مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

دراسة مقلوب مصفوفة متماثلة الإيجابية وطيفها

الدكتور احمد حمزة الشيخة*

(تاريخ الإيداع 19 / 12 / 2010. قُبِل للنشر في 1 / 3 /2011)

□ ملخّص □

في هذا البحث وصف للمصفوفات الموجبة، موجبة نصفية التحديد، موجبة التحديد، متماثلة الإيجابية متماثلة الإيجابية بدقة، والشروط التي يجب أن يحققها تابع لعدة متحولات للحصول على نهاية صغرى عند نقطة المبدأ.

تم البرهان على أنه إذا كانت المصفوفة متماثلة الإيجابية، والتي شكلها التربيعي يصل نهاية صغرى تساوي الصفر عند نقطة المبدأ، فإن مصفوفة المقلوب A^{-1} تكون أيضاً مصفوفة متماثلة الإيجابية، ومقلوب مصفوفة متماثلة الإيجابية، والتي شكلها التربيعي لا يملك نهاية صغرى تساوي الصفر عند المبدأ، ليست بالضرورة مصفوفة متماثلة الإيجابية.

الكلمات مفتاحية: قيمة ذاتية، متجه ذاتي، متماثلة الإيجابية، متماثلة الإيجابية بدقة، متجه ذاتي غير سالب.

* أستاذ مساعد – قسم MIS– كلية تكنولوجيا المعلومات بدعم من جامعة دلمون – مملكة البحرين.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (33) العدد (1) 2011
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (33) No. (1) 2011

Studying Inverse Co-positive Matrix and Its Spectrum

Dr. Ahmad Hamzah al-Cheikha*

(Received 19 / 12 / 2010. Accepted 1 / 3 /2011)

□ ABSTRACT □

This piece of research presents positive, positive semi-definite, copositive strictly copositive matrices, and conditions for achieving the minimum value function at origin point.

It has been proved that the copositive matrix, which its quadratique form has minimum zero at the origin point then its inverse A^{-1} is a copositive matrix, and the copositive matrix which its quadratique don't have minimum zero at the origin point then its inverse A^{-1} is not a necessarily copositive matrix.

Keywords: Eigenvalue, Eigenvector, Copositive, Strictly Copositive, Positive Semi-definite, Non-negative Eigenvector.

* **Assistant Professor, Dep. MIS, Fac. IT, Delmon University, Bahrain.**

مقدمة:

ليكن $e_i \in R^n$ المتجه الذي يحوي "1" في الموضع i والـ "0" في بقية المواضع، وليكن $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$. سوف نستخدم المفهوم $x \geq 0$ ، إذا كان $x_i \geq 0$ لكل $i = 1,2,..., n$ و $x > 0$ ، إذا كان $x_i > 0$ لكل $i = 1,2,..., n$.

المصفوفة A تكون غير سالبة (غير موجبة) إذا كانت جميع عناصرها غير سالبة (غير موجبة).

المصفوفة المتناظرة (Symmetric matrix) A تكون:

- موجبة نصفية التحديد (Positive Semi definite) إذا كان: $x^T A x \geq 0$ لكل $x \in R^n$.
- موجبة التحديد (Positive definite) عندما: $x^T A x > 0$ من أجل $x \neq 0$ و لكل $x \in R^n$.
- متماثلة الإيجابية (Copositive) إذا كان $x^T A x \geq 0$ لكل $x \geq 0$.
- متماثلة الإيجابية بدقة (strictly copositive) عندما $x^T A x > 0$ لكل $x > 0$.
- المصفوفة غير السالبة تكون متماثلة الإيجابية وموجبة نصفية التحديد، ويصنف الشكل التربيعي (Quadratic form) $Q = x^T A x$ بحسب مصفوفته A. من الواضح أن جمع مصفوفتين متماثلتي الإيجابية هي مصفوفة متماثلة الإيجابية.

المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

متماثلة الإيجابية لكنها غير سالبة (وغير موجبة) .[1,2,3].

