مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

Operator Approach in Solving the Problem of Small Motions of a System of Ideal Capillary Fluids

Dr. Wadia Ali*

(Received 18 / 1 / 2011. Accepted 13 / 3 /2011)

□ ABSTRACT □

The aim of this paper is to study and generalize some results concerning the problem of small motion of a pendulum with a cavity filled with an ideal capillary fluid [4] to the problem of small motions of a pendulum with a cavity filled with a system of ideal capillary fluids. At the beginning of the paper, we present the problem; then, we transform its initial boundary-value problem to a differential equation of second order in the Hilbert space. Yet, we prove a theorem to have a unique strong solution for this equation. The applied method is an important and new one in studying the problems of hydro-dynamical systems.

Keywords: Capillary Fluid, Differential Equation in Hilbert Space, Small Motions, Hydro-dynamical System.

* **Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

طرائق المؤثرات في حل مسألة الحركات الصغيرة لمجموعة سوائل شعرية مثالية

الدكتور وديع علي*

(تاريخ الإيداع 18 / 1 / 2011. قُبِل للنشر في 13 / 3 /2011)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو دراسة وتعميم بعض النتائج المتعلقة بمسألة الحركات الصغيرة لنواس ذي تجويف مملوء بسائل شعري مثالي واحد[4] إلى مسألة الحركات الصغيرة لنواس ذي تجويف مملوء بمجموعة من السوائل الشعرية المثالية. في بداية البحث نقوم بعرض المسألة، ثم نحول المسألة الحدية الابتدائية لهذه المسألة إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت ونبرهن نظرية حول وجود حل قوي وحيد لهذه المعادلة، والطريقة المعتمدة هي من الطرائق الهامة والحديثة في دراسة مسائل الجمل الهيدروديناميكية.

الكلمات المفتاحية: سائل شعري، المعادلة التفاضلية في فضاء هلبرت، الحركات الصغيرة، الجملة الهيدروديناميكية.

* مدرس – قسم الرياضيات بكلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مقدمة:

درست مسائل الحركات الصغيرة لسائل شعري في أنبوب بشروط قريبة من شروط حالة انعدام الوزن في أواخر القرن العشرين في عدة أبحاث [1,2,3]. طرائق المؤثرات المستخدمة في هذه المسائل موضحة في [1] ومن ثم في [2,4]. تمت في البحث [4] دراسة مسألة الحركات الصغيرة لسائل شعري مثالي واحد بوجود قوى الجذب والقوى الشعرية، أما في البحث الحالي فإننا ندرس الحركات الصغيرة لجملة (نواس + مجموعة من السوائل الشعرية المثالية) مع الأخذ بالاعتبار تأثير قوة الجاذبية الأرضية بالإضافة إلى القوى الشعرية. وتستخدم في دراسة هذه المسألة طرائق المؤثرات وتحديداً طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت.

أهمية البحث وأهدافه:

يرمي البحث إلى دراسة مسالة الحركات الصغيرة لنواس ذي تجويف مملوء بمجموعة من السوائل الشعرية المثالية باستخدام طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت لتحويل المسألة الحدية الابتدائية الموافقة لجملة (نواس + مجموعة سوائل شعرية مثالية) إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت $\hat{L}_2(\Omega)$ والبرهان على وجود الحل لهذه المعادلة ووحدانيّته. نشير إلى أن أهمية البحث تكمن في تطبيقاته العملية في مجال الفيزياء إذ إن مسائل حركات الأجسام ذات التجويفات المملوءة بسائل ترتبط بتكنولوجيا الصواريخ.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد هذه الدراسة على بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية المعتمدة في مجال التحليل الدالي، واستخدمت في دراستنا هذه طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت التي تبناها العديد من الباحثين في أعمال مختلفة .[2,4,5,6,9]

المسألة المطروحة:

لنفرض في حالة السكون أن النواس ذا التجويف $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ في نقطة مفروضة O نعتبرها مبدأ لجملة إحداثيات ديكارتية ثابتة $Oy_1y_2y_3$. ولنفرض أن التجويف Ω مملوء بمجموعة $m+1$ من السوائل الشعرية المثالية التي كثافاتها $\rho_i,\ i=\overline{1,m+1}$ تحقق: $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_{m+1} > 0$. ولتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثيات ديكارتية متحركة مرتبطة بالنواس.

