مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (3) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (3) 2010

فضاءات Kc وفضاءات Kc الأصغرية

الدكتور عدنان ظريف*
فاتن عبد الرزاق **

(تاريخ الإيداع 5 / 7 / 2010. قُبِل للنشر في 8 / 11 /2010)

□ ملخّص □

يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء Kc إذا كانت كل مجموعة متراصة فيه مجموعة مغلقة، ويقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء Kc أصغري (MKc) إذا كان (X,τ) فضاء Kc وكان من أجل أية تبولوجيا على X مثل τ^* بحيث $\tau \supset \tau^*$ يكون (X,τ^*) ليس فضاء Kc .

في هذا البحث سوف نحاول ربط مفهوم فضاءات Kc الأصغرية بمفاهيم تبولوجية أخرى كمفهوم التطبيقات المستمرة والتطبيقات المغلقة وk- تطبيقات من أجل التوصل إلى نتائج يمكن استخدامها في دراسة الكثير من الخصائص للفضاءات التبولوجية.

الكلمات المفتاحية: فضاء Kc ، فضاء Kc أصغري، التبولوجيا المتراصة الأعظمية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
** طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (3) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (3) 2010

Kc - Spaces and Minimal Kc- Spaces

Dr. Adnan Zarif *
Faten Abd Al-Razak **

(Received 5 / 7 / 2010. Accepted 8 / 11 /2010)

□ ABSTRACT □

A Kc-space is a Kc-space if every compact (X,τ) is a topological space, we say that (X,τ) Let subset is closed is called Minimal Kc- space (MKC) if every $\tau^* \subset \tau$, which implies (X,τ^*) is not a Kc-space.

In this research we will study the relation between Minimal Kc-spaces and other topological concepts .

Key words: Kc-space**,** Minimal Kc- space, Maximal compact topology.

***Associate Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تعد فضاءات Kc ، MKc من المفاهيم التبولوجية الهامة والقديمة نسبياً، وتبرز أهميتها بأنها تجمع بين مفهومي التراص والإغلاق... ، تعود بداية هذا المفهوم إلى عام 1943 .

من أهم المبرهنات التي تخص هذا الفضاء: كل فضاء Kc متراص هو فضاء MKc [1] .

عام 1965 بُرهن أن: كل فضاء هاوسدورف هو فضاء Kc ، وأن كل فضاء Kc هو فضاء T_1 [1].

تم الوصول (عام2005) إلى كون الصورة المباشرة وفق تابع مستمر لفضاء Kc (MKc) ليست بالضرورة فضاء Kc (MKc) [1].

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى محاولة إيجاد الشروط اللازمة كي تكون الصورة المباشرة لفضاء Kc (MKc) وفق تابع مستمر، k– تطبيق...،هي فضاء Kc (MKc).

إيجاد الشروط اللازمة كي تكون الصورة العكسية لفضاء Kc (MKc) وفق تابع مستمر، k– تطبيق...، هي فضاء Kc (MKc) ....

طرائق البحث ومواده:

نبدأ أولا بإعطاء بعض التعاريف الضرورية لعرض الموضوع، والتي تستخدم في برهان النتائج التي حصلنا عليها .

تعريف(1):

يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء Kc إذا كانت كل مجموعة متراصة فيه مجموعة مغلقة [1]
.

تعريف(2):

يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء Kc أصغري(MKc) إذا كان (X,τ) فضاء Kc وكان من أجل أية تبولوجيا على X مثل τ^* بحيث $\tau \supset \tau^*$ يكون (X,τ^*) ليس فضاء Kc [1] .

تعريف(3):

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ما، يقال عن التبولوجيا τ إنها تبولوجيا متراصة أعظمية Maximal (compact topology) إذا كان (X,τ) فضاء متراصاً وكان من أجل أية تبولوجيا τ^* على X بحيث $\tau \subset \tau^*$ فإن (X,τ^*) غير متراص[2].