أهمية البحث وأهدافه:

تنهض المصفوفات الموجبة التحديد و المصفوفات متماثلة الإيجابية بدور هامّ في الحصول على أشكال تربيعية إشارتها موجبة التحديد من أجل أي متجه $v \in R^n$ ، والذي يدخل فيحل كثيراً من المسائل التطبيقية والرياضية، ويرمي البحث إلى تعيين الشروط الكافية ليكون مقلوب مصفوفة متماثلة الإيجابية متماثل الإيجابية أيضاً.

طرائق البحث ومواده:

I. دُرست القيم الخاصة والمتجهات الخاصة لمصفوفة متناظرة وقابلية تقطيرها من خلال المبرهنة 1 التالية:

مبرهنة 1.

المصفوفة المتناظرة A من الشكل $n \times n$ تتصف بالخواص التالية:

a– إن A تملك n قيمة ذاتية حقيقية ، باحتساب رتبة التضعيف.

b– بُعد الفضاء الذاتي (Eigenspace) لأي قيمة ذاتية (Eigenvalue) λ يساوي رتبة تضعيف λ بوصفه جذراً للمعادلة المميزة.

c– الفضاءات الذاتية متبادلة التعامد، بمعنى المتجهان الذاتيان المتعلقان بقيمتين ذاتيتين مختلفتين متعامدان.

d– قابلة للتقطير (Daiegnalzabe) المتعامد. [2,3]

II . دُرس الشكل التربيعي لمصفوفة متناظرة من خلال المبرهنة 2 التالية:

مبرهنة 2.

لتكن A مصفوفة متناظرة من الشكل $n \times n$ ، فإنه يوجد تغيير متعامد للمتحول $x = py$ ، والذي يحول الشكل التربيعي $x^T Ax$ ، إلى الشكل التربيعي $y^T Dy$ ، والذي لا يحوي حدوداً مستطيلة.[2,3]

III . دُرست النهايات الصغرى لتابع لـ n متغير من خلال المبرهنة 3 التالية:

مبرهنة 3.

التابع $f(x_1,...,x_n)$ يبلغ نهاية صغرى عند M_0 إذا وفقط إذا حقق الشروط التالية [4]:

$$\begin{cases} 1) \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 & , \quad i = 1,2,...,n \\ 2) \quad \Delta_i f(M_0) > 0 & , \quad i = 1,2,...,n \end{cases}$$

حيث :

$$\Delta_i f(M_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_i} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}$$

توطئة 2

لتكن $A_{n \times n}$ مصفوفة متماثلة الإيجابية. إذا كان $x_0 \geq 0$ و $x_0^T A\, x_0 = 0$ ، فإن $A\, x_0 \geq 0$. [2]

النتائج والمناقشة:

الخطوة الأولى:

مبرهنة 4.

إذا كان v متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية λ للمصفوفة A القابلة للقلب فإن v متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية $1/\lambda$ للمصفوفة A^{-1} .

البرهان:

إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A القابلة للقلب و v متجهاً خاصاً مقابلاً للقيمة λ فإن:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \;\&\; Av = \lambda v$$

$$\Rightarrow \det(\lambda A A^{-1} - A) = 0 \;\&\; Av = \lambda v$$

$$\Rightarrow \det[\lambda A(A^{-1} - \frac{1}{\lambda} I) = 0 \;\&\; Av = \lambda v$$

$$\Rightarrow \lambda \det A.\det(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}) = 0 \;\&\; A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

$$\Rightarrow \det(\frac{1}{\lambda}I - A^{-1}) = 0 \;\&\; A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

الخطوة الثانية:

ليكن:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = [x_1...x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{n\times n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = x^T A x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{j>i} a_{ij}x_i x_j \ge 0$$