سندرس الحركات الصغيرة لجملة (نواس + مجموعة السوائل الشعرية) عندما يؤثر في هذه الجملة حقل الجاذبية الأرضية $\vec{g} = -g\vec{e_3}$ وحقل القوى الخارجية $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ حيث $\vec{e_i}\ ,\ \vec{e_i}$ متجهات الواحدة، على الترتيب، على $Oy_i,\ Ox_i$ $(i=1,2,3)$ $(\vec{e_1} = \vec{e_1})$. عندئذ تأخذ معادلات الحركة لهذه الجملة الشكل التالي[1]:

$$\rho_k \frac{\partial^2 \vec{w}_k}{\partial t^2} + \rho_k \left(\frac{d^2 \vec{\delta}}{dt^2} \times \vec{r} \right) + \nabla p_k = \vec{f}(t,x), \qquad (1)$$

$$div\, \vec{w}_k = 0 \quad (in\ \Omega_k),\ k = \overline{1,m+1}\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k \frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega}\left(\vec{r}\times\vec{w}_k\right)d\Omega_k + J\frac{d\vec{\omega}}{dt}+m_o g\,\ell\vec{\delta}-$$

$$-g\sum_{j=1}^{m}\left(\rho_j-\rho_{j+1}\right)\int_{\Gamma_j}\left(\vec{e}_3\times\vec{r}\right)\varsigma_j\,d\Gamma_j=\vec{M}(t)\ ,\ \left(j=\overline{1,m+1}\right) \tag{2}$$

حيث $\left(x\in\Omega\ ,\ \overline{k=1,m+1}\right)$, $\vec{w}_k=\vec{w}_k(t,x)$ حقول السرعة النسبية في السوائل، $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$ متجه الانتقال الزاوي للنواس، $\vec{r}=x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ متجه الموضع لنقاط المناطق Ω_k $\left(k=\overline{1,m+1}\right)$، p_k $\left(k=\overline{1,m+1}\right)$ الضغط الديناميكي في السوائل، $J=J_b+\sum_{k=1}^{m+1}\left(J_\ell\right)_k>0$ مركبة تنسور العطالة (Inertia) tensor لجملة (نواس + سوائل) بالنسبة للمبدأ O والتي تساوي مجموع مركبتي تنسور عطالة النواس J_b وتنسورات عطالة السوائل $\left(J_\ell\right)_k$, $\left(k=\overline{1,m+1}\right)$، m_0 كتلة الجملة، $\left(on\ \Gamma_j\right)$ $\varsigma_j=\vec{w}_j\cdot\vec{n}_j=\vec{w}_{j+1}\cdot\vec{n}_j$، $\vec{n}_j$ الناظم على Γ_j $\left(j=\overline{1,m+1}\right)$، $\ell=\overline{OC}$، حيث C مركز ثقل الجملة، $\vec{M}(t)$ العزم الرئيس للقوى الخارجية المؤثرة في الجملة، $\varsigma_j\left(t,x_2\right)$ الدالة التي تعرّف انحراف السطح المتحرك $\Gamma_j(t)$ للسائل عن السطح المتوازن Γ_j.

والشروط الحدية على S_k (الجدار الصلب للمنطقة Ω_k ، $k=\overline{1,m+1}$) وعلى Γ_j , $\left(j=\overline{1,m}\right)$ السطوح الحرة للسوائل هي:

$$\vec{w}_k\cdot\vec{n}_k=\vec{w}_{k+1}\cdot\vec{n}_k=0\ \left(on\ S_k\ ,k=\overline{1,m+1}\right) \tag{3}$$

$$p_j-p_{j+1}=\sigma_j L_j\varsigma_j+\left(\rho_j-\rho_{j+1}\right)g\left(\vec{\delta}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e}_3\ ,\ \int_{\Gamma_j}\varsigma_j d\Gamma_j\ ,\ (j=\overline{1,m}) \tag{4}$$

$$\sigma_j L_j\varsigma_j:=-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j}\varsigma_j-\sigma_j\left(\left(k^2{}_1\right)_j\right)\varsigma_j++\left(\rho_j-\rho_{j+1}\right)g\cos\left(\vec{n}_j,\vec{e}_3\right)\varsigma_j,\left(j=\overline{1,m}\right),(5)$$

حيث σ_j ثابت التوتر السطحي، $\left(\Gamma_1\right)_j$ تقوس Γ_j ، Δ_{Γ_j} مؤثر لابلاس.

والشروط الابتدائية هي:

$$\vec{w}(0,x)=\vec{w}_k^{\,0}(x)\ ,\ x\in\Omega\ ,\ \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0\ ,\frac{\partial\vec{w}_k(o,x)}{\partial t}=\vec{v}_k^{\,0}(x)\ , \tag{6}$$

والمطلوب الآن إيجاد حل هذه المسألة الابتدائية أي إيجاد حقول السرعة w_k ، الضغط الديناميكي p_k $\left(k=\overline{1,m+1}\right)$ متجه الانتقال الزاوي $\vec{\delta}$ والدوال ς_j $(j=\overline{1,m})$ من المعادلات (1) – (5) عندما تتحقق شروط البدء (6).