تعريف(4):

يقال عن التطبيق $f: X \to Y$ إنه تطبيق متراص(compact map) إذا كانت الصورة العكسية لأية مجموعة جزئية من Y مؤلفة من عنصر واحد فضاءً جزئياً متراصاً في X [4] .

تعريف(5):

يقال عن التطبيق $f : X \to Y$ إنه k- تطبيق (k-map) إذا كانت الصورة العكسية لأي فضاء جزئي متراص B من Y فضاءً جزئياً متراصاً في X، والصورة المباشرة لأي فضاء جزئي متراص A من X فضاءً جزئياً متراصاً في Y [3] .

النتائج والمناقشة:

مبرهنة(1):

ليكن $f : X \to Y$ k− تطبيقاً غامراً ومغلقاً، إذا كان X فضاء Kc فإن Y فضاء Kc أيضاً.

البرهان: لتكن A مجموعة متراصة في الفضاء Y، ولنبرهن أن A مغلقة في Y.

بما أن f k − تطبيق فإن $f^{-1}(A)$ مجموعة متراصة في X، لكن X فضاء Kc إذاً $f^{-1}(A)$ مجموعة مغلقة في X، وبما أن f مغلق و غامر فإن $f(f^{-1}(A)) = A$ مجموعة مغلقة في Y وبالتالي Y فضاء Kc. □

مبرهنة(2):

ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً مستمراً ،غامراً ومغلقاً، إذا كان X فضاء MKc فإن Y فضاء MKc أيضاً.

البرهان: يكون Y فضاء MKc إذا كان فضاء Kc متراصاً[1].

1− Y فضاء Kc لأن:

لتكن A مجموعة متراصة في الفضاء Y، ولنبرهن أن A مغلقة في Y.

بما أن ((X, τ) فضاء $MKC \Leftrightarrow \tau$ تبولوجيا متراصة أعظمية[2])

وبما أن (الصورة العكسية لمجموعة متراصة وفق تطبيق مستمر منطلقه فضاء (X, τ) حيث τ تبولوجيا متراصة أعظمية مجموعة متراصة[2])

إذاً $f^{-1}(A)$ مجموعة متراصة في X ، لكن X فضاء MKc و بالتالي $f^{-1}(A)$ مغلقة في X.

أصبحت $f(f^{-1}(A)) = A$ (f غامر)

مجموعة مغلقة في Y (f مغلق) وبالتالي Y فضاء Kc.

2− Y فضاء متراص لأن:

بما أن كل فضاء MKc يكون فضاءً متراصاً[5] إذاً X فضاء متراص ، وبما أن f تطبيق مستمر فإن $f(X)$ مجموعة متراصة في Y، لكن $f(X) = Y$ (f غامر) إذاً Y فضاء متراص.

من 1و2 $\Leftarrow$ Y فضاء MKc. □

مبرهنة (3):

ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً مستمراً ،إذا كان X فضاءً متراصاً وكان Y فضاء Kc فإن f يكون مغلقاً.

البرهان: لتكن A مجموعة مغلقة في الفضاء X المتراص فرضاً ،عندئذٍ تكون A متراصة في X ، وبما أن f مستمر فإن $f(A)$ مجموعة متراصة في Y . لكن Y فضاء Kc فرضاً إذاً $f(A)$ مجموعة مغلقة في Y وبالتالي f مغلق . □

مبرهنة(4):

ليكن (X,τ) فضاءً متراصاً،عندئذٍ الفضاء (X,τ) يكون فضاء Kc إذا وفقط إذا كان كل تقابل مستمر من فضاء متراص (Y,τ^*) في الفضاء (X,τ) هوميومرفيزماً.

البرهان:

لزوم الشرط: ليكن (X,τ) فضاء Kc متراصاً وليكن $f:Y\to X$ تقابلاً مستمراً حيث (Y,τ^*) فضاء متراص، ولنبرهن أن f هوميومرفيزم.

