مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (2) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (2) 2010

قابلية التحكم بالمخرجات وقابلية الرصد في الأنظمة الخطية المتقطعة زمنيا

الدكتور محمود عثمان *

(تاريخ الإيداع 1 / 6 / 2010. قُبِل للنشر في 28 / 9 /2010)

□ ملخّص □

تم في هذا البحث عرض دراسة مسألة قابلية التحكم بالمخرجات، وكذلك قابلية الرصد للأنظمة الخطية المتقطعة ذات الأمثال الثابتة والتي تكتب على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
& x(t+1) = A\,x(t) + B\,u\,(t+1)\ , t = 0,1,\ldots,T \\
& y(t) = C\,x(t)\ , \\
& x(0) = x_0\ , \\
& x(T) = x_T\ .
\end{aligned}
$$

وتم التوصل إلى إيجاد صيغة مكافئة للنظام الموجود أعلاه. وكذلك تم استنتاج بعض النتائج الجديدة في قابلية التحكم بالمخرجات. وكذلك تم وضع خوارزمية جديدة لإيجاد أقل عدد من الخطوات التي تمكننا من نقل النظام من الخرج الابتدائي إلى الخرج النهائي. كما تم استنتاج سلسلة من النتائج الجديدة لقابلية الرصد. وأخيراً تم وضع خوارزمية لإيجاد الحل الأمثل لمتجهة الحالة الابتدائية x(0).

الكلمات المفتاحية: قابلية التحكم بالمخرجات، قابلية الرصد، الأنظمة الخطية المتقطعة، الحل الأمثل.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (32) العدد (2) 2010
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (32) No. (2) 2010

Controllable and Observable Output for Linear Discrete -Time Systems

Dr. Mahmoud Osman *

(Received 1 / 6 / 2010. Accepted 28 / 9 /2010)

□ ABSTRACT □

In this research, we investigate a problem of controllable and observable output for linear discrete-time systems of type:

$$x(t+1) = A\,x(t) + B\,u\,(t+1)\ , t = 0,1,\ldots,T$$
$$y(t) = C\,x(t)\ ,$$
$$x(0) = x_0\ ,$$
$$x(T) = x_T\ .$$

We have founded an equivalent formula for the linear discrete-time system. Moreover, new results of controllable output are presented. We put out a new algorithm to find the minimum number of steps that can enable us to move the output vector from the primary stage into the final one. On the other hand, necessary and sufficient observable conditions for system are derived. Finally, we put out a new algorithm to find the optimal solution for vector state $x(0)$.

Key words: Controllable, Observable output, Linear Discrete-Time Systems, optimal solution.

* **Professor, Mathematics Department, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

قابلية التحكم والرصد مفهومان أساسيان في نظرية التحكم الحديثة، فقد تم تعريف هذين المفهومين من قبل العالم R.kalman [3],[7]وذلك بغية التعرف على مدى إمكانية مراقبة النظام والتحكم به. فعلى الرغم من أن معظم الأنظمة الطبيعية يمكن التحكم بها، وكذلك مراقبتها ،لكن النموذج الرياضي الذي يعبر عن هذه الأنظمة قد لا يتصف بهذه الصفات، لذلك ولتحقيق هذا المفهوم في نظام ما يجب علينا مراعاة اختيار أو انتقاء متغيرات متجهة الحالة للنظام على أن يكون بالإمكان قياسها أو مراقبتها وذلك للبدء في تصميم نظام تحكم يحقق الغاية النهائية من عملية التحكم.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث في الحصول على معايير لقابلية التحكم بالمخرجات للنظم الخطية المتقطعة، وكذلك رصد هذه المخرجات لتصميم نظام تحكم يحقق الهدف المطلوب.

طرائق البحث ومواده:

تم عرض نظريات مشهورة واستنتاج سلسلة من النتائج والخوارزميات مدعومة بالأمثلة لإظهار صحة هذه المعايير.

