مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

دراسة المشتقات فوق البيانية في فضاءات منظمة بالنسبة لتبولوجيا سلايس

الدكتور محمد سويقات*

(تاريخ الإيداع 28 / 2 / 2011. قُبِل للنشر في 20 / 6 / 2011)

□ ملخّص □

إن مفهوم المشتقات فوق البيانية، عرفها ودرسها الرياضي روكافولار [18] في فضاءات منتهية البعد مستخدما مفهوم التقارب فوق البيان ثم درسها كومنيتي [11] في فضاءات باناخ انعكاسية باستخدام مفهوم تقارب موسكو فوق البيان. الهدف من هذا البحث هو دراسة بعض هذه النتائج وتعميمها إلى فضاءات خطية منظمة غير منتهية البعد مستخدمين تقارباً جديداً يدعى تقارب سلايس فوق البيان. تسمح هذه النتائج في تحديد الشروط الأمثلية اللازمة والكافية لمسائل الأمثليات المحدبة العامة بالإضافة إلى أنَّها تملك تطبيقات هامة في العديد من النظريات الرياضية.

الكلمات المفتاحية: فوق البيان، أمثليات، تقارب–موسكو، دالة محدبة، المشتق فوق البيان، المشتق المكافئ فوق البيان، تقارب سلايس فوق البيان.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

On Epi-Derivatives of Convex Functions in Norm Spaces with Respect to Epigraphical Slice Convergence.

Dr. Mohamed Soueycatt*

(Received 28 / 2 / 2011. Accepted 20 / 06 /2011)

□ ABSTRACT □

The epi-derivatives introduced and studied by Rockafellarin [18] finite-dimensional spaces in term to epi-convergence, are studied to convex functions in reflexive Banach spaces by cominite [11] in term to Mosco-epi-convergence. The purpose of this paper is to extend these results to general norm spaces, using a stronger convergence notion which is called Epigraphical Slice Convergence. Necessary and sufficient conditions are derived for general convex optimization. Moreover, this type of results has found application in numerous situations.

Keywords: Epigrqhp, optimization, Mosco-convergence, convex function, epi-derivativ, parabolic epi-derivative, Epigraphical Slice Convergence.

* **Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

كان للتحليل المحدب الذي يرتبط بالدرجة الأولى بأسماء كل من الرياضيين روكافولار ومورو الفضل الكبير في ظهور نظريات متعددة لدراسة المشتقات من المرتبة الأولى والثانية وتعميمها لدوال محدبة بطرق المتغيرات التي كان لها الدور الأكثر أهمية في توسيع دراسة مسائل الأمثليات، وتوجد أعمال كثيرة في هذا المجال نذكر منها: $[1,2,13,14]$ وقد درست الحالة غير المحدبة من قبل العديد من الرياضيين سواء كان من الناحية النظرية والتطبيقية، انظر على سبيل المثال $[1,8]$. ونشير هنا إلى أن التقارب البسيط لعب الدور الأساسي في معظم الأعمال السابقة حتى ظهرت حديثاً طريقة جديدة من قبل الرياضي روكافولار لدراسة المشتقات في فضاءات منتهية البعد إذ استبدل التقارب البسيط بمفهوم جديد يدعى التقارب فوق البيان الذي يعتمد على دراسة الدالة $f : X \to \overline{R}$ من خلال خواص فوق بيانها:

$$epi f = \{ (x,\alpha) \in X \times R \mid f(x) \le \alpha \}$$

الذي أدى إلى خلق مفاهيم جديدة في التحليل المحدب مثل التقارب فوق البيان، التفاضل فوق البيان، المشتق فوق البيان، التكامل فوق البيان، المسافة فوق البيان .....الخ واعتمد هذه الطريقة عدد من الرياضيين لدراسة مسائل الأمثليات حتى أصبح يطلق عليه اسم التحليل فوق البياني . وقد كان لمفهوم تقارب–موسكو $[16]$ الذي يتعلق بالتوبولوجيا القوية والضعيفة المعرفتين على الفضاء، دور مهمّ في دراسة المشتقات في فضاءات باناخ الانعكاسية.

في هذه الدراسة سنقوم باستخدام مفهوم جديد ظهر في بداية التسعينات من القرن الماضي يدعى مفهوم سلايس للتقارب $[5,6]$ وذلك لتعميم بعض النتائج المتعلقة بالمشتقات فوق البيانية في فضاءات عامة منظمة، وهو يتطابق مع مفهوم فوق البيان في فضاءات منتهية البعد ويتطابق مع مفهوم موسكو للتقارب في فضاءات باناخ الانعكاسية. إذ نعرف في الفقرة الأولى المشتق فوق البياني من المرتبة الأولى وفق سلايس وندرس بعض خواصه.ونعرف في الفقرة الثانية المشتق فوق البياني من المرتبة الثانية والمشتق المكافئ فوق البياني من المرتبة الثانية وفق سلايس وندرس العلاقة بينهما. أما في الفقرة الثالثة فسندرس المشتقات وفق سلايس للمسالة المركبة (composite problems) من النوع $g \circ F$، حيث g دالة محدبة نصف مستمرة من الأدنى و F تطبيقاً من الصف C^2 وهي من المسائل الهامة والحديثة باعتبارها المفتاح الأساسي لكثير من مسائل الأمثليات والبرمجة الخطية وكانت أولى الدراسات لهذه المسألة في أعمال كل من لوفين$[15]$ ولومير $[14]$ باعتبار كل من g و F تطبيقات مستمرة. ونعطي في الفقرة الأخيرة الشرط اللازم والكافي لمسائل الأمثليات المحدبة.

أهمية البحث وأهدافه:

يرمي البحث إلى دراسة خواص المشتقات من المرتبة الأولى والثانية وفق مفهوم سلايس الجديد وإيجاد العلاقة بين المشتقات فوق البيانية والمشتقات فوق البيانية المكافئة لدوال محدبة في فضاءات خطية منظمة غير منتهية البعد ثم مناقشة المشتقات للمسألة المركبة من النوع $g \circ F$ التي تملك تطبيقات هامة في العديد من النظريات الرياضية وأخيراً يتم إعطاء الشرط اللازم والكافي لمسألة الأمثليات.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد هذه الدراسة على بعض المفاهيم والتعارف الأساسية في التحليل فوق البياني فقد استخدمنا في دراستنا مفهوماً جديداً للتقارب يدعى تقارب سلايس فوق البيان الذي يعطي النتائج أهمية وتطبيقات أوسع في مجالات مختلفة، وقد تبنى هذا المفهوم العديد من الباحثين في أعمال مختلفة $[3,5,6]$.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

نبدأ ببعض التعاريف والمفاهيم التي تستخدم بوصفها عناصر مشتركة بين التحليل المحدب ونظرية الأمثليات ومن أجل تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى $[1,9,12]$.

ليكن $(X,\|.\|)$ فضاءً خطياً منظماً وليكن $(X^*,\|.\|_*)$ فضاءه الثنوي. نرمز لشكل الثنائيّة الخطية بين عناصر الفضائيين X^* و X بالرمز $\langle .,. \rangle$. ولتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

نعرِّف فوق البيان (*epigraph*) للدالة f ويرمز له بـ $epi\ f$ بالعلاقة:

$$epi\ f = \{ (x,\alpha) \in X \times R \mid f(x) \le \alpha \}$$

نقول إن الدالة f محدبة إذا كانت $epi\ f$ مجموعة محدبة في $X \times R$ ونقول إن f مقعرة إذا كانت $(-f)$ محدبة.