إن $f^{-1}:X\to Y$ مستمر، لأن أية مجموعة مغلقة A في الفضاء (Y,τ^*) تكون متراصة فيه لأن (Y,τ^*) فضاء متراص ، إذاً $f(A)=(f^{-1})^{-1}(A)$ مجموعة متراصة في (X,τ) وبالتالي $f(A)$ مجموعة مغلقة في (X,τ) (لأن (X,τ) فضاء Kc)، أي أن f^{-1} مستمر، لكن f تقابل مستمر ،إذاً f هوميومرفيزم.

كفاية الشرط: بفرض أن كل تقابل مستمر من الفضاء المتراص (Y,τ^*) في الفضاء (X,τ) المتراص هوميومرفيزم، ولنبرهن أن (X,τ) فضاء Kc . من أجل ذلك يكفي أن نثبت أنه MKC (لأن كل فضاء MKC هو فضاء Kc [1])، و بما أن ((X,τ) فضاء MKC $\Leftrightarrow$ τ تبولوجيا متراصة أعظمية[2]) إذاً يكفي أن نبرهن أن التبولوجيا τ تبولوجيا متراصة أعظمية .

لذلك نفرض العكس أي نفرض أن τ تبولوجيا متراصة غير أعظمية ، عندئذٍ ستوجد تبولوجيا متراصة τ_1 تحقق $\tau\subset\tau_1$.

لنأخذ التطبيق المطابق $I:(X,\tau_1)\to(X,\tau)$. من الواضح أن I تقابل مستمر إلا أنه ليس هوميومرفيزماً (كون $\tau\subset\tau_1$)، وبالتالي τ تبولوجيا متراصة غير أعظمية، أي أن (X,τ) فضاء Kc أصغري(MKc) إذاً (X,τ) فضاء Kc. □

مبرهنة(5):

إذا كان Y فضاء Kc ، وكان $f:X\to Y$ تطبيقاً مستمراً وغامراً بحيث أن الفضاء X فضاء T_2 متراص عندئذٍ يكون Y فضاء T_2 أيضاً.

البرهان: بما أن الصورة المباشرة لفضاء متراص وفق تطبيق مستمر وغامر تكون فضاء متراصاً فإن Y فضاء متراص.

وبما أن كل فضاء متراص هو فضاء متراص موضعيًا، إذاً Y فضاء متراص موضعياً. لكن Y فضاء Kc ، وبملاحظة أن(الفضاء المتراص موضعياً يكون فضاء Kc إذا وفقط إذا كان فضاء T_2 [1]) يكون Y فضاء T_2.

نتيجة(1):

ليكن $f:X\to Y$ ‒k تطبيقاً مستمراً ومتبايناً، إذا كان Y فضاء Kc فإن $X=f^{-1}(Y)$ فضاء Kc أيضاً.

البرهان: لتكن A مجموعة متراصة في الفضاء X، ولنبرهن أن A مغلقة في X. بما أن A متراصة في X، إذاً $f(A)$ مجموعة متراصة في Y (f k– تطبيق)، و بما أن Y فضاء Kc، فإن $f(A)$ مغلقة في Y. لكن f مستمر ومتباين وبالتالي:

$f^{-1}(f(A)) = A$ مجموعة مغلقة في X إذاً $X = f^{-1}(Y)$ فضاء Kc.□

نتيجة(2):

ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً متراصاً، مستمراً ومتبايناً، إذا كان Y فضاء MKc فإن $X = f^{-1}(Y)$ فضاء MKc أيضاً.

البرهان: بما أن Y فضاء MKc، فإن Y متراص. وبما أن f متراص ومتباين، إذاً $X = f^{-1}(Y)$ فضاء متراص.