الشكل التربيعي الذي مصفوفته $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ متماثلة الإيجابية (حيث $x \ge 0$) يحقق:

$$f(0,...,x_i,...,0) = a_{ii}\,x_i^2 \ge 0 \Rightarrow a_{ii} \ge 0$$

إذا كان $a_{ii} = 0$ فإن:

$$f(0,...,x_i,...,x_j,...,0) = a_{jj}\,x_j^2 + 2a_{ij}x_i x_j$$
$$= x_j(a_{jj}x_j + 2a_{ij}x_i)$$
$$\Rightarrow a_{ij} \ge 0,\; j = i+1,...,n \qquad (1)$$

نتيجة 1:

إذا كانت A متماثلة الإيجابية فإن عناصرها القطرية تكون غير سالبة ، وإذا كان أحد العناصر القطرية a_{ii} مساوياً الصفر فإن $a_{ij} \ge 0,\; j = i+1,...,n$.

إن :

$$\begin{cases} 1)\;\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 & ,i=1,2,...,n \\ 2)\;\Delta_i f(M_0) > 0 & ,i=1,2,...,n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \\ 2) & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} \\ .... & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad i=1,...,n \end{cases}$$

إذا كانت A قابلة للقلب فإن جملة المعادلات (1)، لها حل وحيد هو الحل الصفري $x=0$ ، فإذا تحقق الشرط (2)، فإن $f(x_1,..., x_n)$ يبلغ نهاية صغرى هي الصفر في نقطة المبدأ $O(0,...,0)$، والعكس صحيح.

لنفرض أن Δ_A ، معين المصفوفة A ، مغاير للصفر ، عندئذ يوجد لـ A مقلوب هو:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\Gamma(A)=\frac{1}{\Delta_A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث $\Gamma(A)$ منقول مصفوفة المتممات الجبرية (بما أن A متناظرة فإن A^{-1} متناظرة [1,3]) وبالتالي إذا كانت A^{-1} متماثلة الإيجابية فإن العناصر $A_{ii}\ , i=1,...,n$ غير سالبة إذا كان $\Delta_A>0$.

لنرمز بـ :
$$F(x_1,...,x_n)=\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}\Gamma(A)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

أو:
$$F(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}x_i^2+2\sum_{j>i}A_{ij}x_ix_j$$

a– ليكن: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ، و A متماثلة الإيجابية فإن:

$$f(x,y)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}x\,y\geq 0$$

إذا كانت A قابلة للقلب فإن:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}\quad ,\quad \Delta_A=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$$

إذا كان $\Delta_A<0$ فإن A^{-1} ليست متماثلة الإيجابية، وحتى تكون متماثلة الإيجابية يجب أن يكون $\Delta_A>0$ ، وبالتالي $a_{11}\neq 0\ \&\ a_{22}\neq 0$ ، وبالتالي $f(x,y)$ يبلغ قيمة صغرى قي نقطة المبدأ $O(0,0)$ ، وعندئذ:

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\Gamma(A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=a_{22}x^2+a_{11}y^2-2a_{12}x\,y\geq 0$$

من أجل $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\geq 0$ ، $F(x,y)$ يبلغ قيمة صغرى في نقطة المبدأ $O(0,0)$ و $F(x,y)\geq 0$.

نتيجة 2:

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متماثلة الإيجابية وكانت قابلة للقلب، فإن A^{-1} تكون متماثلة الإيجابية فقط إذا كان الشكل التربيعي الموافق لها يبلغ قيمة صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ $O(0,0)$.

b– لتكن $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\in R^3\times R^3$ ، وكانت A متماثلة الإيجابية فإن:

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2(a_{12}x\,y+a_{13}x\,z+a_{23}y\,z)\geq 0$$

حيث: $a_{ii}\geq 0, i=1,2,3$ ، فإذا كان $\Delta_A\neq 0$ ، فإن:
$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

وأن : $z \geq 0$, $y \geq 0$, $f(0,y,z) \geq 0$ يستلزم $A_{11} \geq 0$.
$z \geq 0$, $x \geq 0$, $f(x,0,z) \geq 0$ يستلزم $A_{22} \geq 0$.
$y \geq 0$, $x \geq 0$, $f(x,y,0) \geq 0$ يستلزم $A_{33} \geq 0$.