نتائج البحث وتطبيقاته:

أ–قابلية التحكم بمخرجات النظام:

ليكن النظام معطى على النحو التالي:

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t+1) \quad ;t=0,1,2,3,\ldots\ldots..T \qquad (1)$$
$$y(t)=Cx(t) \qquad (2)$$
$$x(0)=x_0=\text{constant}, \qquad (3)$$
$$x(T)=x_T=\text{constant} \qquad (4)$$

نسمي $x(t)\in R^n$ متجهة الحالة للنظام و $u(t)\in R^m$ متجهة التحكم و $y(t)\in R^p$متجهة مخرجات النظام. A و B و C مصفوفات عددية أبعادها على الترتيب n x n و nxm و pxn

ملاحظة: نسمي العلاقات من (1) وحتى(4) بالنظام (1-4)

تعريف1: نقول إن النظام (1-4) قابل للتحكم بالمخرجات، إذا تمكنا من نقل النظام من الخرج البدائي $y(0)=Cx_0$ إلى الخرج النهائي $y(T)=Cx_T$.[2],[7]

ب –إيجاد صيغة مكافئة للنظام (1-4):

بفرض أن $\det A\neq 0, \det C\neq 0$ ، من أجل t=0,1,2,3,……….T-1 نستطيع أن نكتب:

$$y(0)=Cx(0)=Cx_0$$
$$y(1)=Cx(1)=C[Ax(0)+Bu(1)]=CAx_0+CBu(1)$$
$$y(2)=Cx(2)=C[Ax(1)+Bu(2)]=CA^2x_0+CABu(1)+CBu(2)$$
.
.
.
$$y(T)=CA^Tx_0+CA^{(T-1)}Bu(1)+CA^{(T-2)}Bu(2)+\ldots\ldots\ldots..+CBu(T)$$

وبالتالي نحصل على جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$y(1)-CAx_0=CBu(1)$$
$$y(2)-CA^2x_0=CABu(1)+CBu(2)$$
$$y(3)-CA^3x_0=CA^2Bu(1)+CABu(2)+CBu(3)$$
.
.
$$y(T)-CA^Tx_0=CA^{T-1}Bu(1)+.........+CBu(T) \qquad (5)$$

بفرض:

$$\beta=y(T)-CA^Tx_0 \ ,$$
$$U=\{u(1),u(2),.........u(T)\} \ ,$$
$$D=[CA^{T-1}B,CA^{T-2}B,.....,CB] \ .$$

يمكننا كتابة العلاقة (5) على النحو التالي:

$$DU=\beta \qquad (6)$$

من أساسيات الجبر الخطي نعلم أن :

1− لايوجد لجملة المعادلات (6) حل إذا كان $rank[D]<rank[D\,|\,\beta]$.

2−يوجد حل وحيد إذا كان $rank[D]=rank[D\,|\,\beta]=p$.

3−يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كان: $rank[D]=rank[D\,|\,\beta]<p$.

نظرية1: الشرط اللازم والكافي حتى يكون النظام (4-1) قابلاً للتحكم بالمخرجات هو أن يتحقق الشرط التالي: $rank[D]=p$.

1− لزوم الشرط : إذا كان $U(t)=\{u(1),u(2),..........u(T)\}$حل وحيد لجملة المعادلات (6) فإن $rank[D]=p$.

2− كفاية الشرط: إذا كان $rank[D]=p$ فإن $rank[D]=rank[D\,|\,\beta]=p$ ، وذلك لأن $rank[D]=\min\{p,p+1\}$.

نظرية 2: إذا كانت المصفوفة $[A^{T-1}B,A^{T-2}B,......B]$ من المرتبة n فإن النظام (4-1) قابل للتحكم بالمخرجات إذا كانت المصفوفة C تملك الرتبة P:

البرهان: لدينا $D=C[A^{T-1}B,A^{T-2}B,........B]$ ، وبالتالي فإن rank[D]=min{p,n}=p ، إي إن النظام (4-1) قابل للتحكم بالمخرجات.

مثال 1: ليكن لدينا النظام معطى على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \\ u_3(t+1) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

والمطلوب دراسة قابلية التحكم بمخرجات النظام.

الحل: لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فتكون المصفوفة : $D = \left[CA^2B, CAB, CB\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

نلاحظ أن rank[D]=1<2، وهذا يعني أن النظام غير قابل للتحكم بالمخرجات.

أما إذا أخذنا في المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، فتكون المصفوفة

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن rank[D]=2، أي إن النظام قابل للتحكم بالمخرجات.

ج-خوارزمية لمعرفة قابلية التحكم بمخرجات النظام:

1- نعطي T=1.

2- نشكل المصفوفة D.

3- نتحقق من العلاقة rank[D]=P فإذا كان محقق يكون النظام قابل للتحكم بالمخرجات ثم نذهب إلى الخطوة 5.