لتكن A مجموعة متراصة في الفضاء X، إن $f(A)$ مجموعة متراصة في Y (f مستمر)، وبما أن Y فضاء MKc، فإن $f(A)$ مغلقة في Y. لكن f مستمر ومتباين وبالتالي: $f^{-1}(f(A)) = A$ مجموعة مغلقة في X، وبالتالي $X = f^{-1}(Y)$ فضاء MKc (Kc و متراص[1]) . □

نتيجة(3):

كل k – تطبيق بين فضائين Kc ومتراصين يكون تطبيقاً مستمراً ومغلقاً.

البرهان: ليكن $f : X \to Y$ k– تطبيقاً حيث X، Y فضاءان Kc متراصان .

إن f مستمر، لأنه:

إذا كانت A مجموعة مغلقة في الفضاء Y، فإن A متراصة في Y (Y متراص). بما أن f k– تطبيق، إذاً $f^{-1}(A)$ مجموعة متراصة في X ، وبالتالي $f^{-1}(A)$ مغلقة في X (X فضاء Kc) أي أن f مستمر.

كما أن f مغلق، لأنه:

إذا كانت B مجموعة مغلقة في الفضاء X، فإن B متراصة في X (X متراص). بما أن f k– تطبيق، إذاً $f(B)$ مجموعة متراصة في Y، وبالتالي $f(B)$ مغلقة في Y (Y فضاء Kc) أي أن f مغلق. □

نتيجة(4):

كل k – تطبيق بين فضائين MKc يكون تطبيقاً مستمراً ومغلقاً.

البرهان: واضح بملاحظة النتيجة(3) حيث (فضاء MKc $\Leftrightarrow$ فضاء Kc متراص[5] , [1]).

نتيجة(5):

ليكن $f : X \to Y$ k– تطبيقاً غامراً ومغلقاً. إذا كان X فضاءً MKc فإن Y فضاء MKc أيضاً.

البرهان: بما أن X فضاء MKc (وبالتالي فضاء Kc)، فإن $Y = f(X)$ فضاء Kc (انظر المبرهنة(1)).

وبما أن كل فضاء MKc يكون متراصاً ، إذاً $Y = f(X)$ فضاء متراص (f k– تطبيق)، وبالتالي Y فضاء MKc.□

نتيجة(6):

ليكن $f : X \to Y$ k- تطبيقاً مستمراً ومتبايناً، إذا كان Y فضاءً MKc فإن $X = f^{-1}(Y)$ فضاء MKc أيضاً.

البرهان:

بما أن Y فضاء MKc (وبالتالي فضاء Kc)، فإن $X = f^{-1}(Y)$ فضاء Kc (انظر النتيجة(1)).

وبما أن كل فضاء MKc متراص، إذاً $X = f^{-1}(Y)$ فضاء متراص (f k- تطبيق)، وبالتالي X فضاء MKc. □

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد توصلنا إلى إيجاد بعض النتائج المتعلقة بفضاءات Kc ، MKc وبعض الخواص التبولوجية الأخرى المرتبطة بالاستمرار و بـ k – تطبيقات، وهدفنا المستقبلي هو متابعة دراسة هذه الفضاءات محاولين إيجاد نتائج أخرى مشابهة .

المراجع:

[1]- ALI, R. *Minimal Kc-spaces and Minimal Lc-spaces*, Tishreen University Journal, Syria, Vol 28, No. 1, 2005, 147-154.

[2]- KUNZI, A.; DOMINIC VAN DER ZYPEN, *Maximal (sequentially) compact topologies*, University of Cape Town, Arxiv. Math.GN, South Africa. 2003, 1-15.

[3]- ARKHNGEL'SKII. A.V.; PONTRYAGIN, L.S (Eds.),*General Topology I* . New York. Vol17, 1990, 61-66.

[4]- ARKHNGEL'SKII, A. V (Ed.), *General Topology II*. London. Vol 50, 1995, 19-24.

[5]- BELLA, A. COSTANTINI, C. *Topology and its Applications*, Vol 155, 2008, 1426–1429.