تعريف(1): $[3]$

ندعو مجموعة الدوال $u:=\left\{\vec{u}_k(x)\right\}_{k=1}^{m+1}$ التي تحقق العلاقة:

$$\|\vec{u}\|_{\overset{\frown}{L}_2(\Omega)}:=\sum_{k=1}^{m+1}\rho_{k+1}\int_{\Omega_k}\left|\vec{u}_k(x)\right|^2 d\Omega_k<\infty\quad , \tag{7}$$

بفضاء هلبرت $\overset{\frown}{L}_2(\Omega)$ حيث الجداء الداخلي فيه معرف بالعلاقة:

$$\left(u,\hat{v}\right)_{L_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m+1} \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{v}_k \, d\Omega_k \ , \tag{8}$$

نظرية(1): $[3]$

لتكن Ω منطقة مقسمة إلى Ω_k منطقة جزئية و $\partial\Omega_k$ (حدود المنطقة Ω_k، $k=\overline{1,m+1}$) تحقق شروط ليبشتز $[3]$.عندئذ يكون:

$$L_2(\Omega) := J_0(\Omega) \oplus G_{h,s}(\Omega) \oplus G_\Gamma(\Omega), \tag{9}$$

$$J_0(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{m+1} \vec{J}_0(\Omega) := \left\{ w = \left\{\vec{w}_k(x)\right\}_{k=1}^{m+1} \in L_2(\Omega) : div\, \vec{w}_k = 0 \ (in\ \Omega_k), \vec{w}_k \cdot \vec{n} = 0 \ (on\ \partial\Omega_k) \ \right\}, \tag{10}$$

$$G_{h,s}(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{m+1} G_{h,s}(\Omega_k) = \left\{ v = \left\{\vec{v}_k(x)\right\}_{k=1}^{m+1} \in L_2(\Omega) : \right.$$
$$\vec{v}_k = \nabla\varphi_k \ , \Delta\varphi_k = 0 \ (in\ \Omega_k)\ , \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \ (on\ S_k)\ , k = \overline{1,m+1}\ ,$$
$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial\varphi_{j+1}} \ (on\ \ \Gamma_j)\ , \int_{\Gamma_j} \left(\rho_j\varphi_j - \rho_{j+1}\varphi_{j+1}\right) d\Gamma_j = 0, j = \overline{1,m}$$
$$\left. \int_{\Gamma_m} \rho_{m+1}\varphi_{m+1}\, d\Gamma_m = o \ \right\}, \tag{11}$$

$$G_\Gamma(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{m+1} \vec{G}(\Omega_k) = \left\{ u = \left\{\vec{u}_k\right\}_{k=1}^{m+1} \in L_2(\Omega) : \right.$$
$$\vec{u}_k = \nabla p_k \ (in\ \Omega_k)\ , k = \overline{1,m+1}\ , \rho_j p_j - \rho_{j+1} p_{j+1} = 0 \ (on\ \Gamma_j) \ \ j = \overline{1,m}$$
$$\left. \int_{\Gamma_m} \rho_{m+1} p_{m+1}\, d\Gamma_m = 0 \ \right\}, \tag{12}$$

النتائج والمناقشة:

إذا كانت حلول المسألة $(1)-(6)$:

$$w := w(t,x) = \left\{\vec{w}_k(t,x)\right\}_{k=1}^{m+1}, \nabla_\rho p := \nabla_\rho p(t,x) = \left\{\frac{1}{\rho_k}\nabla p_k\right\}_{k=1}^{m+1},$$

من أجل كل t ، هي عناصر من فضاء هلبرت $L_2(\Omega)$ فإنه يمكننا كتابة المعادلات (1) على النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{d^2\delta}{dt^2} \times \vec{r}\right) + \nabla_\rho p = f \ , \tag{13}$$

حيث $\frac{d^2\delta}{dt^2} \times \vec{r} := \left\{ \frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} \times \vec{r} \ \big|_{\Omega_k} \right\}_{k=1}^{m+1}$. من تعريف المنشور المتعامد (9)نرى أن:

$$w \in J_0(\Omega) \oplus G_{h,s}(\Omega) \ , \ \nabla_\rho p \in G_{h,s}(\Omega) \oplus G_\Gamma(\Omega)\ , \nabla_\rho p_0 \in G_\Gamma(\Omega).$$

بالتالي يمكن أن نضع:

$$\nabla_\rho p = \nabla_\rho \varphi + \nabla_\rho p_0 \;\;,\;\; \nabla_\rho \varphi \in G_{h,s}(\Omega) \;,\; \nabla_\rho p_0 \in G_\Gamma(\Omega)$$
$$w = u + \nabla\varphi \;,\; u \in J_0(\Omega) \;,\; \nabla\varphi \in G_{h,s}(\Omega).$$

بإسقاط المعادلة (13) على المنشور المتعامد (9) بواسطة مؤثرات الإسقاط العمودي $P_0 \;,\; P_{h,s} \;,\; P_\Gamma$ على $J_0(\Omega), G_{h,s}(\Omega), G_\Gamma(\Omega)$ ،على الترتيب، نحصل على المعادلة الآتية:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(C\varsigma\right) + \psi + B_0\varsigma + g\delta_1\left(\Delta\rho\right)\theta\left(\vec{e}_1\times\vec{r}\right)\vec{e}_3 = \vec{F}, \qquad (14)$$