وبالتالي إذا كانت A^{-1} متماثلة الإيجابية فإن $\Delta_A > 0$ و $a_{ii} > 0\,,\, i = 1,2,3$ (لأنه إذا كان $a_{ii} = 0$ فإن $A_{ii} < 0$) وأيضاً يجب أن يكون $A_{ii} > 0$ (لأن A متماثلة الإيجابية).

نتيجة 3:

إذا كانت A^{-1} متماثلة الإيجابية فإن: $\Delta_A > 0$, $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$, $a_{11} > 0$ و $f(x,y,z)$ يبلغ قيمة صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ $O(0,0,0)$.

في هذه الشروط نجد أن :

I− $A_{11} > 0$.

II− $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$

$$\begin{aligned}
&= (a_{22}a_{33} - a_{13}^2)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) - (a_{12}a_{13} - a_{13}a_{23})^2 \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}^2 - a_{22}a_{33}a_{13}^2 - a_{11}a_{33}a_{23}^2 - a_{12}^2a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}a_{33} \\
&= a_{33}^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}a_{33}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{33}\left\{ a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} \\
&= a_{33}\Delta_A > 0
\end{aligned}$$

III− $\Delta_{A^{-1}} = \dfrac{1}{\Delta_A} > 0$.

وبالتالي الشكل التربيعي $F(x,y,z)$ يبلغ قيمة صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ $O(0,0,0)$، ومنه $F(x,y,z) \geq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$، و A^{-1} متماثلة الإيجابية وبالتالي يمكن صياغة المبرهنة التالية:

مبرهنة 5.

إذا كانت $A_{3\times3}$ مصفوفة متماثلة الإيجابية وكان الشكل التربيعي الموافق لها يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر عند نقطة المبدأ $O(0,0,0) \in R^3$، فإن A^{-1} تكون متماثلة الإيجابية والشكل التربيعي الموافق لها يبلغ نهاية صغرى أيضاً تساوي الصفر في نقطة المبدأ.

الخطوة الثالثة:

مبرهنة 6.

إذا كانت A_n مصفوفة متماثلة الإيجابية وكان الشكل التربيعي الموافق لها $f(x_1,...,x_n)=x^TAx$ ، يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر عند نقطة المبدأ $O(0,...,0)\in R^n$ ، فإن A^{-1} تكون متماثلة الإيجابية والشكل التربيعي الموافق لها يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر أيضاً في نقطة المبدأ.

البرهان:

لتكن A_n مصفوفة متماثلة الإيجابية وكان الشكل التربيعي الموافق لها

$$f(x_1,...,x_n)==\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{j>i}a_{ij}x_ix_j\geq 0$$

يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر عند نقطة المبدأ $O(0,...,0)\in R^n$ ، ولتكن $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ القيم الذاتية للمصفوفةA، فإن الشكل التربيعي القطري المتعامد الموافق (حسب المبرهنة 6)

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,y_i^2\geq 0,\ y_i\geq 0,\ i=1,...,n \qquad (2)$$

يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ، أما الشكل التربيعي القطري المتعامد الموافق لـ A^{-1} هو :

$$Q*=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}y_i^2\geq 0,\ y_i\geq 0,\ i=1,...,n \qquad (3)$$

إن التماثل بين الشكلين التربيعيين (2) و (3) وبالتالي بين السطحين اللذين يمثلان المعادلتين يظهر أن Q^* (وبالتالي $F(x_1,...x_n)$) يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ $O(0,...,0)\in R^n$ ، وبالتالي تتحقق المعادلات:

$$F(x_1,...,x_n)\geq 0,\ \ x_i\geq 0,\ \ i=1,...,n$$

$$\begin{cases} 1) \quad \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=0 & ,\quad i=1,2,...,n \\ 2) \quad \Delta_i F(M_0)>0 & ,\quad i=1,2,...,n \end{cases}$$

مثال 1:

لتكن المصفوفة المتماثلة الإيجابية:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&4&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$$