نقول إن f دالة مغلقة إذا كانت $epi\ f$ مجموعة مغلقة. وإن f دالة خاصة (proper) إذا كانت $epi\ f$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي $dom\ f \ne \phi$ حيث:

$$dom\ f = \{ x \in X \mid f(x) < +\infty \}$$

نعرِّف الدالة المرافقة $f^* : X^* \to \overline{R}$ للدالة f بالعلاقة:

$$f^*(x^*) = \sup\{ \langle x, x^* \rangle - f(x);\ x \in X \} \qquad (1)$$

الدالة f^* محدبة سواء أكانت f محدبة أم ليست محدبة.

نعرِّف تحت التفاضل ∂f للدالة f (*subdifferential* f) في نقطة $x_0 \in dom\ f$ وفق مفهوم التحليل المحدب كالآتي:

$$\partial f(x_0) = \{ x^* \in X^* \mid f(x) \ge f(x_0) + \langle x - x_o, x^* \rangle;\ \forall x \in X \}$$
$$= \{ x^* \in X^* \mid f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle \ ;\ \forall x \in X \} \qquad (2)$$

تكون هذه المجموعة محدبة (مغلقة) إذا كانت الدالة f محدبة (مغلقة).

نرمز بـ $\Gamma(X)$ لمجموعة الدوال المحدبة، نصف المستمرة من الأدنى والخاصة المعرفة من X إلى $\overline{R}$.

ونرمز بـ $C(X)$ لكل المجموعات الجزئية غير الخالية المحدبة والمغلقة في X.

ونرمز بـ $CB(X)$ لكل المجموعات الجزئية غير الخالية المحدبة والمغلقة المحدودة في X.

نعرف الدالة (Gap function) $D(A,C)$ بين المجموعتين A,C من $C(X)$ بالعلاقة :

$$D(A,C) = \inf\{ \|a - c\| : a \in A \ and\ c \in C \} \qquad (3)$$

وتعرف توبولوجيا وايزمن (The Wijsman topologe) على $C(X)$ (انظر $[20]$) بأنها التبولوجيا المولدة بعائلة الدوال $\{ d(x,.) : x \in X \}$ حيث : $d(x,A) = \inf\{ \|x - a\| : a \in A \}$. نشير أيضاً إلى أن دالة

المسافة تكتب أيضاً بالشكل: $d\left(x,.\right)=D\left(\left\{x\right\},.\right)$.

في هذا البحث نعرف على *C(X)* التبولوجيا المولدة بالعائلة $\left\{D\left(B,.\right):B\in CB(X)\right\}$ وتدعى تبولوجيا سلايس τ_s (انظر [5]).

تقارب المجموعات وفق سلايس، تقارب المجموعات وفق موسكو:

لتكن $\left\{A_n, A; n\in N\right\}$متتالية مجموعات من $C(X)$ نقول أن A_n تتقارب من A وفق سلايس فقط إذا كان: $D\left(A, B\right) = \lim_n D\left(A_n, B\right)$

وذلك من أجل كل مجموعة B مغلقة محدبة ومحدودة في X.

ونقول إن A_n تتقارب من A وفق موسكو فقط إذا كان:

$$D\left(A, K\right) = \lim_n D\left(A_n, K\right)$$

وذلك من أجل كل مجموعة K متراصة بضعف ومحدبة في X.

تقارب الدوال وفق سلايس، تقارب الدوال وفق موسكو: [5]

لتكن $\{f_n, f, n\in \mathbb{N}\}$ من $\Gamma(X)$، سنقول أن (f_n) تتقارب وفق سلايس فوق البيان نحو f إذا كانت متتالية المجموعات $(epif_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب وفق سلايس نحو *epif* ويرمز لهذا بالرمز $f=\tau_s-\lim_n f_n$ أو $f_n \xrightarrow{\tau_s} f$.

وقد تم البرهان من قبل بيير $\left[Beer,6\right]$ بأن هذا التعريف يكافئ تحقق الشرطين الآتيين:

(S₁) من أجل كل $(y,\eta)\in epif^*$ مع $\eta>f^*(y)$ ومن أجل كل متتالية محدودة $(x_n)_{n\in N}$ يوجد $n_0\in\mathbb{N}$، بحيث يكون من أجل كل $n>n_0$ فإن $f_n(x_n)>\left\langle x_n, y\right\rangle-\eta$.

(S₂) من أجل كل $x\in X$ توجد متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بقوة نحو x بحيث يكون $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

<u>بطريقة مشابهة</u> يتم تعريف تقارب المتتالية $\left\{f_n^*, f^*, n\in N\right\}$ من $\Gamma(X^*)$ ونقول إن (f_n^*) تتقارب وفق سلايس فوق البيان إذا كانت متتالية المجموعات $(epif_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب وفق سلايس نحو $epif^*$ ويرمز لهذا بالرمز:

$f^*=\tau_s^*-\lim f_n^*$.

مبرهنة *[Beer, 6]*:

لتكن $\{f_n^*, f^*, n\in\mathbb{N}\}$ متتالية الدوال من $\Gamma(X^*)$ المرافقة للمتتالية $\{f_n, f, n\in\mathbb{N}\}$ من $\Gamma(X)$عندئذٍ لدينا التكافؤ الآتي: $f=\tau_s-\lim_n f_n \Leftrightarrow f^*=\tau_s^*-\lim_n f_n^*$.

ملاحظة (1): نعلم أنه في فضاء منظم كل مجموعة مغلقة ومحدودة هي مجموعة متراصة بضعف والعكس يكون صحيحاً إذا كان الفضاء انعكاسيا لذلك فإن تقارب سلايس يتطابق مع تقارب موسكو في فضاء انعكاسي.

ملاحظة (2): عندما يتم العمل مع أسرة من الدوال $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ التابعة للدليل $t>0$، فإن تقارب سلايس فوق البيان للدوال φ_t نحو φ لما $t\downarrow 0$ تعرف بطريقة طبيعية وذلك بالقول إن $\varphi_{t_n}\xrightarrow{\tau_s}\varphi$ من أجل كل متتالية $t_n\downarrow 0$ أي أن: $\varphi=\tau_s-\lim_{n\to\infty}\varphi_{t_n}$

وتأخذ العلاقتين $(S_1), (S_2)$ الشكل:

(S_{t1}) من أجل $(y,\eta)\in epi\,\varphi^*$ مع $\eta>\varphi^*(y)$ ومن أجل كل متتالية محدودة (x_n) يوجد $n_0\in\mathbb{N}$، بحيث يكون لكل $n>n_0$ فإن $\varphi_{t_n}(x_n)>\langle x_n,y\rangle-\eta$.

(S_{t2}) من أجل كل $x\in X$ توجد متتالية متقاربة بقوة نحو x، بحيث يكون $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{t_n}(x_n)$.

ملاحظة (3): إذا كانت $\{f_n,f,n\in\mathbb{N}\}$ متتالية من $\Gamma(x)$ بحيث $f_n\xrightarrow{\tau_s}f$ فإن $\lambda f_n\xrightarrow{\tau_s}\lambda f\quad;\ \forall\ \lambda>0$.

النتائج والمناقشة:

1- المشتقات فوق البيانية من المرتبة الأولى وفق سلايس.