حيث $\theta = diag\left(\theta_j\right)_{j=1}^m$ مؤثر الإسقاط العمودي (Orthoprojection operator) على الفضاء $L_{2,\Gamma} := \bigoplus_{j=1}^m L_{2,\Gamma_j}$، θ_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ مؤثرات الإسقاط العمودي على فضاء هلبرت L_{2,Γ_j}، $\varsigma = \left\{\varsigma_j\right\}_{j=1}^m$ و $C\varsigma := \left\{\left(\rho_j\Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right)_{\Gamma_j}\right\}_{j=1}^m$ و Φ_k $\left(k=\overline{1,m+1}\right)$ هي حلول المسألة الحدية الابتدائية الآتية:

$$\Delta\Phi_k = 0 \;\left(in\;\; \Omega_k\right) \;,\; \frac{\partial\Phi_k}{\partial n} = 0 \;\;\left(on\;\; S_k\right), \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_{k-1}} = \varsigma_{k-1}\;\left(0n\;\; \Gamma_{k-1}\right)$$
$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = \varsigma_k \;\left(on\;\; \Gamma_k\right)\; k=\overline{2,m} \;,\; \Delta\Phi_1 = 0\;\left(in\;\; \Omega_1\right), \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0\;\left(on\;\; S_1\right)$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1} = \varsigma_1\;\left(0n\;\; \Gamma_1\right), \Delta\Phi_{m+1} = 0\;\left(in\;\; \Omega_{m+1}\right), \frac{\partial\Phi_{m+1}}{\partial n_m} = \varsigma_m\;\left(on\;\; \Gamma_m\right)$$
$$\psi := P_{0,s}\left\{\left(\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2}\times\vec{r}\right)_{\Omega_k}\right\}_{k=1}^{m+1},$$

حيث $P_{0,s}$ مؤثر الإسقاط العمودي على الفضاء $J_{0,s}(\Omega) := J_0(\Omega)\oplus G_{h,s}(\Omega)$ ،

$$B_0 := \theta\left(\sigma L\right)\theta \;,\; \sigma L := diag\left(\sigma_j L_j\right)_{j=1}^m \;,\; \Delta\rho = diag\left(\left(\Delta\rho\right)_j I_j\right)_{j=1}^m,$$
$$\left(\Delta\rho\right)_j := \rho_j - \rho_{j+1} \;,\; P_{0,s} f = \nabla F.$$

بإسقاط المعادلة (2) على المنشور المتعامد (9) نحصل على المعادلة الآتية:

$$\left(J_b + J_\ell\right)\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + \left[\sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j}\left(\rho_j\varphi^0 - \rho_{j+1}\varphi^0\right)\frac{\partial^2\varsigma_j}{\partial t^2}d\Gamma_j\right]\vec{e}_1 +$$
$$+ mg\ell\vec{\delta} - g\sum_{j=1}^m\left(\Delta\rho\right)_j\int_{\Gamma_j}\left(\vec{e}_3\times\vec{r}\right)\varsigma_j\, d\Gamma_j = \vec{M} - \sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}\left(\vec{r}\times\vec{f}_{0k}\right)d\Omega_k \;\;, \;(15)$$

حيث $P_0\vec{f}_k := \vec{f}_{0k}$ و $\varphi_k^0 = \varphi_k^0(x)$ هي جهود جوكوفسكي(Zhukovsky potential)[2] وهي حلول المسألة الحدية الآتية:

$$\Delta\varphi_k^0 = 0\;\left(in\;\; \Omega_k\right) \;,\; \frac{\partial\varphi_k^0}{\partial n} = \left(\vec{e}_1\times\vec{r}\right)\cdot\vec{n} \;\;\left(on\;\; \partial\Omega_k \;\;,\;\; k=\overline{1.m+1}\right).$$

سنكتب الآن المعادلتين (14) و(15) على شكل معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت $H := L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{R}$ المؤلف من العناصر $\xi = \left(\varsigma, \vec{\delta}\right)^t$ حيث $\varsigma \in L_{2,\Gamma}$, $\vec{\delta} \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varsigma \\ \vec{\delta} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varsigma \\ \vec{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \vec{M} - \sum_{k=1}^{m+1} \rho_k \int_{\Omega_k} \left(\vec{r} \times \vec{f}_{0k}\right) d\Omega_k \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} & A_{11}\varsigma := C\varsigma \ , \ A_{12}\vec{\delta} := \delta_1 \psi^0 \ , \ A_{21}\varsigma := \left[\sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} \left(\rho_j \varphi_j^0 - \rho_{j+1}\varphi_{j+1}\right)\varsigma_j \, d\Gamma_j\right]\vec{e}_1 , \\ & A_{22}\vec{\delta} := \left(J_b + J_\ell\right)\vec{\delta} \ , \ \nabla\psi^0 = P_{0,s}\left\{\left(\vec{e}_1 \times \vec{r}\right) \big|_{\Omega_k}\right\}_{k=1}^{m+1} = \left\{\nabla \psi_k^0\right\}_{k=0}^{m+1}, \\ & \psi^0 := \left\{\left(\rho_j \psi_j^0 - \rho_{j+1}\psi_{j+1}^0\right)\right\}_{j=1}^{m} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} & B_{11}\varsigma := B_0\varsigma \ , \ B_{12}\vec{\delta} := g\left(\Delta\rho\right)\theta\left(\vec{e}_1 \times \vec{r} \cdot \vec{e}_3\right)\delta_1 , \\ & B_{21}\varsigma := -g\sum_{j=1}^{m}\left(\Delta\rho\right)_j \int_{\Gamma_j} \left(\vec{e}_3 \times \vec{r}\right)\varsigma_j \, d\Gamma_j \ , \ B_{22}\vec{\delta} := mg\,\ell\,\vec{\delta} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$$\frac{d^2\left(A\xi\right)}{dt^2} + B\xi = f\left(t\right), \ \xi\left(0\right) = \xi^0 \ , \ \xi'\left(0\right) = \xi^1 \qquad (18)$$

