مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

تحليل فضاء الحالات للحاسبات الدورية المنتهية

الدكتور محمد حسن حسن*
جميل محمد**

(تاريخ الإيداع 10 / 10 / 2010. قُبِل للنشر في 17 / 2 /2011)

□ ملخّص □

ندرس في هذا البحث التحليل الشبكي (sp – تجزئة) لفضاء الحالات Q_n لحاسبة دورية منتهية $A_n=(Q_n , X , Y , \delta_n , \lambda_n)$، حيث n عدد طبيعي $(n \geq 2)$. يشمل هذا البحث على نتائج تميز هذا النوع من التجزئات، بالإضافة إلي تعيين العمليات الجبرية على الشبكة، وذلك بدلالة العوامل الموجبة للعدد الصحيح n. وتتلخص بما يلي:

1. إذا كان Q_n فضاء الحالات لحاسبة دورية منتهية A_n، و π تجزئة لـ Q_n، عندئذ π تشكل (sp – تجزئة) للفضاء Q_n إذا وفقط إذا كان $\pi = \pi_{r,s}$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة r, s حيث $r.s = n$.
2. إذا كانت $\pi_{r,s}$ و $\pi_{r',s'}$ (SP– تجزئتان) منفصلتان لفضاء الحالات Q_n لحاسبة دورية منتهية A_n، عندئذ يكون $\pi_{r,s} \circ \pi_{r',s'} = 0$ إذا وفقط إذا كان GCD(r,r')=1.
3. يوجد (SP – تجزئتين) منفصلتين غير تافهتين π'' و π' لفضاء الحالات Q_n $(n \geq 2)$، بحيث يكون $\pi' o \pi''=0$، إذا وفقط إذا كان العدد n قابلاً للقسمة على عددين أوليين مختلفين على الأقل.
4. إذا كان Q_n فضاء الحالات لحاسبة دورية منتهية الحالات $(n \geq 2)$، و r, s, r', s' أعداداً طبيعية، بحيث $r.s=n=r'.s'$ و $D=D(s, s')$ ترمز للمضاعف المشترك الأصغر للعددين s, s'، وكذلك $d = d(s, s')$ القاسم المشترك الأكبر لهما، عندئذ تتحقق المساويتان التاليتان:

$$\pi_{r,s} \circ \pi_{r',s'} = \pi_{n/D, D}$$
$$\pi_{r,s} + \pi_{r',s'} = \pi_{n/d, d}$$

الكلمات المفتاحية: الحاسبة الدورية منتهية الحالات، نظرية الحوسبة الجبرية، التحليل الشبكي (SP–تجزئة).

---

* أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية – سورية.
** قائم بالأعمال، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

Decomposition of the Space of States of a Finite Cyclic Machine

Dr. M. H. Hassan*
J. Mohammad**

(Received 10 / 10 / 2010. Accepted 17 / 2 /2011)

□ ABSTRACT □

The decomposition of the sublattice of SP-Partitions of the state space Q_n of the finite-state cyclic machine A_n, when n is a natural number ≥ 2 and $A_n=(Q_n, X, Y, \delta_n, \lambda_n)$. A simple characterization of these SP-Partitions, as well as the Lattice operations, is obtained in terms of the positive factors of n. We brief these results as follows:

1. If Q_n is the state space for the finite–state cyclic machine A_n and π is a partition of Q_n, then π is an SP-partition of Q_n if, and only if, $\pi = \pi_{r, s}$ for some positive integers r, s such that r.s = n.
2. If $\pi_{r, s}, \pi_{r', s'}$ are two distinct SP–partitions of the state space Q_n then $\pi_{r,s} \text{ o } \pi_{r',s'} = 0$ (the zero partition) if, and only if, GCD (r, r') = 1.
3. For $n \geq 2$, there exist two distinct non-trivial partitions π' and π'' of the state space Q_n such that, $\pi' \text{ o } \pi'' = 0$ if, and only if, n is divisible by at least two distinct primes.
4. If Q_n is the state space of the finite–state cyclic machine ($n \geq 2$), and r, s, r', s' natural numbers such that r.s = n = r'. s', and D = D (s , s') denote the least common multiple of common divisor of s and s' and d = d (s , s') be their greatest common divisor, then the following equations hold:

$$\pi_{r,s} \text{ o } \pi_{r',s'} = \pi_{n/D, D}$$
$$\pi_{r,s} + \pi_{r',s'} = \pi_{n/d, d}$$

* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Tishreen, Lattakia, Syria.
** Academic Assistant, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Tishreen, Lattakia, Syria.