سنقوم باستخدام مفهوم تقارب سلايس فوق البيان لتعريف المشتقات فوق البيانية من المرتبة الأولى والثانية في فضاءات خطية منظمة بطريقة مشابهة لما قام به روكافولا [18] باستخدام التقارب فوق البيان في فضاءات منتهية البعد ولما قام به كومنيتي [11] باستخدام تقارب موسكو فوق البيان في فضاءات انعكاسية. وسنعتبر X فضاءً خطياً منظماً و f دالة معطاة من $\Gamma(X)$ ذات قيمة محدودة في النقطة x من X.

تعريف 1.1:

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق من المرتبة الأولى في x وفق سلايس إذا كانت نسب الدوال التفاضلية

$$(\Delta_t f)_x(\xi)=\frac{1}{t}\{f(x+t\xi)-f(x)\};\ \xi\in X.\quad (t>0)\qquad (4)$$

تتقارب وفق سلايس عندما $(t\downarrow 0)$ من دالة $\varphi\in\Gamma(X)$. تدعى الدالة φ مشتق سلايس فوق البيان من المرتبة الأولى للدالة f في x. وسنكتب f_x' بدلاً من φ. أي أن $f_x'=\tau_s-\lim_{t\downarrow 0}(\Delta_t f)_x$.

وبدلالة المتتاليات والملاحظة (2) نكتب:

$$f_x'=\tau_s-\lim_{n\to+\infty}\left(\Delta_{t_n}f\right)_x\ ,\ \forall\ t_n\downarrow 0\qquad (5)$$

ملاحظة 1.2: لدينا العلاقة الآتية صحيحة:

$$epi\,(\Delta_t f)_x=\frac{\left[(epi\,(f))-(x,f(x))\right]}{t}$$

لذلك يكون f قابلاً للاشتقاق وفق سلايس في x فقط إذا تقاربت متتالية المجموعات $epi\,(\Delta_t f)_x$ من $epi\,(f_x')$ مع:

$$epi\,(f_x')=\tau_s-\lim_n\frac{1}{t}\left[(epi\,(f))-(x,f(x))\right]\qquad (6)$$

مبرهنة 1.3:

لتكن $\{f_n,f,n\in\mathbb{N}\}$ متتالية من $\Gamma(X)$ ولنفترض أن (f_n) متقارب وفق سلايس من f، عندئذ من أجل كل متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ فإن: $f(\xi)\le\liminf\limits_n f_n(\xi_n)$.

البرهان:

لتكن (ξ_n) متتالية من نقاط X متقاربة من ξ عندئذ فإن (ξ_n)محدودة، ولتكن: $(y,n)\in epif^{*}$ مع $f^{*}(y)<\eta$ عندئذ بحسب تعريف الدالة المرافقة فإن : $f(x)>\langle y,x\rangle-\eta$ وذلك من أجل كل x من $domf$. الآن و بحسب الشرط الأول من تقارب سلايس فإنه يوجد $n\in N$، بحيث إنه مهما يكن $n>n_0$ فإن:

$$f_n(\xi_n)>\langle \xi_n,y\rangle-\eta$$

وبما أن $f\in\Gamma(X)$ فإن f هي الغلاف العلوي لجميع الدوال الملساء المستمرة والتي تحد f من الأدنى لذلك فإن: $f(\xi_n)\le f_n(\xi_n)$ وذلك من أجل كل $n>n_0$، الأمر الذي ينتج منه أن: $f(\xi)\le \liminf_n f(\xi_n)\le \liminf_n f_n(\xi_n)$ وذلك اعتماداً على كون f نصف مستمر من الأدنى، وهو المطلوب ■.

مبرهنة 1.4:

لنفرض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من X، عندئذ إذا كانت $z\in\partial f(x)$ فإن:

$$f_x'(\xi)\ge\langle z,\xi\rangle\ ;\ \forall\,\xi\in X$$

البرهان:

بما أن $z\in\partial f(x)$ فإن: $f(x+t\xi)\ge f(x)+t\langle z,\xi\rangle$ ومنه:

$$\frac{f(x+t\xi)-f(x)}{t}\ge\langle z,\xi\rangle$$

أي أن

$$(\Delta_t f)_x(\xi)\ge\langle z,\xi\rangle \qquad (7)$$

ونتيجة" لتقارب $(\Delta_{t_n}f)_x$ وفق سلايس من $f_x'(\xi)$ فإنه بحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس يوجد من أجل كل $\xi\in X$ متتالية (ξ_n) من نقاط X متقاربة من ξ وكون $<z,.>$ دالة مستمرة فإن:

$$f_x'(\xi)=\lim_n(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n)\ge\lim_n\langle z,\xi_n\rangle=\langle z,\xi\rangle \qquad (8)$$

ومنه نحصل على $f_x'(\xi)\ge\langle z,\xi\rangle$ وهو المطلوب ■.

2- المشتقات فوق البيانية من المرتبة الثانية وفق سلايس.

سنناقش قابلية الاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس لمفهومين أساسيين مرتبطين باختيار نسب الدوال التفاضلية من المرتبة الثانية و العلاقة بينهما. ونبدأ بالمفهوم الأول الذي يعود إلى روكافولار [18,17].

تعريف2.1:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x ولتكن $z\in\partial f(x)$ نقول إن f قابل للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z إذا كانت نسب الدوال التفاضلية من المرتبة الثانية:

$$(\Delta_t^2 f)_{x,z}(\xi)=\frac{f(x+t\xi)-f(x)-t\langle z,\xi\rangle}{t^2/2} \qquad (9)$$

تتقارب وفق سلايس عندما $\left(t \downarrow 0\right)$ من دالة $\varphi \in \Gamma(x)$. تدعى الدالة φ مشتق سلايس فوق البيان من المرتبة الثانية للدالة f في x بالنسبة إلى z ونكتب $f''_{x,z}$ بدلاً من φ أي أن:

$$f''_{x,z} = \tau_s - \lim_{t \downarrow 0} (\Delta_t^2 f)_{x,z}$$

وبدلالة المتتاليات نكتب: $.f''_{x,z} = \tau_s - \lim_{n \to +\infty} \left(\Delta_{t_n}^2 f\right)_{x,z} \ , \ \forall \ t_n \downarrow 0$

ومن الواضح أنه إذا كانت f من $\Gamma(x)$ فإن الدوال $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ من $\Gamma(x)$ أيضاً.

المبرهنة الآتية تعطي بعض الخواص الأخرى للدالة $f''_{x,z}$.

مبرهنة 2.2: تحت معطيات التعريف السابق لدينا:

(a) $f''_{x,z}$ متجانسة إيجابياً من المرتبة الثانية أي أن :

$$f''_{x,z}(\lambda\zeta) = \lambda^2 f''_{x,z}(\zeta), \ \forall \lambda > 0 \ ; \ \forall \xi \in X$$

(b) $f''_{x,z}(0) = 0$.

(c) $f''_{x,z}(\xi) \geq 0$ لكل ξ من X.

(d) العنصر صفر نقطة صغرى للدالة $f''_{x,z}$ أي أن $0 \in \partial f''_{x,z}(0)$.