عندئذ المسألة (1)−(6) تتحول إلى مسألة كوشي:

في فضاء هلبرت $H = L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{R}$ حيث:

$$\xi^0 = \left(\varsigma^0, \vec{\delta}^0\right)^t \ , \ \varsigma^0 = \left\{\vec{w}_j \cdot \vec{n}_j\right\}_{j=1}^{m} , \ \xi^1 = \left(\varsigma^1, \vec{\omega}^0\right)^t \ , \ \varsigma^1 := \left\{\vec{u}_j^0 \cdot \vec{n}_j\right\}_{j=1}^{m} ,$$

$$\vec{\delta}\left(0\right) = \vec{\delta}^0 \ , \ \vec{\delta}'\left(0\right) = \vec{\omega}^0 . \qquad (19)$$

استناداً إلى ما سبق نحصل على النتيجة الآتية:

نظرية(2):

المسألة الحدية الابتدائية (1)−(6) تكافئ تماماً مسألة كوشي (18)، (19) في فضاء هلبرت.

تعريف(2): نقول إن لمسألة كوشي (18) حلاً قوياً وحيداً $\xi\left(t\right)$ معرفاً على $\mathbb{R}_+$ ويأخذ قيمه في فضاء هلبرت $H = L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{R}$ إذا تحقق ما يلي:

1) $\xi\left(t\right) \in D\left(B\right) \subset H$, $\xi'\left(t\right) \in D\left(B^{1/2}\right)$ من أجل أي $t \in \mathbb{R}_+$

2) $B\xi\left(t\right) , B^{1/2}\xi'\left(t\right) \in C\left(\mathbb{R}_+, H\right) , \xi\left(t\right) \in C^2\left(\mathbb{R}_+, H\right)$

3) تتحقق المعادلة (18) والشروط الابتدائية (19) من أجل أي $t \in \mathbb{R}_+$.

تعريف(3):

تدعى الدوال $\nabla p\ ,\ \vec{\delta}\ ,\ w$ حلاً قوياً للمسألة الحدية الابتدائية (1)−(6) إذا كانت الدالة $\xi(t)$ حلاً قوياً لمسألة كوشي (18).

تمهيدية(1): المؤثر $A:=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ المعرف بالعلاقات (16) مترافقاً ذاتياً وموجب ويؤثر في فضاء هلبرت الحقيقي $H=L_{2,\Gamma}\oplus\mathbb{R}$.

البرهان: حتى يكون المؤثر A مترافقاً ذاتياً يكفي أن يكون: $A^{*}_{12}=A_{21}\ ,\ A^{*}_{22}=A_{22}\ ,\ A^{*}_{11}=A_{11}$
إن $A_{11}=A_{11}^{*}$ لأن المؤثر C مترافق ذاتياً [5] وواضح جداً أن $A_{22}=A_{22}^{*}$. لدينا:

$$A_{21}\varsigma\cdot\vec{\delta}=\left[\sum_{j}^{m}\int_{\Gamma_j}\left(\rho_j\varphi_j^0-\rho_{j+1}\varphi_{j+1}^0\right)\varsigma_j\,d\Gamma_j\right](\delta\cdot\vec{e}_1) \qquad (20)$$

$$\left(\varsigma,A_{12}\vec{\delta}\right)_{L_{2,\Gamma}}=\delta_1\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\left(\rho_j\psi_j^0-\rho_{j+1}\psi_{j+1}^0\right)\varsigma_j\,d\Gamma_j=\delta_1\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}\nabla\psi_k^0\cdot\nabla\Phi_k\,d\Omega_k=$$

$$=\delta_1\left(\nabla\psi,\nabla\Phi\right)_{L_2(\Omega)}=\delta_1\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}(\vec{e}_1\times\vec{r})\cdot\nabla\Phi_k\,d\Omega_k$$

$$=\delta_1\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}div\left[(\vec{e}_1\times\vec{r})\Phi_k\right]d\Omega_k=\delta_1\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\,(\vec{e}_1\times\vec{r})\cdot\vec{n}_k\Phi\,d\Omega_k$$

$$=\delta_1\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\partial\Omega_k}\frac{\partial\varphi_k^0}{\partial n}\Phi_k\,d\Omega_k=\delta_1\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}\nabla\varphi_k^0\cdot\nabla\Phi_k\,d\Omega_k=$$

$$=\delta_1\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\left(\rho_j\varphi_j^o-\rho_{j+1}\varphi_{j+1}^0\right)\varsigma_j\,d\Gamma_j \qquad (21)$$

