريقة البحث تعتمد بشكل أساسي على خواص الفضاءات التابعية العقدية وعلى المفردات الأساسية في نظرية التقريب وعلى تحويل مسألة تقريب التوابع على منحنيات مفتوحة إلى مسألة تقريب التوابع على منحنيات مغلقة باستخدام تحويل جوكوفسكي العكسي.

تعريف 1: الفضاء الموزّن $\boldsymbol{L}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{V})$ [1]:

يقال عن التابع f إنه ينتمي إلى الفضاء الموزّن $L_{\mathrm{p}}(\Gamma,V)$، حيث V تابع مختلف عن الصفر ومنته في كل مكان تقريبا على المنحني Γ، إذا كان f قابلا للقياس على Γ وكان التابع $|f.V|^{\mathrm{p}}$ قابلا للمكاملة بحسب ليبيغ على طول المنحني Γ، أي أنّ $\int_{\Gamma}|f.V|^{\mathrm{p}}|\mathrm{dz}|<\infty$.

ويعرّف النظيم في الفضاء الموزن $L_{\mathrm{p}}(\Gamma,V)$ بالشكل الآتي:

$$\|f\|_{L_{\mathrm{p}}(\Gamma,V)}=\left\{\int_{\Gamma}|f(z).V(z)|^{\mathrm{p}}|dz|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

<u>في حالة خاصة</u>: إذا كان $V(z)=1$ فإن $L_{\mathrm{p}}(\Gamma,V)=L_{\mathrm{p}}(\Gamma)$.

ويكون النظيم في الفضاء $L_p(\Gamma)$ معطى بالعلاقة الآتية:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left\{\int_\Gamma |f(z)|^p\, |dz|\right\}^{1/p}$$

تعريف 2: تكامل كوشي الشاذ للتابع f [2]:

يعطى تكامل كوشي الشاذ للتابع f على طول المنحني Γ بالعلاقة الآتية:

$$\tilde{f}(t) = S_\Gamma f(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-t}\, dz \qquad ; \quad t \in \Gamma$$

تعريف 3: أسرة منحنيات ريس R_p [2]:

تعرّف أسرة منحنيات ريس R_p بأنها مجموعة المنحنيات ذات الطول المحدود والتي من أجلها يكون:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma)} \le C(p)\, \|f\|_{L_p(\Gamma)} \qquad ; \quad \forall\, p > 1$$

و يرمز بـ $R = \bigcap_{p>1} R_p$.

- قبل إنجاز المبرهنة الرئيسة في هذا العمل نقوم بعرض بعض التعاريف والرموز المستخدمة وإثبات بعض المبرهنات.
- ليكن صورة المنحني Γ المفتوح وفق تحويل جوكوفسكي العكسي هو المنحني C المغلق. ولتكن D هي القرص الواحدي، و$\gamma_0 = \{w; |w| = 1\}$ الدائرة الواحدية.
- $D^+ = int\,\gamma_0$ ، $D^- = ext\,\gamma_0$.
- نرمز بـ $w = \varphi_0(z)$ للتابع الذي يحوّل بشكل محافظ من خارج المنحني المفتوح Γ إلى D^-.
- $z = \psi_0(w)$ التابع العكسي له.
- ليكن $G^+ = int\, C$ ، $G^- = ext\, C$.
- نرمز بـ $w = \varphi(t)$ للتابع الذي يحوّل بشكل محافظ G^- إلى D^- ، $t = \psi(w)$ تابعه العكسي.
- نرمز بـ $w = \varphi_1(t)$ للتابع الذي يحوّل بشكل محافظ G^+ إلى D^- ، $t = \psi_1(w)$ تابعه العكسي.
- ندخل في دراستنا تحويل جوكوفسكي $z = t + \frac{1}{t}$ و تابعه العكسي $t = \frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة 1: ليكن f تابعاً عقدياً ولنرمز بـ $f^*(t) = f(t+\frac{1}{t})$، عندئذ:

إذا كان C صورة المنحني Γ وفق تحويل جوكوفسكي فإن:

$$f \in L_p(\Gamma) \quad \Leftrightarrow \quad f^* \in L_p(C,V) \quad ; \quad V = \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{1/p}$$

الإثبات: بما أنّ $z = t + \frac{1}{t}$ فإن $dz = \left(1-\frac{1}{t^2}\right) dt$ ، ولدينا $f(z) \in L_p(\Gamma)$ عندئذ يكون:

$$f \in L_p(\Gamma) \Leftrightarrow \int_\Gamma |f(z)|^p . |dz| < \infty \Leftrightarrow \int_C \left|f\left(t+\frac{1}{t}\right)\right|^p . \left|1-\frac{1}{t^2}\right| . |dt|$$

$$\Leftrightarrow \int_C \left|f\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{1/p}\right|^p . |dt|$$

$$\Leftrightarrow \int_C |f^*(t).V(t)|^p . |dt| < \infty$$

وهذا يكافئ أن $f^{*}\epsilon L_{p}(C,V)$

و منه يكون $\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \|f^{*}\|_{L_p(C,V)}$

أي أنّ : $f \in L_p(\Gamma) \iff f^{*} \in L_p(C,V)$

– إنّ العلاقة بين التحويلات φ و φ_0 ، ψ و ψ_0 تعطى بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة 2:

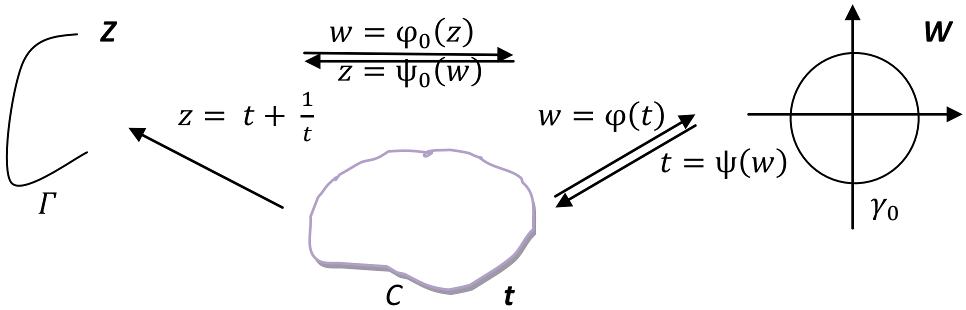
$$\varphi(t) = \varphi_0\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad ; t \in G^{-} \qquad (1)$$

$$\psi_0(w) = \psi(w) + \frac{1}{\psi(w)} \qquad (2)$$

الإثبات: نلاحظ أنه يمكن تحويل خارج المنحني المغلق C إلى خارج الدائرة الواحدية γ_0 بطريقتين:

<u>الأولى</u>: بشكل مباشر من خلال التحويل $w = \varphi(t)$.

<u>الثانية</u>: بتحويل خارج المنحني المغلق C إلى خارج المنحني المفتوح Γ وفق تحويل جوكوفسكي $z = t + \frac{1}{t}$ ومن ثم تحويل خارج Γ إلى خارج γ_0 وفق التحويل $w = \varphi_0(z)$ كما هو موضح بالشكل (1).



الشكل (1)

فتكون $w = \varphi_0\left(t + \frac{1}{t}\right)$

مما سبق ينتج أنّ: $\varphi(t) = \varphi_0\left(t + \frac{1}{t}\right)$

<u>وبشكل مشابه</u>: لدينا $t = \psi(w)$ و $z = \psi_0(w)$ وبما أنّ $z = t + \frac{1}{t}$ نجد

$$\psi_0(w) = t + \frac{1}{t}$$

فيكون: $\psi_0(w) = \psi(w) + \frac{1}{\psi(w)}$

– يعرّف التابع $f_0(w)$ بالشكل $f_0(w) := f\big(\psi_0(w)\big)\big(\grave{\psi}_0(w)\big)^{1/p}$.