البرهان:

برهان (a): من العلاقة $\forall t > 0$; $(\Delta_t^2 f)_{x,z}(\lambda\xi) = \dfrac{f(x + t\lambda\xi) - f(x) - t\langle z, \lambda\xi\rangle}{t^2/2}$

وبفرض أن $\eta = \lambda\xi$ نجد أن:

$$(\Delta_t^2 f)_{x,z}(\lambda\xi) = \frac{\lambda^2}{\eta^2}\{f(x + \eta\xi) - f(x) - \eta\langle z, \xi\rangle\} = \lambda^2 \left(\Delta_\eta^2\right)_{X,z}(\xi)$$

وبحسب الملاحظة (3) نجد أن:

$$\lambda^2 f''_{x,z}(\xi) = \tau_s - \lim_n \left(\lambda^2 \Delta_{\eta_n}^2 f)_{x,z}(\xi)\right) = \tau_s - \lim_n \left(\Delta_{\eta_n}^2 f)_{x,z}(\lambda\xi)\right) = f''_{x,z}(\lambda\xi)$$

من أجل برهان (b): نطبق المبرهنة 1.3 بأخذ $\left(\xi_n\right) = 0$ ونحصل:

$$f''_{x,z}(0) \leq \liminf_n \left(\Delta_{t_n}^2 f)_{x,z}(0)\right) = 0$$

أي أن $f''_{x,z}$ محدودة من الأعلى وهي محدودة من الأدنى لأنها دالة خاصة. وبما أن $f''_{x,z}$ متجانسة إيجابياً من المرتبة الثانية حسب (a) فإن $f''_{x,z}(0) = f''_{x,z}(\lambda.0) = \lambda^2 f''_{x,z}(0)$ الأمر الذي يعني أن $f''_{x,z}(0) = 0$. أما الجزء (d) فينتج من كون أن $(\Delta_t^2 f)_{x,z} \geq 0$ وبحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس فإنه من أجل كل ξ من X توجد متتالية $\left(\xi_n\right)$ من نقاط X بحيث يكون: $f''_{x,z}(\xi) = \lim_n (\Delta_{t_n}^2 f)_{x,z}\left(\xi_n\right) \geq 0$ ومنه نحصل على $f''_{x,z}(\xi) \geq 0$. والجزء (d) ينتج مباشرة من (b) ومن العلاقة $f''_{x,z}(\xi) \geq f''_{x,z}(0) + \langle 0, \xi - 0\rangle$ وبالتالي $0 \in \partial f''_{x,z}(0)$. وهو المطلوب ■.

مبرهنة 2.3:

ليكن X فضاءً منظماً ما ، وليكن $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ حيث $f \in \Gamma(X)$ ولنفرض أنَّ f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z حيث $z \in \partial f(x)$ ولنفرض أن $f''_{x,z}(\xi) < +\infty$ من أجل إحدى النقاط $\xi \in X$ عندئذٍ : $\quad (10) \quad f'_x(\xi) = \langle z, \xi \rangle$.

البرهان:

بما أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z فإنَّ $(\Delta_t f)_{x,z}$ متقاربة وفق سلايس من $f''_{x,z}$ وبحسب الشرط الثاني (s_2) فإنَّه من أجل كل $\xi \in X$ توجد متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ بحيث إنَّ:

$$f''_{x,z}(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x + t_n \xi_n) - f(x) - t_n \langle z, \xi_n \rangle}{\frac{1}{2} t_n^2} < +\infty$$

ومنه :

$$\lim_n \left[\frac{f(x + t_n \xi_n) - f(x)}{t_n} - \langle z, \xi_n \rangle \right] = 0$$

بالتالي ينتج أنَّ

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{f(x + t_n \xi_n) - f(x)}{t_n} \right] = \langle z, \xi \rangle$$

وبما أنَّ f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى فإنَّه من أجل (ξ_n) المتتالية السابقة المتقاربة من ξ وبحسب المبرهنة 1.3 نحصل على:

$$f'_x(\xi) \le \liminf_n (\Delta_{t_n} f)_x (\xi_n) = \lim_n (\Delta_{t_n} f)_x (\xi_n) = \langle z, \xi \rangle$$

أي أنَّ:

$$f'_x(\xi) \le \langle z, \xi \rangle \qquad (11)$$

من جهةٍ أخرى، بما أن $z \in \partial f(x)$ فإنه بحسب المبرهنة 1.4 يكون لدينا العلاقة الأخرى الآتية:

$$f'_x(\xi) \ge \langle z, \xi \rangle \qquad (12)$$

من (11) و (12) نحصل على $f'_x(\xi) = \langle z, \xi \rangle$.

نتيجة 2.4:

إذا كان $f''_{x,z}(\xi) < +\infty$ من أجل أي نقطة $\xi \in X$ فإن $f'_x(\xi) = \langle z, \xi \rangle$.

ملاحظة 2.5:

إذا كان $\langle z, \xi \rangle < f'_x(\xi)$ من أجل إحدى النقاط ξ من X فإنَّه من أجل كل متتالية (ξ_n) من نقاط X متقاربة من ξ سيكون $f'_x(\xi) \le \liminf_n (\Delta_{t_n} f)_x (\xi_n)$. وهذا بدوره يؤدي إلى أن:

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ t_n\to 0}}\left[\frac{f\left(x+t_n\xi\right)-f\left(x\right)}{t_n}-\left\langle z,\xi_n\right\rangle\right]>0$$

الأمر الذي يعني أنَّ: $f''_{x,z}\left(\xi\right)=+\infty$ وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$f''_{x,z}=\begin{cases}\tau_s-\lim\limits_{t\downarrow 0}\left[\dfrac{f\left(x+t\xi\right)-f\left(x\right)-tf'_x\left(\xi\right)}{\frac{1}{2}t^2}\right] & if\ \left\langle z,\xi\right\rangle=f'_x\left(\xi\right)\\ +\infty & if\ \left\langle z,\xi\right\rangle<f'_x\left(\xi\right)\end{cases}$$

أما المفهوم الثاني المتعلق بالتفاضل من المرتبة الثانية يعود إلى بن–تان وزاوو **[7]** ويعرف بالطريقة الآتية:

تعريف 2.6:

لتكن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الأولى وفق سلايس في x وليكن $v\in dom(f'_x)$. إذا كانت نسب الدوال التفاضلية من المرتبة الثانية:

$$\left(D_t^v f\right)_x(\xi)=\frac{f(x+tv+\frac{1}{2}t^2\xi)-f(x)-tf'_x(v)}{t^2/2} \qquad (13)$$

تتقارب وفق سلايس عندما $\left(t\downarrow 0\right)$ من دالة $\varphi\in\Gamma(X)$ فإن الدالة φ تدعى سلايس–المشتق المكافئ من المرتبة الثانية للدالة f في x بالاتجاه v ، (parabolic slice-derivative). ونكتب $d^2f(x;v,.)$ بدلاً من φ أي أن: $d^2f(x,v,.)=\tau_s-\lim\limits_{t\downarrow 0}(D_t^v f)_x$

وبدلالة المتتاليات نكتب: $d^2f(x,v,.)=\tau_s-\lim\limits_{n}(D_{t_n}^v f)_x\ ;\ \forall t_n\downarrow 0$.