Keywords: Finite State Cyclic Machines, Algebraic Theory of Computation, Decomposition of SP-Partitions.

مقدمة:

يعتبر مفهوم الحاسبة منتهية الحالات (Finite-state machine) الأساس في نظرية الحوسبة الجبرية والأوتومات وتطبيقاتها. سنتعامل في هذا البحث مع شكل خاص للحاسبة منتهية الحالات تسمى الحاسبة الدورية منتهية الحالات (Finite-state cyclic machine) معرفة في الفقرة 2.1 وكذلك ([1]، cf[2]).

من أجل هذه الحاسبات الخاصة سنبحث عن شبكة جزئية لتحليل فضاء الحالات Q_n وفق خاصية التعويض (SP− تجزئة) (SP-Partition) المعرفة في الفقرة 2.1.

وسنستخلص بعض النتائج الهامة (نظرية 5.2) لوصف هذه التجزئات بعوامل موجبة محددة للعدد n، وبعض النتائج الأخرى المتضمنة في (النظرية 9.2) تعطي الوصف الحسابي لشبكة التجزئة.

أهمية البحث وأهدافه.

يرمي هذا البحث إلى تحليل فضاء الحالات للحاسبة الدورية المنتهية ووصلها على التفرع والتوازي ثم إيجاد خواص الشبكة الناتجة. وتأتي أهمية هذا البحث في سهولة تطبيقات الشبكة المكافئة الناتجة وتخفيض الزمن اللازم للوصول إلى النتائج المطلوبة.

طرائق البحث ومواده.

تم إجراء هذا البحث خلال العام الدراسي 2009− 2010 في رحاب جامعة تشرين بالاعتماد على المراجع المتوفرة وشبكة الإنترنت. وتم استخدام الطرائق التحليلية في برهان الحقائق والنظريات الجديدة ، كما تم عرض العديد من الخوارزميات والتطبيقات العملية لتوضيح وفهم النتائج المستخلصة من البحث.

النتائج والمناقشة.

1. مفاهيم أساسية ومناقشة (Cf [1], [3], [4], [5])

1.1. رموز ومصطلحات.

نرمز بـ $Q = \{ q_1 , q_2 , ... \}$ لمجموعة اختيارية منتهية من الحالات q_i.

ولتكن n, m أعداداً طبيعية أكبر أو تساوي الواحد.

نأخذ $Q_n = \{ q_1 , q_2 , ..., q_n \}$ ، حيث $n \geq 2$ ، ونرمز بـ A لحاسبة ميلي (cf [2])

المعرفة بالخماسية $A = (Q , X , Y , \delta , \lambda)$ حيث

Q	مجموعة الحالات الداخلية	(the set of internal states)،
X	مجموعة رموز الدخل	(the set of input symbols)،
Y	مجموعة رموز الخرج	(the set of output symbols)،
$\delta : Q \times X \to Q$	دالة النقل للحاسبة A	(the transition function)،
$\lambda : Q \times X \to Y$	دالة الخرج	(the Output function).

2.1. تعريف.

لتكن $A_n = (Q_n, X, Y, \delta_n, \lambda_n)$ حاسبة ميلي، حيث $n \geq 2$ ،

نقول إن A_n حاسبة دورية ب n حالة إذا حققت الشروط التالية:

1. Q_n معرفة كما في الفقرة 1.1،
2. $X = \{0,1\} = Y$ ،
3. دالة النقل $\delta_n : Q_n \times X \to Q_n$ معرفة بالعلاقات التالية :

$$\delta_n(q_i, 0) = q_i \ , \ 1 \leq i \leq n \qquad ;$$

$$\delta_n(q_i, 1) = \begin{cases} q_{i+1} & , 1 \leq i \leq n-1; \\ q_1 & , i = n; \end{cases}$$

4. دالة الخرج : $\lambda_n : Q_n \times X \to Y$ معرفة بالشكل

$$\lambda_n(q_i, x) = \begin{cases} 1 & , \quad (i, x) = (n,1) \\ 0 & , \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.1. تعريف: بتعيين حالة أولية q_i لحاسبة دورية A_n ($n \geq 2$)، نتج حاسبة دورية أولية وتكتب بالشكل $A_n^{(i)}$ ، نرمز لها بـ (initialized n-state cyclic machine)

$$A_n^{(i)} = (Q_n, X, Y, \delta_n, \lambda_n, q_i).$$

4.1. تعريف: (cf [3])