إنّ هذا التابع معرّف على الدائرة الواحدية γ_0 وليكن $V(z)$ تابع وزن، نرمز بـ $V_1(w) = V\big(\psi(w)\big)$

مبرهنة 3:

$$1- \quad f \in L_p(C) \implies f_0 \epsilon L_p(\gamma_0)$$

$$2- \quad f \epsilon L_p(C,V) \implies f_0 \epsilon L_p(\gamma_0, V_1)$$

الإثبات: $1\text{-}\ f \in L_p(C) \Rightarrow \int_C |f(t)|^p . |dt| < \infty$

وبما أنّ $t = \psi(w)$ يكون $dt = \dot{\psi}(w)dw$ وبالتالي:

$$\int_{\gamma_0} \left| f(\psi(w)) \left(\dot{\psi}(w)\right)^{1/p} \right|^p . |dw| = \int_{\gamma_0} |f(\psi(w))|^p |\dot{\psi}(w)| \, |dw|$$
$$= \int_C |f(t)|^p . |dt| < \infty$$
$$\Rightarrow f_0 \in L_p(\gamma_0)$$

$2\text{-}\ f \in L_p(C, V) \Rightarrow \int_C |f(t).V(t)|^p \, |dt| < \infty$

لدينا:

$$\int_{\gamma_0} |f_0(w).V_1(w)|^p |dw| = \int_{\gamma_0} \left| f[\psi(w)]\left[\dot{\psi}(w)\right]^{1/p} . V[\psi(w)] \right|^p |dw|$$
$$= \int_{\gamma_0} |f[\psi(w)].V[\psi(w)]|^p |\dot{\psi}(w)| \, |dw|$$
$$= \int_C |f(t).V(t)|^p \, |dt| < \infty$$
$$\Rightarrow f_0 \in L_p(\gamma_0, V_1)$$

– تعطينا المبرهنة الآتية العلاقة بين التحويلات φ_1 و φ_0 ، ψ_1 و ψ_0:

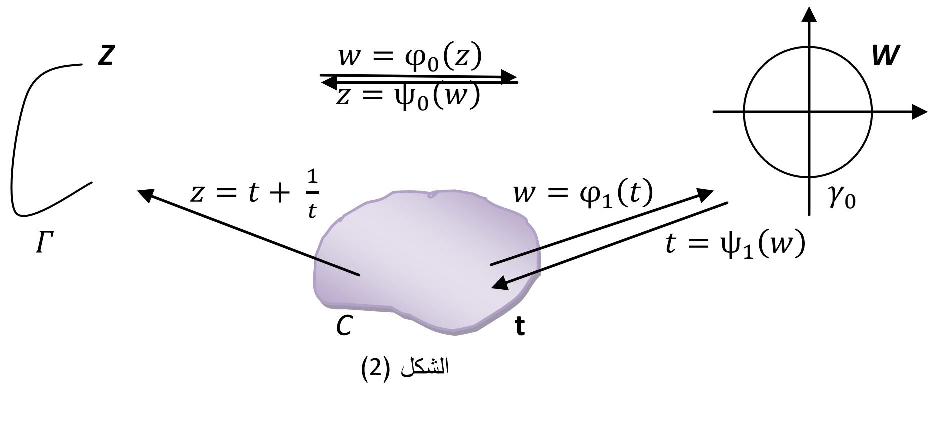
مبرهنة 4:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0\left(t + \frac{1}{t}\right) \qquad ; t \in G^+ \qquad (3)$$
$$\psi_0(w) = \psi_1(w) + \frac{1}{\psi_1(w)} \qquad (4)$$

الإثبات: نلاحظ أنه يمكن تحويل داخل المنحني المغلق C إلى خارج الدائرة الواحدية γ_0 بطريقتين:

الأولى: بشكل مباشر وفق التحويل $w = \varphi_1(t)\ ;\ t \in G^+$.

الثانية: بتحويل داخل المنحني المغلق C إلى خارج المنحني المفتوح Γ وفق تحويل جوكوفسكي $z = t + \frac{1}{t}$ ومن ثم تحويل خارج Γ إلى خارج γ_0 بواسطة التحويل $w = \varphi_0(z) = \varphi_0\left(t + \frac{1}{t}\right)$ كما هو موضح بالشكل (2).