نجد أن :

$$a_{11}=1>0,\ \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2>0,\ \begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&4\end{vmatrix}=5>0,\ \Delta_A=17>0$$

والشكل التربيعي الموافق:

$$f(x,y,z,t)=x^2+2y^2+4z^2+5t^2+2(xz+xt+yz+yt+2zt)$$

يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ $O(0,0,0,0)$ ، كما أن :

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&4&2\\1&2&5\end{vmatrix}=27>0,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&4&2\\1&2&5\end{vmatrix}=11>0,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&5\end{vmatrix}=7>0$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0&1&1\\1&4&2\\1&2&5\end{vmatrix}=5,\ A_{11}A_{22}-A_{12}^2=272>0$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0&2&1\\1&1&2\\1&1&5\end{vmatrix}=-6,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&1&5\end{vmatrix}=-3$$

$$\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}27&5&-6\\5&11&-3\\-6&-3&7\end{vmatrix}=1435>0,\ \Delta_{A^{-1}}=\frac{1}{\Delta_A}>0$$

$$A_{44}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&4\end{vmatrix}=5,\ A_{14}=-\begin{vmatrix}0&2&1\\1&1&4\\1&1&2\end{vmatrix}=-4,\ A_{24}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&4\\1&1&2\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=-1,\ A^{-1}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}27&5&-6&-4\\5&11&-3&-2\\-6&-3&7&-1\\-4&-2&-11&5\end{bmatrix}$$

والشكل التربيعي الموافق لـ A^{-1} يبلغ قيمة صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ. المثال التالي يبين أنه إذا كانت A متماثلة الإيجابية فإن A^{-1} ليست بالضرورة متماثلة الإيجابية.

مثال 2:

لتكن المصفوفة المتماثلة الإيجابية $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$،

إن الشكل التربيعي الموافق لها $f(x,y,z)=2(xy+xz+yz)$ لا يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ، وأن $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$ ليست متماثلة الإيجابية، لأن العناصر القطرية سالبة، والشكل التربيعي الموافق لا يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ.

ملاحظة:

يوجد حالات تكون فيها كل من A و A^{-1} متماثلة الإيجابية من دون أن يكون الشكل التربيعي الموافق لـ A^{-1} يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر عند نقطة المبدأ، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 3:

لتكن المصفوفة المتماثلة الإيجابية :

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&-1\\2&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

إن الشكل التربيعي الموافق لها لا يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر عند نقطة المبدأ،

وأن $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&3&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ ، متماثلة الإيجابية أيضاً.

الاستنتاجات والتوصيات:

1. إذا كانت المصفوفة A متماثلة الإيجابية وكان الشكل التربيعي الموافق لها يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر عند نقطة المبدأ، فإن A^{-1} تكون متماثلة الإيجابية والشكل التربيعي الموافق لها أيضاً يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ.
2. إذا كانت المصفوفة A متماثلة الإيجابية، وكان الشكل التربيعي الموافق لها لا يبلغ نهاية صغرى تساوي الصفر في نقطة المبدأ، فإن مقلوبها A^{-1} ليس بالضرورة مصفوفة متماثلة الإيجابية.
3. يوصى بإجراء دراسة لإيجاد الشروط اللازمة والكافية ليكون مقلوب مصفوف متماثلة الإيجابية أيضاً مصفوفة متماثلة الإيجابية.

المراجع:

[1] CHARLES R. J.، and ROBERT R., *On Copositive Matrices and Their Spectrum*. Department of Mathematics, College of William and Mary, 2006, 22 April. 2008. http://www.google.com/#hl=en&expIds=17259.

[2] HOWARD A.، CHRIS R. *Elementary Linear Algebra*. 8nd. ed., Springer verlag, 2005, 482-490.

[3] IKRAMOV K. D. and SAVEL'EVA N.V., *Conditionally definite matrices*. Journal of Mathematical Sciences, VOL. 1,1998, 1-50.

[4] MURRAY R.S. *Shum's outline of the theory and problems of advanced calculus*. 33nd .ed., printing, New York, 1994, 164-174.