نقول إن حاسبتي ميلي $A = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$, $A' = (Q', X', Y', \delta', \lambda')$

متماثلتان (isomorphic) إذا وجدت ثلاثة دوال متباينة

$$h_Q : Q \to Q' \ , \ h_X : X \to X' \ , \ h_Y : Y \to Y'$$

بحيث يكون $h_Q(\delta(q,x)) = \delta'(h_Q(q), h_X(x)) \ , \ h_Y(\lambda(q,x)) = \lambda'(h_Q(q), h_X(x))$

من أجل كل $q \in Q$, $x \in X$.

وبذلك تكون حاسبتا ميلي A' , A متماثلتين إذا توافقتا مع (الشكل 1).

$$\begin{tikzcd}
Y & Q \times X \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "(h_Q, h_X)"] & Q \arrow[d, "h_Q"] \\
Y' \arrow[from=u, "h_Y"] & Q' \times X' \arrow[l, "\lambda'"] \arrow[r, "\delta'"'] & Q'
\end{tikzcd}$$

(الشكل 1) يبين تماثل حاسبتي ميلي A' , A

ملاحظة: لتبسيط حالة الحاسبات الدورية الأولية $A'^{(i)}$ ، $A^{(i)}$
نضع شرطا إضافيا $h_Q(q_1) = q'_1$ و بهذا تؤلف ثلاثية الدوال المتباينة (h_Q, h_X, h_Y)
صيغة تماثل بين حالات الحاسبتين A , A' .

2. تحليل فضاء حالات الحاسبة الدورية.

0.2 . شبكة التجزئة لفضاء الحالات.

لتكن π تجزئة لمجموعة الحالات Q للحاسبة $A = (Q, X, Y, \delta, \lambda)$ وليكن $q, q' \in Q$، نكتب :

$$\mathbf{q \equiv q'(\bmod \pi)}$$

إذا وفقط إذا كانا q' و q , ينتميان إلى الصف نفسه من التجزئة π .
نرمز بـ P لمجموعة جميع التجزئات للمجموعة Q، عندئذ تكون العمليتان
$+$ و o معرفتين على المجموعة p كما يلي :
من أجل $\pi_1, \pi_2 \in P$: يكون :

1. $q \equiv q'(\bmod \pi_1\, o\, \pi_2)$,
إذا وفقط إذا كان: $q \equiv q'(\bmod \pi_1)$ & $q \equiv q'(\bmod \pi_2)$

2. $q \equiv q'(\bmod \pi_1 + \pi_2)$
إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي : يوجد $q_1, ..., q_n \in Q$
حيث $q_1 = q$, $q_n = q'$ ومن أجل $1 \le i \le n-1$,
يكون إما $q_i \equiv q_{i+1}(\bmod \pi_1)$ وإمّا $q_i \equiv q_{i+1}(\bmod \pi_2)$
وبذلك تعرف الرباعية $(\mathbf{P}, +, \mathbf{o}, \le)$ شبكة ترتيب مع التقيد بالترتيب الجزئي العادي
$\le$ لتحسين التجزئة $(cf\,[6])$.

1.2. تعريف: لتكن π تجزئة لمجموعة الحالات Q_n
لحاسبة دورية $A_n = (Q_n, X, Y, \delta_n, \lambda_n)$ ، عندئذ تسمى π (SP – تجزئة) لـ Q_n
إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :
إذا كان $q \equiv q'(\bmod \pi)$ ، عندئذ يكون $\delta_n(q, x) \equiv \delta_n(q', x)(\bmod \pi)$
من أجل كل $\boldsymbol{x \in X}$ و من أجل كل $\boldsymbol{q, q' \in Q_n}$.

2.2. نظرية: لتكن L_n مجموعة جميع (SP – تجزئات) المجموعة Q_n
لحاسبة دورية منتهية الحالات A_n ، عندئذ تشكل الرباعية $(\mathbf{L_n}, +, \mathbf{o}, \le)$
شبكة جزئية ،تحوي الصفر وعنصر الواحدة، من الشبكة P لجميع تجزئات Q_n. (cf [6]).