الشكل (2)

أي أنّ:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

وبشكل مشابه للمبرهنة 2 نجد أنّ:

$$\psi_0(w) = \psi_1(w) + \frac{1}{\psi_1(w)}$$

– يعرّف التابع $\tilde{f}_0(w)$ بالشكل $\tilde{f}_0(w) := f(\psi_1(w))\left(\dot{\psi}_1(w)\right)^{1/p}$.

إنّ هذا التابع معرّف على الدائرة الواحدية γ_0.

– إذا كان $\mathrm{V(z)}$ تابع وزن ما، نرمز بـ$V^*(\mathrm{w}) = \mathrm{V}(\psi_1(\mathrm{w}))$ عندئذ يكون:

مبرهنة 5: $$f\epsilon L_{\mathrm{p}}(\mathrm{C},V) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_0\epsilon L_{\mathrm{p}}(\gamma_0,V^*)$$

<u>الإثبات:</u> $$f\epsilon L_{\mathrm{p}}(\mathrm{C},V) \ \Rightarrow \ \int_{\mathrm{C}} |f(t).V(t)|^{\mathrm{p}}\,|\mathrm{dt}| < \quad \infty$$

وبما أنّ $t = \psi_1(w)$ يكون $dt = \grave{\psi}_1(w)dw$ وبالتالي:

$$\int_{\gamma_0}\left|\tilde{f}_0(\mathrm{w}).\mathrm{V}^*(\mathrm{w})\right|^{\mathrm{p}}|\mathrm{dw}| = \int_{\gamma_0}\left|f[\psi_1(w)][\grave{\psi}_1(w)]^{1/\mathrm{p}}.V[\psi_1(w)]\right|^{\mathrm{p}}|\mathrm{dw}|$$
$$= \int_{\gamma_0}|f[\psi_1(w)].V[\psi_1(w)]|^{\mathrm{p}}\left|\grave{\psi}_1(w)\right||\mathrm{dw}|$$
$$= \int_{\mathrm{C}} |f(t).V(t)|^{\mathrm{p}}\,|\mathrm{dt}| < \quad \infty$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{f}_0\epsilon L_{\mathrm{p}}(\gamma_0,V^*)$$

فيما يلي سوف نفترض أنّ V_1 و V^* يحققان $\mathrm{V}_1(\mathrm{w}) = \mathrm{c}_1\mathrm{V}_1(we^{ih})$ و $\mathrm{V}^*(\mathrm{w}) = \mathrm{c}_2\mathrm{V}^*(we^{ih})$.

– يعرّف معامل الاستمرار للتابع f_0 في الفضاء $L_{\mathrm{p}}(\gamma_0)$ بالشكل الآتي:

$$w_{\mathrm{p}}(f_0,\delta) = SUP_{|h|\leq\delta}\left\|f_0(\mathrm{we}^{ih}) - f_0(\mathrm{w})\right\|_{\mathrm{L_p}(\gamma_0)}$$

سوف نرمز بـ $w_{\mathrm{p}}(f_0,c,\delta) = SUP_{|h|\leq\delta}\left\|cf_0(\mathrm{we}^{ih}) - f_0(\mathrm{w})\right\|$

من الواضح أنه في حالة $c = 1$ يكون $w_{\mathrm{p}}(f_0,1,\delta) = w_{\mathrm{p}}(f_0,\delta)$.

– يعرّف معامل الاستمرار للتابع f_0 في الفضاء الموزّن $L_{\mathrm{p}}(\gamma_0,V_1)$ بالعلاقة الآتية:

$$w_{\mathrm{p},V_1}(f_0,\delta) = SUP_{|h|\leq\delta}\left\|f_0(\mathrm{we}^{ih}) - f_0(\mathrm{w})\right\|_{\mathrm{L_p}(\gamma_0,\mathrm{V}_1)}$$

– ويكون معامل الاستمرار للتابع $\tilde{f}_0$ في الفضاء الموزّن $L_{\mathrm{p}}(\gamma_0,V^*)$ معرّفاً بالشكل الآتي:

$$w_{\mathrm{p},V^*}(\tilde{f}_0,\delta) = SUP_{|h|\leq\delta}\left\|\tilde{f}_0(\mathrm{we}^{ih}) - \tilde{f}_0(\mathrm{w})\right\|_{\mathrm{L_p}(\gamma_0,\mathrm{V}^*)}$$

نشير إلى أنّ مثل هذه المعاملات في حالة دالة الوزن تساوي 1 قد استخدمها أندرسون [3].