مبرهنة 2.7:

ليكن X فضاء باناخ غير انعكاسي ولتكن $v\in dom(f'_x)$ ولنفرض أنه من أجل كل $z\in\partial f\left(x\right)_v=\{z\in\partial f\left(x\right):\left\langle z,v\right\rangle=f'_x(v)\}$ يكون $f''_{x,z}$ موجوداً ويحقق أن:

$$f''_{x,z}(v)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)-t\left\langle z,v\right\rangle}{\frac{1}{2}t^2}<+\infty$$

عندئذٍ $d^2f\left(x;v,.\right)$ يكون موجوداً ويعطى بالعلاقة:

$$d^2f(x,v,w)=\sup_{z\in\partial f\left(x\right)_v}\{f''_{x,z}(v)+\left\langle z,w\right\rangle\}$$

البرهان:

يتم البرهان بشكل مشابه تماماً للبرهان الذي أورده كومنيتي في [11] باعتبار أن كل كرة مغلقة في X^* تكون متراصة بضعف وبالتالي إن شرطي تقارب سلايس يكافئان شرطي تقارب موسكو في الفضاء X^*. ■

مبرهنة 2.8:

ليكن X فضاءً منتهي البعد ولتكن $v \in dom(f_x')$ ولنفرض أنه من أجل $z \in \partial f(x)$ يكون $f''_{x,z}$ موجوداً ويتحقق الشرط: $v \in \text{int}(dom(f''_{x,z}))$

عندئذٍ $d^2 f(x;v,.)$ يكون موجوداً ويعطى بالعلاقة:

$$d^2 f(x;v,w) = f''_{x,z}(v) + \langle z,w \rangle$$

البرهان:

بما أن مفهوم التقارب وفق سلايس يتطابق مع مفهوم التقارب وفق فوق البيان في فضاءات منتهية البعد فإن برهان هذه النتيجة يتم بطريقة مشابهة لما قام به روكافولار في [18] ■.

3− المشتقات فوق البيانية وفق سلايس لدوال محدبة مركبة:

سندرس في هذه الفقرة الخواص التفاضلية وفق مفهوم سلايس لدوال من النوع $f = g \circ F$ حيث g دالة محدبة ليبشتزية و F تطبيقاً من الصف C^2 ونقوم بتعميم النتائج التي حصل عليها روكافولار [18] في فضاءات منتهية البعد.

لنعتبر المسألة التالية: $\min\{g(x)\,;\, x \in C = dom\; g\}$

إن هذه المسألة يمكن أن تأخذ الشكل: $\min\{(g+\delta_C)(x)\,;\, x \in X\}$

ومن المعروف في التحليل المحدب، أنه إذا كانت C مجموعة محدبة فإن الدالة المميزة لها δ_C [حيث $\delta_C(x) = 0$ إذا كانت $x \in C$ و $\delta_C(x) = +\infty$ إذا كانت $x \notin C$] تكون محدبة، وبالتالي فإن $g + \delta_c$ دالة محدبة و ليبشتزية أيضاً.

أكثر عمومية، المسألة السابقة تأخذ الشكل: $\min\{(g \circ F)(x)\,;\, x \in X\}$

ويكون للدالة $g \circ F$ الدور الكبير في حل الكثير من مسائل الأمثليات والخوارزميات العددية. من الآن وصاعداً سنعتبر $E\ X$, فضاءين منظمين.

مبرهنة 3.1:

ليكن $F : X \to E$ قابلا للاشتقاق وفق فريشة في نقطة x من X وليكن $g \in \Gamma(E)$ ولنفرض أنه يوجد مجاورة U للنقطة $F(x)$ محتواة في $dom(g)$ وأن g دالة ليبشتزية (l الثابتة المتعلقة به) على U. لنفرض أن الدالة g قابلة للاشتقاق وفق سلايس في النقطة $u = F(x)$ عندئذ $f = g \circ F$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x

مع: $.(g \circ F)'_x(\xi) \;=\; f'_x(\xi) \;=\; g'_u(DF(x)(\xi))$

البرهان:

بداية نلاحظ أن:

$$(\Delta_t f)_x(\xi) = \{g\left(F(x+t\xi)\right) - g\left(F(x)\right)\}/t$$
$$= \{g(u+tw_t) - g(u)\}/t$$
$$= (\Delta_t g)_u(w_t) \qquad (14)$$

حيث أن: $w_t(\xi) = \dfrac{F(x+t\xi)-F(x)}{t}$

من الواضح انه من أجل أي $\xi \in X$ يكون: $w_t(\xi) \xrightarrow[t\to 0]{} DF(x)(\xi)$

لتكن (ξ_n) متتالية محدودة من X عندئذٍ:

$$w_t(\xi_n) = \frac{F(x+t\xi_n)-F(x)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} DF(x)(\xi_n)$$

وبالتالي ونتيجة لقابلية g للاشتقاق وفق سلايس في $u = F\left(x\right)$ فإن:

$$g'_u(DF(x)(\xi_n)) \le \liminf_{m\to\infty} ((\Delta_{t_m} g)_u(w_n)) \le ((\Delta_{t_m} g)_u(w_n), \forall t_m > 0$$

وذلك مع مراعاة أن $(\Delta_t g)_u$متناقصة عندما $t \to 0$.

الآن ليكن $z \in X^*$ و η عددين حقيقيين ما يحققان أن $g'_u(DF(x)(\xi_n)) > \langle z, \xi_n \rangle - \eta$ ، عندئذٍ فإن:

$$(\Delta_t g)_u(w_n) = (\Delta_t f)_x(\xi_n) > \langle z, \xi_n \rangle - \eta$$

والشرط الأول من تقارب سلايس محقق. ولنبرهن الآن تحقق الشرط الثاني.

لتكن $\xi \in X$ نقطة كيفية ولتكن (ξ_n)متتالية من نقاط X متقاربة من ξ، بما أن g قابلة للاشتقاق وفق سلايس في النقطة $u = F(x)$ فإنه توجد متتالية (w'_n) من نقاط E متقاربة من $w = DF(x)\xi$ بحيث إن:

$$g'_x(w) = \lim_n \left(\Delta_{t_n} g\right)_u (w'_n)$$

لنفرض أن: $w_n = \{F(x+t_n\xi_n) - F(x)\}/t_n$

عندئذ $\lim_n w_n = \lim_n DF(x)(\xi_n) = DF(x)(\xi)$

بحسب الفرض بأنه توجد مجاورة U للنقطة $F(x)$ محتواة في $dom(g)$ يضمن بأنه من أجل t_n صغيرة بشكل كاف فإن: $g(u+t_n w'_n) < +\infty$, $g(u+t_n w_n) < +\infty$ وبما أن g ليبشتزية في مجاورة للنقطة u فإنه من أجل t_n صغيرة بشكل كاف فإن كلاً من $u+t_n w_n$, $u+t_n w'_n$ تنتمي إلى هذه المجاورة وعليه يكون:

$$\left|g(u+t_n w_n) - g(u+t_n w'_n)\right| \le t_n \ell \|w_n - w'_n\| \qquad (15)$$

ومنه بحسب العلاقة (14) لدينا:

$$(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) = (\Delta_{t_n} g)_u(w_n) - (\Delta_{t_n} g)_u(w'_n) + (\Delta_{t_n} g)_u(w'_n)$$
$$= \frac{g(u+t_n w_n) - g(u)}{t_n} - \frac{g(u+t_n w'_n) - g(u)}{t_n} + (\Delta_{t_n} g)_u(w'_n)$$
$$= \frac{g(u+t_n w_n) - g(u+t_n w'_n)}{t_n} + (\Delta_{t_n} g)_u(w'_n)$$
$$\le \ell \|w_n - w'_n\| + (\Delta_{t_n} g)_u(w'_n)$$

الآن بأخذ نهاية طرفي المتراجحة عندما $n \to \infty$ نحصل على:

$$\lim_n \sup(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) \le 0 + \lim_n(\Delta_{t_n} g)_u(w'_n)$$
$$\lim_n \sup(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) \le \lim_n(\Delta_{t_n} g)_u(w'_n) = g'_x(DF(x)\xi) \qquad (16)$$

ومن جهة أخرى فإن:

$$g'_x(DF(x)\xi) \le \liminf_n(\Delta_{t_n} g)_u(w_n) = \liminf_n(\Delta_{t_n} f)_u(\xi_n) \qquad (17)$$

من (16) و (17) نجد أنه من أجل أي ξ يوجد (ξ_n) من نقاط Eمتقاربة من ξ بحيث إن:

$$g'_x(DF(x)\xi) = \lim_n(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n)$$

الأمر الذي يعني أن f قابل للاشتقاق وفق سلايس في x وان $f'_x(\xi) = g'_u(DF(x)(\xi))$ وهو المطلوب ■.