3.2. تعريف: ليكن r, s عددين طبيعيين $(1 \le)$ ، نعرف التجزئة $\pi_{r,s}$ لفضاء الحالات $Q_{r.s}$

كما يلي : إذا كان $1 \le i\,, j \le r.s,$ ، فإن $q_i \equiv q_j \pmod{\pi_{r,s}}$ إذا وفقط إذا كان s يقسم $|i-j|$. من السهل معرفة أن $\pi_{r,s}$ تشكل تجزئة لها s صف منها يحوي r عنصر .

4.2. مثال. التجزئة $\pi_{4,5}$ تمثل تجزئة لفضاء الحالات Q_{20} على الشكل التالي:

$$\pi_{4,5} = \{\{q_1,q_6,q_{11},q_{16}\},\{q_2,q_7,q_{12},q_{17}\},\{q_3,q_8,q_{13},q_{18}\},\{q_4,q_9,q_{14},q_{19}\},\{q_5,q_{10},q_{15},q_{20}\}\}$$

5.2. نظرية: إذا كانت Q_n فضاء الحالات لحاسبة دورية A_n منتهية الحالات و π تجزئة لـ Q_n، عندئذ π تشكل (SP- تجزئة) لـ Q_n إذا وفقط إذا كان $\pi = \pi_{r,s}$, من اجل كل عددين صحيحين موجبين r, s يحققان العلاقة $r.s = n$

البرهان : نفرض وجود عددين صحيحين موجبين r , s بحيث $r.s = n$ و $\pi = \pi_{r,s}$

وبفرض أن $q_i \equiv q_j \pmod{\pi_{r,s}}$ ، حيث $q_i\,, q_j \in Q_n$ ، ينتج عندئذ أن s يقسم $|i-j|$

ونبرهن على ذلك في الحالات التالية :

أ). من أجل $x = 0$ يكون $\delta_n(q_i,0) = q_i \; and \; \delta_n(q_j,0) = q_j$ ،

ينتج من ذلك أن $\delta_n(q_i,0) \equiv \delta_n(q_j,0) \pmod{\pi_{r,s}}$

ب) من أجل $x = 1$:

1. إذا كان $1 \le i, j < n,$ عندئذ يكون $\delta_n(q_i,1) = q_{i+1}$ ، $\delta_n(q_j,1) = q_{j+1}$.

وبملاحظة أن $|(i+1)-(j+1)| = |(i-j)|$ ، نجد أن S يقسم $|(i+1)-(j+1)|$ ، وبالتالي يكون $\delta_n(q_i,1) \equiv \delta_n(q_j,1) \pmod{\pi_{r,s}}$.

2. إذا كان $1 \le i < n$ و $j = n$ ، نجد أن s يقسم n-i ، وبالتالي s يقسم n . نستنتج أن s يقسم i . كذلك $\delta_n(q_j,1) = q_1$ و $\delta_n(q_i,1) = q_{i+1}$ وبملاحظة أن $i = |1-(i+1)|$ نستنتج أيضا أن $\delta_n(q_i,1) \equiv \delta_n(q_j,1) \pmod{\pi_{r,s}}$.

3. من أجل $1 \le j < n$ و $i = n$ نحصل على الحالة 2.

4. من أجل $j = n$ و $i = n$ نلاحظ أن $\delta_n(q_i,1) \equiv \delta_n(q_j,1) \pmod{\pi_{r,s}}$

وبذلك يتم البرهان على أنه من أجل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة i , j حيث $1 \le i\,, j \le n$ يكون $q_i \equiv q_j \pmod{\pi_{r,s}} \Rightarrow \delta_n(q_i,x) \equiv \delta_n(q_j,x) \pmod{\pi_{r,s}}$ وبالتالي $\pi_{r,s}$ تشكل (SP − تجزئة) لـ Q_n .

على العكس: نفرض أن π تشكل (sp − تجزئة) لـ Q_n ، حيث $n \ge 2$ ، ولنبرهن على وجود عددين طبيعيين r, s بحيث $r.s = n$ ، $\pi = \pi_{r,s}$.

أ. بفرض أن $q_i \not\equiv q_j \pmod{\pi}$ حيث $1 \le i < j \le n$ ، عندئذ من الواضح أن $\pi = \pi_{1,n}$ تشكل التجزئة الصفرية لـ Q_n وهذه النتيجة تشكل حالة بدائية للبرهان.