لتكن $V(t) = \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{1/\mathrm{p}}$ عندئذ تصبح $\mathrm{V}_1(\mathrm{w}) = V(\psi(w)) = \left(1-\psi^{-2}(w)\right)^{1/\mathrm{p}}$.

– تعطينا المبرهنة الآتية العلاقة بين معاملات الاستمرار w_{p,V_1} و $\mathrm{w_p}$:

مبرهنة 6: $$w_{\mathrm{p,v_1}}(f_0^*,\delta) = \mathrm{w_p}(f_0,\mathrm{c}_1,\delta)$$

<u>الإثبات:</u>

$$w_{\mathrm{p},V_1}(f_0^*,\delta) = SUP_{|h|\leq\delta}\left\|f_0^*(\mathrm{we}^{ih}) - f_0^*(\mathrm{w})\right\|_{\mathrm{L_p}(\gamma_0,\mathrm{v}_1)}$$
$$= \mathrm{SUP}_{|h|\leq\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|[f_0^*(we^{ih}) - f_0^*(w)].V_1(w)\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$
$$= \mathrm{SUP}_{|h|\leq\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|f_0^*(we^{ih}).V_1(w) - f_0^*(w).V_1(w)\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$
$$= \mathrm{SUP}_{|h|\leq\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|f_0^*(we^{ih}).c_1V_1(we^{ih}) - f_0^*(w).V_1(w)\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$
$$= \mathrm{SUP}_{|h|\leq\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_1.f_0^*(we^{ih}).V\left(\psi(we^{ih})\right) - f_0^*(w).V(\psi(w))\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_1 f_0^*(we^{ih})\left(1-\psi^{-2}(we^{ih})\right)^{1/\mathrm{p}} - f_0^*(w)\left(1-\psi^{-2}(w)\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}} \quad (5)$$

من العلاقة (2) لدينا $\psi_0(\mathrm{w}) = \psi(\mathrm{w}) + \frac{1}{\psi(\mathrm{w})}$ منه وبالاشتقاق يكون $\frac{\dot{\psi}_0(w)}{\dot{\psi}(w)} = 1-\psi^{-2}(w)$

بالتعويض في (5) نجد أنّ:

$$w_{\mathrm{p},V_1}(f_0^*,\delta) = \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_1 f_0^*(we^{ih})\left(\frac{\dot{\psi}_0(we^{ih})}{\dot{\psi}(we^{ih})}\right)^{1/\mathrm{p}} - f_0^*(w)\left(\frac{\dot{\psi}_0(w)}{\dot{\psi}(w)}\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_1 f^*\left(\psi(we^{ih})\right)\left(\dot{\psi}(we^{ih})\right)^{1/\mathrm{p}}\left(\frac{\dot{\psi}_0(we^{ih})}{\dot{\psi}(we^{ih})}\right)^{1/\mathrm{p}} - f^*(\psi(w))\left(\dot{\psi}(w)\right)^{1/p}\left(\frac{\dot{\psi}_0(w)}{\dot{\psi}(w)}\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_1 f^*\left(\psi(we^{ih})\right)\left(\dot{\psi}_0(we^{ih})\right)^{1/\mathrm{p}} - f^*(\psi(w))\left(\dot{\psi}_0(w)\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}} \quad (6)$$

لدينا $f^*(t) = f(t+\frac{1}{t})$ منه ومن العلاقة (2) ينتج أنّ:

$$f^*\left(\psi(\mathrm{w})\right) = f\left(\psi(\mathrm{w}) + \frac{1}{\psi(\mathrm{w})}\right) = f\left(\psi_0(\mathrm{w})\right)$$