من العلاقتين (20) و (21) نجد أن:

$$\left(A_{12}\vec{\delta},\varsigma\right)_{L_2(\Omega)}=\vec{\delta}\cdot\left(A_{21}\varsigma\right) \qquad (22)$$

وهذا يعني أن $A_{12}^{*}=A_{21}$ الأمر الذي يؤدي إلى أن A مترافق ذاتياً . لنبين أن A موجب في H :
لدينا:

$$\left(A\xi,\xi\right)_H=\left(C\varsigma,\varsigma\right)_{L_{2,\Gamma}}+\left(A_{12}\vec{\delta},\varsigma\right)_{L_{2,\Gamma}}+\vec{\delta}\cdot A_{21}\varsigma+J_p\left|\vec{\delta}\right|^2+J_f\left|\vec{\delta}\right|^2 \qquad (23)$$

والمؤثر C موجب بالتالي من العلاقتين (20) و (21) نجد أن:

$$\left(C\varsigma,\varsigma\right)_{L_{2,\Gamma}}+\left(A_{12}\vec{\delta},\varsigma\right)_{L_{2,\Gamma}}+\vec{\delta}\cdot A_{21}\varsigma=\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}\left|\nabla\Phi_k\right|^2d\Omega_k+$$

$$+2\delta_1\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}\nabla\psi_k^0\cdot\nabla\Phi_k\,d\Omega_k=\left\|\nabla\Phi\right\|^2_{L_2(\Omega)}+2\delta_1\left(\nabla\psi^{0},\nabla\Phi\right)_{L_2(\Omega)} \qquad (24)$$

بما أن: $\nabla\varphi_k^0=\left(\vec{e}_1\times\vec{r}\ \big|_{\Omega_k}\right)-P_{0k}\left(\vec{e}_1\times\vec{r}\ \big|\Omega_k\right)=\left(I_k-P_{0k}\right)\left(\vec{e}_1\times\vec{r}\ \big|_{\Omega_k}\right),\ \left(k=\overline{1,m+1}\right)$

$$\left(J_f\right)_k := \rho_k \int_{\Omega_k} \left[\left(I_k - P_{0k}\right)\left(\vec{e}_1 \times \vec{r}\right)\right] \cdot \left(\vec{e}_1 \times \vec{r}\right) d\Omega_k = \rho_k \int_{\Omega_k} \left|\left(I_k - P_{0k}\right)\left(\vec{e} \times \vec{r}\right)\right|^2 d\Omega_k \geq 0$$

حيث φ_k^0 , $\left(k=\overline{1,m+1}\right)$ هي جهود جوكوفسكي، P_{0k} مؤثرات الإسقاط على $\vec{J}_0\left(\Omega_k\right)$ ، I_k المؤثر المطابق.

عندئذ:

$$J_f\left|\vec{\delta}\right|^2 = \delta_1 \sum_{k=1}^{m+1} \left(J_f\right)_k = \delta_1^2 \sum_{k=1}^{m+1} \rho_k \int_{\Omega_k} \left|\nabla \varphi_k^0\right|^2 d\Omega_k =$$

$$= \delta_1^2 \left(\left\| P_{0,s} \nabla \varphi^0 \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \left(I - P_{0,s}\right) \nabla \varphi^0 \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right) \tag{25}$$

$$\left(A\xi, \xi\right)_H = \left\| \nabla \Phi + \delta_1 \nabla \psi^0 \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left|\delta_1\right|^2 \left\| \left(I - P_{0,s}\right) \nabla \varphi^0 \right\|^2_{L_2(\Omega)} + J_b \left|\delta_1\right|^2 \geq J_b \left|\delta_1\right|^2 \geq 0 \tag{26}$$

أي أن المؤثر A غير سالب. الآن إذا كان $\left(A\xi,\xi\right)_H = 0$ فإنه من (21) نجد أن $\vec{\delta} = \delta_1 \vec{e}_1 = \vec{0}$ بالتالي من (18) يكون: $\left(A\xi,\xi\right)_H = 0 = \left(C\varsigma,\varsigma\right)_{L_{2,\Gamma}}$ وحيث إن C مؤثر موجب فان $\varsigma = 0$ وعندئذ من المساواة $\left(A\xi,\xi\right)_H = 0$ ينتج أن $\xi = \left(\varsigma, \vec{\delta}\right)^t = 0$ الأمر الذي يعني أن A مؤثر موجب.

تمهيدية(2): المؤثر B المعرف بالعلاقات (17) مترافق ذاتياً ساحته $D\left(B\right) = D\left(B_0\right) \oplus \square$ ، ويكفي ليكون B موجباً أن يتحقق الشرط الآتي:

$$\lambda\left(B_0\right) > \left(m\ell\right)^{-1} g \sum_{j=1}^{m} \left(\Delta\rho\right)_j \beta_j \tag{27}$$

البرهان:

بما أن $B_{22} = mg\ell\vec{\delta}$, $B_{11}\varsigma = B_0\varsigma$ فان $B_{22} = B_{22}^*$, $B_{11} = B_{11}^*$ في $L_{2,\Gamma}$.