ب . نفرض الآن وجود عددين صحيحين i , j ، بحيث $1 \le i < j \le n$ و $q_i \equiv q_j \pmod{\pi}$

وليكن $e = \min\{|i-j| : i \ne j, q_i \equiv q_j \pmod{\pi}\}$. ينتج أن e يقسم n.

وبفرض أن ذلك غير صحيح ،عندئذ يكون $n = me + k, m \ge 1, 0 < k < e$. إذا أخذنا $e = j'-i'$

وكان $q_{i'} \equiv q_{j'} \pmod{\pi}$ ، عندئذ ينتج أن $q_{i'} \equiv q_{i'+e} \equiv .... \equiv q_{i'+me} \equiv q_{i'+me+k} \pmod{\pi}$

ومن هذا ينتج أن $q_{i'} \equiv q_k \pmod{\pi}$, وهذا يناقض مبدأ اختيار e ، وبالتالي يكون e قاسما للعدد n.

نستنتج مباشرة من ذلك حقيقة أن π تشكل (SP - تجزئة) لفضاء الحالات Q_n من أجل جميع i , j

حيث $1 \le i, j \le n$ و $i \ne j$.

وبالتالي العدد e يقسم $|i-j|$ إذا وفقط إذا كان :

$$q_i \equiv q_j \pmod{\pi} \qquad (1)$$

وسنبرهن الآن من أجل العددين الصحيحين a , b حيث $1 \le a, b \le n$

صحة العلاقة $q_a \equiv q_b \pmod{\pi} \Rightarrow q_a \equiv q_b \pmod{\pi_{n/e,e}}$.

من الواضح أنه بالتوافق مع العلاقة (1) السابقة وبفرض $q_a \equiv q_b \pmod{\pi}$ حيث $|b-a| = m.e$

و m عدد صحيح ينتج مباشرة أن q_a و q_b تنتميان إلى الكتلة من التجزئة $\pi_{n/e,e}$ نفسها.

وبالتالي يكون $q_a \equiv q_b \pmod{\pi_{n/e,e}}$ ، وينتج من ذلك أن $\pi = \pi_{n/e,e}$.

6.2. نتائج: ليكن $n = p_1^{\alpha_i} ... p_k^{\alpha_k}$ $\alpha_i \succ 0, 1 \le i \le k,$ التحليل القياسي للعدد n حيث p_i

العوامل الأولية لـ n وليكن $h = (1+\alpha_1)....(1+\alpha_k)$ ، عندئذ نحصل على النتائج التالية:

1.6.2. من برهان النظرية 5.2

ينتج أن جميع (SP - تجزئات) لـ Q_n $(n \ge 2)$ يمكن الحصول عليها وفق الخوارزمية التالية :

خوارزمية (1):

(خطوة 1). نشكل المجموعة T من جميع قواسم n ، عندئذ T تحتوي h عنصر $t_1, ..., t_h$.

(خطوة 2). من أجل كل $r \in T$ نشكل التجزئة $\pi_{r,s}$ حيث $s = n/r$ وبالتالي يوجد h (SP - تجزئة) لـ Q_n .

تطبيق: من أجل Q_8 يكون $n = 8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1$

و T={1, 2, 4, 8}. و تكون (SP - تجزئات) المجموعة Q_8

كما يلي : $\pi_{1,8}, \pi_{2,4}, \pi_{4,2}, \pi_{8,1}$.

2.6.2. يوجد لفضاء الحالات Q_n (SP - تجزئة) غير بدائية إذا وفقط إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً.

لتوليد (SP-تجزئات) $(r.s = n)$ $\pi_{r,s}$ لفضاء حالات Q_n نتبع الخوارزمية التالية:

خوارزمية (2) :

(خطوة 1). ليكن $B_i = \{q_{k'} \in Q_n : k' \equiv i + sk \pmod{n}, 1 \le k \le n/s\}$.

(خطوة 2). $\pi_{r,s} = \{B_1,...,B_{n/s}\}$.

7.2 نظرية مساعدة (تمهيدية)

ليكن $\pi_{r,s}, \pi_{r',s'}$ (SP – تجزئتين) متمايزتين لفضاء الحالات Q_n لحاسبة دورية A_n منتهية الحالات ، عندئذ تمثل $\pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'} = 0$ التجزئة الصفرية إذا وفقط إذا كان القاسم المشترك الأكبر $GCD(r,r') = 1$.