مبرهنة 3.2:

ليكن $F : X \to E$ تطبيقاً من الصف C^2 وليكن $\Gamma(E) \ni g : E \to R \cup \{+\infty\}$ ، ولنفرض أنه يوجد مجاورة U للنقطة$F(x)$محتواة في $dom(g)$ ولنفرض أن g ليبشتزية (ℓ الثانية المتعلقة به) على هذه المجاورة.
لنفترض أن g قابلة للاشتقاق وفق سلايس في $u = F(x)$ مع $g'_u(DF(x)\xi) < \infty$ من أجل أحد النقاط $\xi \in E$، ولنفترض أن g قابلة للاشتقاق المكافئ وفق سلايس في $u = F(x)$ بالاتجاه$DF(x)\xi$ عندئذٍ $f = g \circ F$ قابلة للاشتقاق المكافئ وفق سلايس في x بالاتجاه ξ مع:

$$d^2 f(x,\xi,k) = d^2 g(u, DF(x)\xi, DF(x)k + D^2F(x)(\xi)\xi)$$

وذلك مهما يكن $k \in X$

البرهان:

لنضع

$$v = DF(x)\xi \quad ; \quad w = DF(x)k + D^2F(x)(\xi)\xi \quad ; \quad \varphi(k) = d^2 f(x,\xi,k)$$

$$w_t(k) = \frac{F(x + t\xi + \frac{1}{2}t^2 k) - F(x) - tDF(x)\xi}{\frac{1}{2}t^2}$$

بما أن F تطبيق من الصف C^2 فإن $w_t \xrightarrow[t]{} w$

من جهة أخرى وبحسب المبرهنة 3.1 فإن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x مع $f'_x = g'_u DF(x)$ ومنه:

$$(D_t^\xi f)(k) = \{g(F(x + t\xi + \frac{1}{2}t^2 k) - g(F(x)) - tg'_u(DF(x)\xi)\} / \frac{1}{2}t^2$$
$$= \{g(u + tv + \frac{1}{2}t^2 w_t) - g(u) - tg'_u(DF(x)\xi)\} / \frac{1}{2}t^2$$
$$= (D_t^v g)(w_t)$$

لنبرهن الآن أن $(D_t^\xi F)(k)$ تتقارب وفق سلايس من $\varphi(k)$.

لنفترض أن $(y,\eta) \in epi(\varphi^*)$ مع $\varphi^*(y) < \eta$ ومنه بحسب تعريف الدالة المرافقة نستطيع أن نكتب:

$$\langle y, k \rangle - \eta > \varphi(k) \ ; \ \forall k \in X \qquad (19)$$

الآن لتكن $\left(k_n\right)$ متتالية محدودة من نقاط X عندئذٍ ونتيجةً لكون g قابلة للاشتقاق المكافئ وفق سلايس فإن:

$$\varphi\left(k_n\right) \le \liminf_m \left(D_{t_m}^{v} g\right)\left(w_{t_m}\left(k_n\right)\right) = \liminf_m \left(D_{t_m}^{\xi} f\right)\left(k_n\right) \qquad (20)$$

من العلاقة (19) نجد أن: $\left(D_{t_m}^{\xi} f\right)\left(k_n\right) > \left\langle y, k_n\right\rangle - \eta$ وذلك من أجل n كبيرة بشكل كافٍ.

والشرط الأول (S1) من تقارب سلايس محقق. ولنتحقق من الشرط الثاني:

لتكن $k \in X$ كيفية ولتكن (k_n) متقاربة من k عندئذٍ:

$$w_{t_n}(k_n) = \frac{F(x + t_n\xi + \frac{1}{2}t_n^2 k_n) - F(x) - tDF(x)\xi}{\frac{1}{2}t_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} w$$

ونتيجة لكون $d^2(g(u,v,.)$ موجوداً فإنه توجد w'_n متتالية من نقاط E متقاربة من w بحيث إن:

$$\varphi(w) \;=\; \lim_n (D_{t_n}^{v} g)(w'_n) .$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned}(D_{t_n}^{\xi} f)(k_n) &= (D_{t_n}^{v} g)(w_n) = (D_{t_n}^{v} g)(w_n) - (D_{t_n}^{v} g)(w'_n) + (D_{t_n}^{v} g)(w'_n) \\ &\le \frac{\frac{1}{2}t_n^2 \ell . \left\| w'_n - w_n \right\|}{\frac{1}{2}t_n^2} + (D_t^{v} g)(w'_n)\end{aligned}$$

وبجعل $n \longrightarrow +\infty$ نحصل على:

$$\limsup_n (D_{t_n}^{\xi} f)(k_n) \;\le\; \varphi(k) \qquad (21)$$

من العلاقة $\left(20\right)$ يمكننا أن نكتب:

$$\varphi(k) \;\le\; \liminf_n (D_{t_n}^{\xi} f)(k_n) \qquad (22)$$

ومن العلاقتين (21) و (22) نحصل على: $\varphi(k) \;=\; \lim_n (D_{t_n}^{\xi} f)(k_n)$

وبهذا يتحقق الشرط(S2) وهو المطلوب ■.

مبرهنة 3.3:

ليكن E فضاءً منتهي البعد، X فضاءً منظماً كيفياً، وليكن $F: X \to E$ من الصف C^2 و $g \in \Gamma(E)$.

بفرض g قابل للاشتقاق وفق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية في $F\left(x\right)$ بالنسبة إلى $y \in \partial g(F(x))$. ولنفرض أنه يوجد مجاورة U للنقطة $F(x)$محتواة في $dom(g)$ وأن g ليبسشتزية على U، حيث: $DF\left(x\right)\xi \in dom(g'_u)$ و $DF\left(x\right)\xi \in \text{int}(dom(g''_{u,y}))$من أجل كل $\xi \in X$.عندئذٍ $f = g \circ F$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية في x بالنسبة إلى $z = y \circ DF\left(x\right)$ مع:

$$f''_{x,z}\left(\xi\right) = \begin{cases} g''_{u,y}\left(DF\left(x\right)\xi\right) + \left\langle y, D^2F\left(x\right)\xi\right\rangle & ; \quad \left\langle z, \xi\right\rangle = f'_x\left(\xi\right) \\ +\infty & ; \quad otherwise \end{cases} \qquad (23)$$

البرهان:

من الواضح بدايةً أن $z\in\partial f\,(x)$ وبحسب المبرهنة 1.3 تكون f قابلة للاشتقاق من المرتبة الأولى في x وبحسب الفرض وتطبيق المبرهنة 1.4 نحصل على: $\langle z\,,\,\xi\rangle \;\le\; f'_x(\xi)$.