ولدينا:

$$B_{21}\varsigma \cdot \vec{\delta} = \left(-g \sum_{j=1}^{m} \left(\Delta\rho\right)_j \int_{\Gamma_j} \left(\vec{e} \times \vec{r}\right) \varsigma_j \, d\Gamma_j \right) \left(\delta_1 \vec{e}_1\right) =$$

$$= g\,\delta_1 \sum_{h=1}^{m} \left(\Delta\rho\right)_j \int_{\Gamma_j} \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1\right) \vec{r} \left(\theta_j \varsigma_j\right) d\Gamma_j = \left(\varsigma, B_{12}\vec{\delta}\right)_{L_{2,\Gamma}}$$

وهذا يعني أن $B_{21} = B_{21}^*$ وبذلك يكون B مترافقاً ذاتياً .

لنتحقق من أن الشرط (27) كافٍ ليكون B مؤثراً موجباً.من أجل $\xi \in D(B)$ يكون:

$$\left(B\xi,\xi\right)_H = \left(B_0\zeta,\zeta\right) + 2g\delta_1 \sum_{j=1}^{m} \left(\Delta\rho\right)_j \int_{\Gamma_j} \left(\vec{e}_1 \times \vec{r} \cdot \vec{e}_3\right) \zeta_j d\Gamma_j + mg\ell\left|\delta_1\right|^2 \geq$$

$$\geq \lambda_{\min}\left(B_0\right) \sum_{j=1}^{m} \left(\Delta\rho\right)_j \int_{\Gamma_j} \left|\zeta_j\right|^2 d\Gamma_j + 2g\delta_1 \sum_{j=1}^{m} \left(\Delta\rho\right)_j \int_{\Gamma_j} x_2 \zeta_j d\Gamma_j + mg\ell\left|\delta_1\right|^2 \tag{28}$$

من أجل أي $\varepsilon > 0$ لدينا:

$$\left|2\delta_1\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\int_{\Gamma_j}x_2\zeta_j d\Gamma_j\right|=\left|2\delta_1\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\int_{\Gamma_j}(\theta_j x_2)\zeta_j d\Gamma_j\right|\le$$

$$\le 2|\delta_1|\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\int_{\Gamma_j}|\theta_j x_2||\zeta_j|d\Gamma_j\le\varepsilon\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\int_{\Gamma_j}|\zeta_j|^2 d\Gamma_j+\varepsilon^{-1}|\delta_1|^2\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\beta_j \qquad (29)$$

حيث $\beta_j:=\int_{\Gamma_j}|\theta_j x_2|^2 d\Gamma_j=\int_{\Gamma_j}(\theta_j x_2)x_2 d\Gamma_j>0$. عندئذ من (28) و(29) نجد أن:

$$(b\xi,\xi)_H\ge(\lambda_{\min}(B_0)-g\varepsilon)\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\int_{\Gamma_j}|\zeta_j|^2 d\Gamma_j+\left(mg\ell-\varepsilon^{-1}g\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\beta_j\right)|\delta_1|^2$$

نختار $\varepsilon>0$ بحيث يكون:

$$c(\varepsilon):=\lambda_{\min}(B_0)-g\varepsilon=mg\ell-\varepsilon^{-1}g\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\beta_j>0$$

من هنا نجد أن $\varepsilon>0$ يتعين بشكل وحيد و $c(\varepsilon)>0$ إذا تحقق الشرط (26). بالتالي:

$$(B\xi,\xi)_H\ge c(\varepsilon)\left[\|\zeta\|^2+|\vec{\delta}|^2\right]>0$$

أي أن المؤثر B موجب.

نظرية (3):

إذا كانت $\xi^0\in D(B)$, $f(t)\in C^2(\mathbb{R}_+,H)$ فان لمسألة كوشي (18) حلاً قوياً وحيداً $\xi(t)$ في فضاء هلبرت H .

البرهان:

استناداً إلى التمهيدية (2) يكون المؤثر $B^{1/2}$ موجوداً، بالتالي يمكن أن نضع:

$$iB^{1/2}\xi=\frac{d\eta}{dt}\ ,\ \eta(0)=0 \qquad (30)$$

ومنه:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}-iB^{1/2}\frac{d\xi}{dt}=0\ ,\ \eta'(0)=iB^{1/2}\xi^0 \qquad (31)$$

عندئذ يمكن كتابة المسألة (18) على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&I\end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-iB^{1/2}\\-iB^{1/2}&0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(t)\\0\end{pmatrix},$$

$$(\xi(0),\eta(0))^t=(\xi^0,0)^t\ ,\ (\xi'(0),\eta'(0))^t=(\xi^1,iB^{1/2}\xi^0)^t \qquad (32)$$

حيث $diag(A,I)$ مؤثر محدود وموجب في $H\oplus H$ (حسب التمهيدية (1))