البرهان: نفرض أن $\pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'} = 0$ وأن $GCD(r,r') > 1$
والمضاعف المشترك الأصغر $l.c.m(s,s') = D(s,s') = D,$ ، ينتج أن $D < n$.
ليكن $q_a \equiv q_b (\bmod \pi_{r,s})$ حيث $|b-a| = D$ ، عندئذ يكون $q_a \equiv q_b (\bmod \pi_{r,s})$
وهذا يناقض النتيجة $q_a \equiv q_b (\bmod \pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'})$.

على العكس: نفرض أن $GCD(r,r') = 1$ ولنبرهن أن $\pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'} = 0$.
نفرض أن هذا غير صحيح ، عندئذ يوجد عددان صحيحان a , b
حيث $1 \le a, b \le n$ ، بحيث تتحقق $q_a \equiv q_b (\bmod \pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'})$
من هذا ينتج أن $q_a \equiv q_b (\bmod \pi_{r,s})\ and\ q_a \equiv q_b (\bmod \pi_{r',s'})$
ومن التعريف 2.1 نجد أن كلا العددين s و 's يقسم $|a-b|$
وهذا يناقض أن $|a-b| < n$ و $D(s,s') = n$ وبالتالي ينتج أن $\pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'} = 0$.

8.2 نظرية مساعدة (تمهيدية):

يوجد (SP - تجزئتان) متمايزتان غير تافهتين π', π'' لفضاء الحالات Q_n لحاسبة دورية منتهية الحالات A_n و($n \ge 2$)، بحيث يكون $\pi' o \pi'' = 0$ إذا وفقط إذا كان العدد n قابلاً للقسمة على عددين أوليين مختلفين على الأقل.
البرهان: ليكن $n \ge 2$ قابل للقسمة على العددين الأوليين المختلفين t و p.
عندئذ نستطيع كتابة $n = p^i.t^j.k,$ ، حيث $p|k, t|k$ و $i > 0, j > 0, k \ge 1$.
ينتج عن ذلك أن $\pi_{t^j.k,p^i}$, $\pi_{p^i,t^j.k}$ تشكلان (SP- تجزئتين) مختلفتين غير تافهتين لـ Q_n .
من أجل العددين الصحيحين r, s $(r \ne s)$ يكون : $q_r \equiv q_s (\bmod \pi_{k.t^j,p^i}\, o\, \pi_{p^i,k.t^j})$
إذا وفقط إذا كان $q_r \equiv q_s (\bmod \pi_{p^i,k.t^j})$ و $q_r \equiv q_s (\bmod \pi_{k.t^j,p^i})$
وهذا يعني أن r-s قابل للقسمة على $k.t^j$ و p^i وبالتالي $p^i.t^j.k$ يقسم $|r-s|$
ينتج من هذا أن العدد r-s قابل للقسمة على n وهذا يناقض الفرض بأن $r \ne s$.
حيث نعلم من النظرية 7.2 أن $\pi_{t,n/t}\, o\, \pi_{p,n/p} = 0$ إذا وفقط إذا كان $GCD(t,p) = 1$.
على العكس: ليكن $n = p^k$ ، حيث $k \ge 1$ و p عدد أولي .
من أجل $k \le 2$: نعلم من 6.2 انه يوجد للمجموعة Q_n على الأكثر (SP- تجزئة) واحدة .

من أجل $k \geq 3$: ليكن π', π'' (SP - تجزئتين) مختلفتين لـ Q_n ,

عندئذ يوجد عددان صحيحان مختلفان i, j بحيث $1 \leq i, j \leq k-1$

ويحققان العلاقتين $\pi' = \pi_{p^{k-i}, p^i}$, $\pi'' = \pi_{p^{k-j}, p^j}$. إذا اعتبرنا التجزئة الناتجة $\pi = \pi' o \pi''$

ولاحظنا بأن p^{k-i}, p^{k-j} غير أوليين ، نستنتج من النظرية 7.2 أن $\pi'.\pi'' \neq 0$. وبهذا يتم البرهان.

9.2. نظرية:

ليكن Q_n فضاء الحالات للحاسبة الدورية منتهية الحالات A_n

A_n ، $n \geq 2$.