بالتعويض في (6) يكون:

$$w_{\mathrm{p},V_1}(f_0^*,\delta) = \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_1 f\left(\psi_0(we^{ih})\right)\left(\dot{\psi}_0(we^{ih})\right)^{1/\mathrm{p}} - f\left(\psi_0(w)\right)\left(\dot{\psi}_0(w)\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_1 f_0(we^{ih}) - f_0(w)\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= SUP_{|h|\le\delta}\left\|c_1 f_0(\mathrm{w}e^{ih}) - f_0(\mathrm{w})\right\|_{\mathrm{L_p}(\gamma_0)}$$

$$= \mathrm{w_p}(f_0,\mathrm{c}_1,\delta)$$

مما سبق نحصل على:

$$w_{\mathrm{p},V_1}(f_0^*,\delta) = \mathrm{w_p}(f_0,\mathrm{c}_1,\delta) \quad (7)$$

– إذا كانت $V(t) = \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{1/\mathrm{p}}$ تصبح $\mathrm{V}^*(\mathrm{w}) = V\left(\psi_1(w)\right) = \left(1-\psi_1^{-2}(w)\right)^{1/\mathrm{p}}$

تعطى العلاقة بين معاملات الاستمرار $\mathrm{w}_{\mathrm{p},\mathrm{v}^*}$ و $\mathrm{w_p}$ بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة 7: $\mathrm{w}_{\mathrm{p},\mathrm{v}^*}(\tilde{f}_0^*,\delta) = \mathrm{w_p}(f_0,\mathrm{c}_2,\delta)$

<u>الإثبات:</u>

$$w_{\mathrm{p},V^*}(\tilde{f}_0^*,\delta) = SUP_{|h|\le\delta}\left\|\tilde{f}_0^*(\mathrm{w}e^{ih}) - \tilde{f}_0^*(\mathrm{w})\right\|_{\mathrm{L_p}(\gamma_0,\mathrm{v}^*)}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|\left[\tilde{f}_0^*(we^{ih}) - \tilde{f}_0^*(w)\right].V^*(w)\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|\tilde{f}_0^*(we^{ih}).V^*(w) - \tilde{f}_0^*(w).V^*(w)\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|\tilde{f}_0^*(we^{ih}).c_2V^*(we^{ih}) - \tilde{f}_0^*(w).V^*(w)\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$= \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_2.\tilde{f}_0^*(we^{ih}).V\left(\psi_1(we^{ih})\right) - \tilde{f}_0^*(w).V\left(\psi_1(w)\right)\right|^{\mathrm{p}}.|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$w_{\mathrm{p},V^*}(\tilde{f}_0^*,\delta) = \mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_2\tilde{f}_0^*(we^{ih})\left(1-\psi_1^{-2}(we^{ih})\right)^{1/\mathrm{p}} - \tilde{f}_0^*(w)\left(1-\psi_1^{-2}(w)\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}} \quad (8)$$

من العلاقة (4) لدينا $\psi_0(\mathrm{w})=\psi_1(\mathrm{w})+\frac{1}{\psi_1(\mathrm{w})}$ بالاشتقاق والتعويض في (8) نجد:

$$w_{\mathrm{p},V^*}(\tilde{f}_0^*,\delta)=\mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_2\tilde{f}_0^*(we^{ih})\left(\frac{\grave{\psi}_0(we^{ih})}{\grave{\psi}_1(we^{ih})}\right)^{1/\mathrm{p}}-\tilde{f}_0^*(w)\left(\frac{\grave{\psi}_0(w)}{\grave{\psi}_1(w)}\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$=\mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_2f^*\left(\psi_1(we^{ih})\right)\left(\grave{\psi}_1(we^{ih})\right)^{1/p}\left(\frac{\grave{\psi}_0(we^{ih})}{\grave{\psi}_1(we^{ih})}\right)^{1/\mathrm{p}}-f^*(\psi_1(w))\left(\grave{\psi}_1(w)\right)^{1/\mathrm{p}}\left(\frac{\grave{\psi}_0(w)}{\grave{\psi}_1(w)}\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$=\mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_2f^*\left(\psi_1(we^{ih})\right)\left(\grave{\psi}_0(we^{ih})\right)^{1/\mathrm{p}}-f^*(\psi_1(w))\left(\grave{\psi}_0(w)\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}\quad(9)$$