لنضع: $B := \begin{pmatrix} 0 & -iB^{1/2} \\ -iB^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$ ولنطبق المؤثر $\Lambda := diag\left(A^{-1}, I\right)$ المحدود والموجب على طرفي العلاقة (32) حيث Λ هو المؤثر العكسي للمؤثر $diag\left(A, I\right)$ عندئذ تأخذ المسألة (32) الشكل:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \Lambda B z = \alpha(t)\ ,\ \ z(0) = z^0 \qquad (33)$$

$$z(t) = \left(\xi'(t), \eta'(t)\right)^t \in H \oplus H\ ,\ \ \alpha(t) = \left(A^{-1} f(t), 0\right)^t .$$

بما أن $f(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$ فان $\alpha(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$ وبما أن $iB^{1/2}\xi^0 \in D\left(B^{1/2}\right)$, $\xi^0 \in D(B)$ فان: $z^0 \in D(\Lambda B) = D(B) = D\left(B^{1/2}\right)$ بالتالي يكون للمسألة (33) حل قوي وحيد من الشكل [2]:

$$z(t) = (\xi, \eta)^t = U(t) z^0 + \int_0^t U(t-\tau)\alpha(t)\, d\tau \qquad (34)$$

حيث $U(t) = \exp(-\Lambda \tilde{B})$. من أجل هذا الحل تتحقق المعادلة (33) ويكون $z(t) \in D(B)$ من أجل كل $t \in \mathbb{R}_+$ وتكون جميع حدود المعادلة (33) دوالّ مستمرة بالمتغير t وتتحقق المعادلة (32) وتكون جميع حدودها دوالّ مستمرة بالمتغير t و $\frac{d\eta}{dt} \in D\left(B^{1/2}\right)$.

من المعادلة الثانية في (32) وبعد المكاملة من o إلى t نجد أن العلاقة (30) محققة. وأخيراً لما كانت: $\frac{d^2\eta}{dt^2} \in D\left(B^{1/2}\right)$ و $B^{1/2}\frac{d^2\eta}{dt^2}$ دالة مستمرة بالمتغير t فانه بعد استبدال $\frac{d\eta}{dt}$ بـــ $iB^{1/2}\xi$ في المعادلة الأولى من (32) نجد أن $\xi(t)$ تكون حلاً قوياً وحيداً للمعادلة (18).

الاستنتاجات والتوصيات:

تلعب طريقة الإسقاط على فضاءات جزئية متعامدة في فضاء هلبرت دوراً كبيراً في حل المسائل الهيدروديناميكية، ويتم بواسطة هذه الطريقة تحويل المسألة الحدية الابتدائية المتعلقة بالمسألة الهيدروديناميكية إلى معادلة تفاضلية في فضاء هلبرت. لذلك نوصي باستخدام هذه الطريقة والنتائج الواردة في هذا البحث في حل بعض المسائل الهيدروديناميكية المشابهة وفي حل بعض مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية.

المراجع:

[1] KOPACHEVSKY N.D.; KREIN S.G.;NGO ZUY CAN.*Operatprs Methods in Linear Hydrodynamics*. Nauka,Moscow,1989,159-181.
[2] BABSKII V.G; ZHUKOV M.Y.; KOPACHEVSKY N.D.; MYSHKIS A.D.; SLOBOZHANIN L.A.; TYUPTSOV A.D. *Methods for solving mechanics problems for the conditions of weightlessness*.-K.: NaukovaDumka, 1992, 261-316.
[3] KOPACHEVSKY N.K.; KREIN S.G.*Oerator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics*.Vol.1: Self-adjoint Problems for an Idial Fluids, Birkhauser Verlag,Basel-Boston-Berlin,2001,120 -180.
[4] KOPACHEVSKY N.D.*On stability and instability of small motions of Hydrodynamicalsystems*,Methods of Functional Analysisand Topology, Vol.13,2007,no.2, 152-168.
[5] KOPACHEVSKY N.D.; PIVOVARCHIK V.N.*On sufficient condition of instability of convective motions of a fluid in an open vessel*, Zhurnal Vychislitelnoy Matematiki I matematicheskoyFiziki33 ,1993,no.1,101-118.
[6] BOLGOVA L.D.; KopachevskyN.D.*Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations*/Spectral and Evolutional Problems. Proceedings of the thresh Crimean Autumn Math.School-Symp.- vol.3:SimferopolState University,1995, 90-98.
[7] SOLONNIKOV V.A.*On instability of equilibrium figures of rotating viscous incompressible liquid* ,Zap. Nauchn. Semin. POMI,384,2007,165-208.
[8] SOLONNIKOV V.A.*On the problem of evolution of an isolated liquid mass* Sovr.Math.Fund.Napravl.3 ,2003, 43-62.
[9] KOPACHEVSKY N.D.*On oscillation of a body with a cavity partially filled with heav ideal fluid:theorems of existence,uniqueness and stability of strong solutions*, Zb.prac.Inst.mat.NAN Ukr.,Kyiv,Vol.2,no.1,2005, 158-194.