ولتكن r, s, r', s' أعداداً طبيعية بحيث $r.s = n = r'.s$.

نرمز ب $D = D(s, s')$ للمضاعف المشترك الأصغر للعددين s' و s

ونرمز ب $d = d(s, s')$ للقاسم المشترك الأكبر لهما

عندئذ تتحقق المساواتان التاليتان: $(1)\ \pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'} = \pi_{n/D,D}$

$(2)\ \ \pi_{r,s} + \pi_{r',s'} = \pi_{n/d,d}$.

البرهان: من أجل العددين الصحيحين a , b حيث $1 \leq a, b \leq n$

يكون $q_a \equiv q_b (\mathrm{mod}\, \pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'})$ إذا وفقط إذا كان

$q_a \equiv q_b (\mathrm{mod}\, \pi_{r,s})$ و $q_a \equiv q_b (\mathrm{mod}\, \pi_{r',s'})$.

ينتج من هذا حقيقة أن كلا العددين s' و s يقسم $|a-b|$.

وهذا يكافئ الشرط بأن D يقسم $|a-b|$.

ولكن هذا يتحقق إذا وفقط إذا كان $q_a \equiv q_b (\mathrm{mod}\, \pi_{n/D,D})$.

وبذلك يتم برهان العلاقة (1).

لنبرهن الآن العلاقة (2). من أجل التلاؤم الطبيعي سنرمز هنا بـ q^i للحالة q_{a_i}

حيث $1 \leq i < k-1$ و $1 \leq a_i \leq k-1$. والآن يكون $q_a \equiv q_b (\mathrm{mod}\, \pi_{r,s}\, o\, \pi_{r',s'})$

إذا وفقط إذا كان يوجد متوالية $q^1, q^2, \ldots, q^k, (1 \leq k \leq n)$ من فضاء الحالات Q_n

بحيث $q^1 = q_a, q^k = q_b$ ومن اجل كل I حيث $1 \leq i \leq k-1$

يكون إما $q^i \equiv q^{i+1} (\mathrm{mod}\, \pi_{r,s})$, وإمّا $q^i \equiv q^{i+1} (\mathrm{mod}\, \pi_{r',s'})$

وهذا الشرط يكافئ وجود $q^1, \ldots, q^k \in Q_n$ بحيث $q^1 = q_a, q^k = q_b$

ومن أجل كل i , $1 \leq i \leq k-1$ يكون إما s أو s' يقسم $|a_i - a_{i+1}|$

وهذا يعني وجود $q^1, \ldots, q^k \in Q_n$ بحيث $q^1 = q_a, q^k = q_b$ و d

يقسم $|a_i - a_{i+1}|$ من أجل كل i, $1 \leq i \leq k \leq n$

وهذا يكافئ وجود متوالية $q^1, \ldots, q^k \in Q_n$

بحيث $q^i \equiv q^{i+1} (\mathrm{mod}\, \pi_{d,d})$, و $q^1 = q_a, q^k = q_b$

من أجل جميع قيم i حيث $1 \le i \le k \le n$ وهذا يكافئ حقيقة أن $q_a \equiv q_b (\mathrm{mod}\, \pi_{n/d,d})$

وبذلك يتم برهان العلاقة (2) وبالتالي النظرية.

الاستنتاجات والتوصيات:

يمكن للباحثين والمهتمين بسهولة برهان نتائج مشابهه للنتائج المضمنة في هذا البحث بالنسبة للحاسبة الدورية البدائية منتهية الحالات $A_n^{(i)}$.

المراجع:

[1] HASSAN, M.H. ; MUSTAFA, M.A. *Decomposition of a Special Type of Machines*: Qatar University Science Journal, Doha, Qatar. (1994), 14(1):1-7.

[2] BINKHOFF, G. & BARTEE, *Modern Applied Algebra*, McGraw-Hill, Inc., New York, T.C. (1970), 290.

[3] HARMANIS, J. ; STEARNS, R. *Algebraic Structure Theory of Sequential Machines*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. (1966) , 320.

[4] DORNHOFF, L.L. ; HOHN, F.E, *Applied Modern Algebra*, Macmillan, New York. (1978), 360.

[5] LEWIS, A.R.; PAPADIMMITRIOU, F.H. *Elements of the Theory of Computation*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. (1981),420.

[6] GILL, A., *Applied Algebra for the Computer Sciences*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. (1976), 360.