لنناقش حالتين:

1) الحالة الأولى: نفرض أن $\langle z\,,\xi\rangle < f'_x(\xi)$ عندئذ بحسب الملاحظة 2.5 يكون لدينا:

$$\tau_s-\lim_n\left(\Delta_{t_n}^2 f\right)_{x,z}(\xi) \;=\; +\infty \tag{24}$$

2) الحالة الثانية: لنفرض $\langle z\,,\xi\rangle \;=\; f'_x(\xi)$ أنه من أجل كل $\xi\in E$ أن:

$$\begin{aligned}\left(\Delta_t^2 f\right)_{x,z}(\xi)&=\left\{g\left(F\left(x+t\xi\right)\right)-g\left(F\left(x\right)\right)-t\left\langle y\,,DF\left(x\right)\xi\right\rangle\right\}\Big/\tfrac{1}{2}t^2\\&=\left\{g\left(u+tw_t\left(\xi\right)\right)-g\left(u\right)-t\left\langle y\,,w_t\left(\xi\right)\right\rangle\right\}\Big/\tfrac{1}{2}t^2+\left\langle\; y\,,\frac{F\left(x+t\xi\right)-F\left(x\right)-tDF\left(x\right)\xi}{\frac{1}{2}t^2}\;\right\rangle\\&=\left(\Delta_t^2 g\right)_{u,y}\left(w_t\left(\xi\right)\right)+\left\langle y\,,\psi_t\left(\xi\right)\right\rangle\end{aligned}\tag{25}$$

حيث:

$$\left.\begin{aligned}w_t\left(\xi\right)&=\frac{F\left(x+t\xi\right)-F\left(x\right)}{t}\;\xrightarrow[t\downarrow 0]{}\;DF\left(x\right)\xi\quad,\quad u=F\left(x\right)\\\psi_t\left(\xi\right)&=\frac{F\left(x+t\xi\right)-F\left(x\right)-tDF\left(x\right)\xi}{\frac{1}{2}t^2}\;\xrightarrow[t\downarrow 0]{}\;D^2F\left(x\right)\left(\xi\right)\xi\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

لنضع: $\varphi(\xi)=g''_{u,y}\left(DF(x)\xi\right)+\left\langle y,D^2F(x)(\xi)\xi\right\rangle$ ولنتحقق من شرطي تقارب سلايس:

(S1): لنفترض أن $(h,\eta)\in epi\left(\varphi^*\right)$ مع $\varphi^*(h)<\eta$ عندئذٍ فإنه يوجد $0<\varepsilon$ بحيث إن:

$$\langle h,\xi\rangle-\eta\le\varphi(\xi)-\varepsilon$$

ومنه ومن أجل كل متتالية (ξ_n) من X يكون لدينا:

$$\langle h,\xi_n\rangle-\eta \;\le\; \varphi(\xi_n)-\varepsilon \tag{27}$$

الآن بحسب المبرهنة 1.3 والعلاقات (25) و (26) نحصل من أجل n كبيرة بقدر كافٍ على:

$$g''_{u,y}\left(DF\left(x\right)\xi_n\right)\le\liminf\left(\Delta_{t_n}^2 g\right)_{u,y}\left(w_{t_n}\left(\xi\right)\right)\le\left(\Delta_{t_n}^2 g\right)_{u,y}\left(w_{t_n}\left(\xi\right)\right)+\frac{\varepsilon}{4} \tag{28}$$

أيضاً ولكون $F\in C^2$ في x ومن أجل n كبيرة بشكل كافٍ فإن:

$$\left\langle y\,,D^2F\left(x\right)\left(\xi\right)\xi\right\rangle\le\left\langle y\,,\psi_{t_n}\left(\xi_n\right)\right\rangle+\frac{\varepsilon}{4} \tag{29}$$

بجمع (28) و (29) وبتعويض φ بما تساويه نحصل على:

$$\varphi(\xi_n)-\varepsilon\le\left(\Delta_{t_n}^2 f\right)_{x,z}\left(\xi_n\right)-\frac{\varepsilon}{2}\;<\;\left(\Delta_{t_n}^2 f\right)_{x,z}\left(\xi_n\right) \tag{30}$$

وبمقارنة العلاقتين (30) و (27) نحصل على:

$$\langle h,\xi_n\rangle-\eta<\left(\Delta_{t_n}^2 g\right)_{u,y}\left(w_{t_n}(\xi_n)\right)+\left\langle y,\psi_{t_n}(\xi_n)\right\rangle=\left(\Delta_{t_n}^2 f\right)_{x,z}(\xi_n)$$

وبهذا يتحقق (S1). ولنبين تحقق (S2)

$$\left(\Delta_t^2 f\right)_{x,z}\left(\xi+\frac{1}{2}tk\right)=\left(D_t^{\xi} f\right)(k)-\langle z,k\rangle \qquad (31)$$

وبما أن g قابل للاشتقاق وفوق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية في $F(x)$ بالنسبة إلى $y\in\partial g(F(x))$ وبما أن $\langle z,\xi\rangle=f_x'(\xi)$ فإنه بحسب المبرهنة 3.1 يكون $\langle y,DF(x)\xi\rangle=g_x'(DF(x)\xi)$ وبالتالي فإن g قابلة للاشتقاق المكافئ وفوق سلايس في $F(x)$ بالاتجاه $DF(x)\xi$ وهذا يعني بحسب المبرهنة 3.2 أن f قابلة للاشتقاق المكافئ وفوق سلايس، أي أنه من أجل كل $k\in E$ يوجد (k_n) من نقاط E متقاربة من k بحيث إن:

$$d^2 f(x,\xi,k)=\lim_n\left(D_{t_n}^{\xi} f\right)(k_n) \qquad (32)$$

الآن لنأخذ المتتالية $\xi_n=\xi+\frac{1}{2}t_n k_n$ إن $\xi_n\xrightarrow[n]{}\xi$، وبأخذ نهاية طرفي العلاقة (31) والاستفادة من (32) نجد:

$$\begin{aligned}\lim_n\left(\Delta_t^2 f\right)_{x,z}(\xi_n)&=d^2 f(x,\xi,k)-\langle z,k\rangle\\&=d^2 g\left(u,DF(x)\xi,\,DF(x)k+D^2F(x)(\xi)\xi\right)-\langle z,k\rangle\\&=g''_{u,y}\left(DF(x)\xi\right)+\langle y,DF(x)k\rangle+\left\langle y,D^2F(x)(\xi)\xi\right\rangle-\langle y,DF(x)k\rangle\\&=g''_{u,y}\left(DF(x)\xi\right)+\left\langle y,D^2F(x)(\xi)\xi\right\rangle\ =\ \varphi(\xi) \qquad (33)\end{aligned}$$

وذلك اعتماداً على المبرهنة 2.8 ومع مراعاة أن $z=y\circ DF(x)$، الأمر الذي يعني تحقق (S2). الآن بالنظر إلى العلاقتين (24) و (32) نجد أن العلاقة (23)محققة. وهو المطلوب ■.

4- شروط الأمثليات.