من تعريف التابع f^* وبحسب العلاقة (4) لدينا:

$$f^*\left(\psi_1(\mathrm{w})\right)=f\left(\psi_1(\mathrm{w})+\frac{1}{\psi_1(\mathrm{w})}\right)=f\left(\psi_0(\mathrm{w})\right)$$

بالتعويض في (9) يكون:

$$w_{\mathrm{p},V^*}(\tilde{f}_0^*,\delta)=\mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_2f\left(\psi_0(we^{ih})\right)\left(\grave{\psi}_0(we^{ih})\right)^{1/\mathrm{p}}-f(\psi_0(w))\left(\grave{\psi}_0(w)\right)^{1/\mathrm{p}}\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$=\mathrm{SUP}_{|h|\le\delta}\left\{\int_{\gamma_0}\left|c_2f_0(we^{ih})-f_0(w)\right|^{\mathrm{p}}|dw|\right\}^{1/\mathrm{p}}$$

$$=SUP_{|h|\le\delta}\left\|c_2f_0(\mathrm{w}e^{ih})-f_0(\mathrm{w})\right\|_{\mathrm{L_p}(\gamma_0)}$$

$$=\mathrm{w_p}(f_0,\mathrm{c}_2,\delta)$$

ومنه وجدنا أنّ :

$$w_{\mathrm{p},V^*}(\tilde{f}_0^*,\delta)=\mathrm{w_p}(f_0,\mathrm{c}_2,\delta)\qquad(10)$$

مبرهنة مساعدة 1 [4]: ليكن C منحنى مغلقاً ينتمي إلى أسرة منحنيات ريس عندئذ:

إذا كان $f\in\mathrm{L_p}(\mathrm{c},\mathrm{v})$ فإنه توجد دالة كسرية $\mathrm{R_n}(t)$، من الدرجة n على الأكثر، بحيث يتحقق ما يأتي:

$$\|f(\mathrm{t})-\mathrm{R_n}(\mathrm{t})\|_{\mathrm{L_p}(\mathrm{c},\mathrm{v})}\preccurlyeq \mathrm{w}_{\mathrm{p},\mathrm{v}_1}\left(f_0,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+w_{P,V^*}\left(\tilde{f}_0,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

حيث إنّ $\mathrm{R_n}(t)$ هي دالة كسرية من الشكل $\mathrm{R_n}(\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{k}=-\mathrm{n}}^{\mathrm{k}=\mathrm{n}}a_k\mathrm{t}^{\mathrm{k}}$

– المبرهنة المساعدة الآتية تبيّن أن صورة أقواس ريس وفق تحويل جوكوفسكي العكسي هي منحنيات مغلقة تنتمي إلى الأسرة نفسها.

مبرهنة مساعدة 2 [2]: ليكن C صورة المنحني Γ المفتوح وفق تحويل جوكوفسكي عندئذ يكون:

$$\Gamma\in\mathrm{R}\qquad\Longrightarrow\qquad C\in R$$

نورد الآن المبرهنة الرئيسة في هذا العمل.

مبرهنة 8: ليكن Γ منحنى مفتوحاً ينتمي إلى أسرة منحنيات ريس عندئذ:

إذا كان $f\epsilon L_{\mathrm{p}}(\Gamma)$ فإنه توجد كثيرة حدود $\mathrm{P_n}(z)$، من الدرجة n على الأكثر، بحيث يتحقق ما يأتي:

$$\|f(z)-P_{\mathrm{n}}(z)\|_{\mathrm{L_p}(\Gamma)}\preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,c_1,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_2,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

الإثبات:

بما أن $f\epsilon L_{\mathrm{p}}(\Gamma)$ حسب المبرهنة 1 يكون: $f^{*}(t)=f\left(t+\frac{1}{t}\right)\epsilon\,\mathrm{L_p}(\mathrm{c,v})$ عندئذ و بالاعتماد على المبرهنة المساعدة 1 والمبرهنة المساعدة 2 توجد دالة كسرية $\mathrm{R_n}(t)$ ، من الدرجة n على الأكثر، بحيث يتحقق:

$$\|f^{*}(t)-R_{\mathrm{n}}(t)\|_{\mathrm{L_p(c,v)}} \preccurlyeq \mathrm{w}_{\mathrm{p,v_1}}\left(f_0^{*},\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w}_{\mathrm{p,v^*}}\left(\tilde{f}_0^{*},\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \quad (11)$$

بتعويض (7) و (10) في (11) نجد أنّ:

$$\|f^{*}(t)-R_{\mathrm{n}}(t)\|_{\mathrm{L_p(c,v)}} \preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_1,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_2,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

$$\left\|f\left(t+\frac{1}{t}\right)-R_{\mathrm{n}}(t)\right\|_{\mathrm{L_p(c,v)}} \preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_1,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_2,\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \quad (12)$$

بإجراء التبديل $\mathrm{t}=\frac{1}{\mathrm{t}}$ نحصل على:

$$\left\|f\left(t+\frac{1}{t}\right)-R_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{t}\right)\right\|_{\mathrm{L_p(c,v)}} \preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_1,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_2,\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \quad (13)$$

من العلاقتين (12) و(13) نجد:

$$\left\|f\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{R_{\mathrm{n}}(t)+R_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{t}\right)}{2}\right\|_{\mathrm{L_p(c,v)}} \preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_1,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_2,\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \quad (14)$$

نلاحظ أنّ $\frac{R_{\mathrm{n}}(t)+R_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{t}\right)}{2}$ هي كثيرة حدود بقوى $t+t^{-1}$ من الشكل:

$$P_{\mathrm{n}}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\frac{R_{\mathrm{n}}(t)+R_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{t}\right)}{2}$$

بالتعويض في العلاقة (14) نحصل على:

$$\left\|f\left(t+\frac{1}{t}\right)-P_{\mathrm{n}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\|_{\mathrm{L_p(c,v)}} \preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_1,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_2,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

واستناداً إلى تحويل جوكوفسكي يكون

$$\|f(z)-P_{\mathrm{n}}(z)\|_{\mathrm{L_p}(\Gamma)} \preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_1,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)+\mathrm{w_p}\left(f_0,\mathrm{c}_2,\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \quad (15)$$

نتيجة: من العلاقة (15) نستنتج أنه في حالة خاصة إذا كانت $\mathrm{c}_1=c_2=1$ فإننا نحصل على التقريب الآتي:

$$\|f(z)-P_{\mathrm{n}}(z)\|_{\mathrm{L_p}(\Gamma)} \preccurlyeq \mathrm{w_p}\left(f_0,\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

الاستنتاجات و التوصيات:

من الدراسة السابقة نستنتج أن الوصول إلى حل مسألة تقريب التوابع العقدية على منحنيات مفتوحة تتم من خلال تحويلها إلى مسألة تقريب التوابع على منحنيات مغلقة باستخدام تحويل جوكوفسكي ، ونوصي بأن يتم إجراء هذه الدراسة على أسرة أخرى من المنحنيات.

المراجع:

[1]. GUVEN, A; ISRAFILOV, D. *Multipuer theorems in Weighted Smirnov Spaces.* J. Korean Math. Koria. Vol. 45, $N^{o}.6$, 2008, 1535-1548.

[2]. علي، محمد سليم. *أثر بعض التحويلات المحافظة على منحنيات ريس وعلى معامل الاستمرار*، مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية، سلسلة العلوم الأساسية، المجلد (24)، العدد (12)،2002، ص(23-34).

[3]. ANDERSSON, J. E. *On the degree of polynomial approximation in* $E^{p}(D)$. J. Approximation theory, Vol. 19, 1977, 61-68.

[4]. ALI, M. S. *Problems in approximation theory in complex plane.* Ph. Dissertation. Baky, 1990, 69-76.