سنرى في هذه الفقرة كيف يرتبط مشتق سلايس فوق البيان بمسائل الأمثليات وذلك بإعطاء الشرط اللازم والكافي لوجود الحلول لهذه المسائل، إذ سنعتبر أن كل مشتقات سلايس فوق البيانية موجودة.

مبرهنة 4.1:

ليكن X فضاءً منظماً كيفياً، وليكن $f:X\to R\cup\{+\infty\}$ ولتكن $x\in X$ بحيث إن f محدود في x.

a) الشرط اللازم: إذا كان x نقطة صغرى للدالة f عندئذ:

1) $f_x'(v)\geq 0$ لكل $v\in X$ أي أن $0\in\partial f(x)$.

2) $f''_{x,0}(\xi)\geq 0$ لكل $\xi\in X$.

3) إذا كانت $f_x'(\xi)=0$ فإن $d^2 f(x,\xi,k)\geq 0$ لكل $k\in X$.

b) الشرط الكافي : نفرض أن الفضاء X يحقق الخاصة التالية :

((إذا كانت (x_n) متتالية من نقاط E تحقق أن: $(\|x_n\|)\to\alpha$ فإنه يوجد $x\in E$ مع $\|x\|=\alpha$ بحيث أن $x_n\to x$)) (*) عندئذ:

إذا كان $0 \in \partial f(x)$ مع $f''_{x,0}(\xi) > 0$ وذلك مهما يكن $\xi \neq 0$ عندئذ فإن x نقطة صغرى للدالة f .

البرهان:

a) إن كل من (1) و (2) تبرهن بسهولة ولنبرهن (3): لتكن k إحدى نقاط X الكيفية، بحسب الشرط الثاني لتقارب سلايس فإنه يوجد متتالية (k_n) متقاربة بقوة من k بحيث إن:

$$d^2 f\left(x,\xi,k\right) = \lim_n \left(D_{t_n}^{\xi} f\right)\left(k_n\right)$$

من جهة أخرى ولكون x نقطة صغرى للدالة f فإن $f(x + t_n\xi + \frac{1}{2}t_n^2 k_n) - f(x) \geq 0$ وذلك من أجل n كبيرة بقدر كاف، الأمر الذي يعني مباشرةً أن $\left(D_{t_n}^{\xi} f\right)\left(k_n\right) \geq 0$ وبالتالي فإن: $d^2 f\left(x,\xi,k\right) \geq 0$ وهو المطلوب.

b) لنفترض جدلاً أنه يوجد متتالية (x_n) من نقاط X متقاربة من x مع $x_n \neq x$ مع $f(x_n) \leq f(x)$ ولنضع $v_n = (x_n - x)/\|x_n - x\|$ عندئذ فإن $(\|v_n\|) \to 1$ وبالتالي فإنه سيوجد $v \in X$ بحيث إن $\|v\| = 1$ مع $v_n \to v$ عندئذ بأخذ $t_n = \|x_n - x\|$ فإننا سنجد بحسب (المبرهنة 3.1) **أن:**

$$f''_{x,0}\left(v\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{f\left(x + t_n v_n\right) - f\left(x\right)}{\frac{1}{2}t_n^2} \leq 0$$

الأمر الذي يناقض الشرط $f''_{x,0}\left(\xi\right) > 0$ وذلك مهما يكن $\xi \neq 0$.

ملاحظة 5.2: الشرط (*) في المبرهنة السابقة ليس ضرورياً في فضاء منتهي البعد.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد كان للمشتقات فوق البيانية دور هام في تحديد حلول مسائل الأمثليات في فضاءات منتهية البعد وكان لها تطبيقات هامة في العديد من النظريات الرياضية كما ظهر في أعمال روكافولار [19,18,17] وأعمال آخرين. وبما أن نتائجنا هي أكثر شمولية من نتائج روكافولار لذلك نوصي أن تدرس تطبيقات هذه النتائج في فضاءات غير منتهية البعد وخاصة في مسائل البرمجيات الرياضية المحدبة والتفاضلات الجزئية لدوال محدبة ليس بالضرورة مستمرة وذلك بعد أن بينا في الفقرة الأخيرة تحديد شروط الأمثليات.

المراجع:

[1] ATTOUCH, H. *Variational convergence for functions and operators.* London, 1984, 264-333.

[2] ATTOUCH, H; SOUEYCATT, M. *Augmented Lagrangian and Proximal Alternating Direction Methods of Multipliers in HilbertSpaces. Applications to Games, PDE'S and Control*. Pacific Journal of Optimization, vol.5, N. 1,2009, 1-37.

[3] ATTOUCH, H; BEER, B. *On the convergence of subdifferentials of convex functions.* Arch. Math. Vol. 60, 1993, 389-40.

[4] BEER, B. *On Mosco convergence for convex sets.* Bull. Aust. Math. Soc. 38, 1988, 239-253.

[5] BEER, B. *The slice convergence*: *a viable alternative to Mosco convergence in non reflexive spaces*. sém. D'Anal. Convexe Montpellier, exposer n° 3, 19, 1992, 271-290.

[6] BEER, B. *On the Young- Fenchel transform for convex functios.* Amer.Math.Soc. 104, 1115-1123.

[7] BEN-TAL, A.; ZOWE, J. *A unified theory of first and Second-order condition for extremum problems in topological vector spaces.* Math. Programming Study 19, 1982, 39-76.

[8] COMINETTI, R; COREA, R. *A generalized second-order derivatives in nonsmooth optimization.* SIAM J. Control Optim., 28, 1990, 789-809.

[9] CLARKE, F. *Optimizition and nonsmooth analysis*. New-York, Wiley, 1983.

[10] COMBARI, M.; LAGHDIRr, M.; THIBAULT, L.*Sous-differentiels de fonctions convexes composes.* Ann. Sci. Math. Quebec, 18, no. 2, 1994, 119-148.

[11] COMINETTI, R. *On Pseudo-differentability*. Trans. Amer. Math. Soc., 322,1996.

[12] EKLAND, I.; TEMAM, T. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Paris, Dunod, 1974, 12-52.

[13] HIRIART-URTUTY, J.B. *The approximate firste-ordre and second-order direction derivatives for convex function*. Mathematical theories of Optimization, Lecture Notes in Math., 979, 1983, 144-177.

[14] LEMAIRE, B. *Sousdifferentiels of a convex composite functions. Application to optimal control in variational inequalities.* Nondifferentiable Optimization; Sopron, 1994.

[15] LEVIN, V. *On the sousdifferentiels of a convex composite functions.* Soviet. Math. 11, 1194-1195.

[16] MOSCO, M. *On the continutity of the Young-Fenchel transformation.* Math. Anal. Appl. 35, 1971, 318-335.

[17] ROCKAFELLAR, R., *Second-Order Variational Analysis and Bedond*. Conférence sur l'Analyse Variationnelle et l'Optimisation, Université de Montpellier II, France, 9-12 Septembre, 2009.

[18] ROCKAFELLAR, R. *First and second-order epi-differentability in nonlinear programming*. Trans. Amer. Math. Soc. 307, 1988, 75-108.

[19] ROCKAFELLAR, R. *Second-order optimality conditions in nonlinear programming obtiened by way of epi-derivatives*. Math. of Op. Res., 14, 1989, 462-484.

[20] WIJSMAN, R. *Convergence of sequences of convex sets, cones, and Functions* II. Trqns. Amer. Math. Soc. 123, 1966, 32-45.