4- نعطي T=T+1 ثم نعود إلى الخطوة 2.

5- النهاية.

د- قابلية التحكم بالمخرجات بوجود شروط على متجهة التحكم:

نعدل النظام (4-1) بإضافة الشرط التالي:

$$|u(t)| \le 1 \qquad (7)$$

نظرية 3: نقول إن النظام (4-1) قابل للتحكم بالمخرجات بوجود الشرط (7) إذا تحقق مايلي:

1- $rank[A^{T-1}B, A^{T-2}B, \ldots\ldots, B] = n$.

2- القيم الذاتية للمصفوفة A تحقق العلاقة: $|\lambda_k| \le 1$.

3- Rank[D]=P.

نظرية4 (Hautos) [1]:

إذا كان لدينا مصفوفتان A و B أبعادهما على الترتيب nxn و nxm عندئذ نقول إنه يوجد للنظام QU=f حلا حيث $Q=[A^{T-1}B, A^{T-2}B, ...B]$ مصفوفة أبعادها $n\times(mT)$ و U متجهة تحوي n متغير و f عمود الثوابت مؤلف من n مركبة وذلك إذا تحقق الشرط التالي:

$$rank[A-\lambda_k I, B]=n$$

حيث λ_k هي القيم المميزة للمصفوفة A.

نتيجة : الشرط اللازم والكافي حتى يكون النظام (4-1) قابلاً للتحكم بالمخرجات مع وجود الشرط (7) هو أن يتحقق الشروط التالية:

1- $rank[A-\lambda_k I, B]=n$.

2- $|\lambda_k|\le 1,\ k=1,...,n$ حيث λ_k هي القيم المميزة للمصفوفة A.

3- $rank$[D]=P.

مثال2: ندرس قابلية التحكم بالمخرجات للنظام التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t+1) \\ u_2(t+1) \\ u_3(t+1) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

$$|u(t)|\le 1 \qquad .$$

الحل:

الشرط 1- نشكل المصفوفة $[A^2B, AB, B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

باستخدام برنامج Mathematica يمكننا أن نجد : $rank[A^2B, AB, B]=3$ أي إن هذا الشرط محقق.

الشرط 2 – نوجد القيم المميزة للمصفوفة A، فنجد أن: $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=0.5$ وهذا يحقق الشرط الثاني أيضاً.

الشرط 3- نشكل المصفوفة : $D=\begin{bmatrix} 4 & 2.5 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3.5 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، ويكون $rank$[D]=2، إي إن الشرط الثالث محقق. وبالتالي فإن النظام قابل للتحكم بالمخرجات.

ملاحظة: يمكننا التحقق من الشرط $rank[A-\lambda_k I, B]=n$:

من أجل $\lambda_1=\lambda_2=1$ ، نجد :

$$rank[A-\lambda_1 I, B] = rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

ومن أجل $\lambda_3 = 0.5$ ، نجد :

$$rank[A-\lambda_3 I, B] = rank\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

هـ- تحويل النظام إلى مسألة البرمجة الخطية

نحول النظام (4-1) مع الشرط (7) إلى مسألة برمجة خطية وذلك بإضافة دالة الهدف $Z = CU \to \min$ ، فيكتب على النحو التالي:

$$\begin{aligned} & Z = CU \to \min \\ & DU = \beta \qquad\qquad (8) \\ & |U| \le 1 \end{aligned}$$

و- خوارزمية إيجاد min T (الحد الأدنى لعدد الخطوات)

خطوة 1: نعطي T=2

خطوة 2- نكون المصفوفة D

خطوة 3- نجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي (8) باستخدام برنامج Math فإذا كان هنالك حل تكون T هي الحد الأدنى لعدد الخطوات، وبالتالي يمكننا استنتاج الحل الأمثل لمتجهة التحكم، ثم نذهب إلى الخطوة (5).

خطوة 4- نعطي T تزايد بمقدار 1 أي T=T+1، ثم نذهب إلى الخطوة 2 .

خطوة 5- النهاية.

مثال3:

ليكن النظام

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t+1),$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_T = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

$$|u(t)| \le 1 \quad .$$

المطلوب:

1- هل النظام قابل للتحكم بالمخرجات ؟

2 -إيجاد أقل عدد ممكن من الخطوات لنقل النظام من الخرج البدائي $y(0) = Cx_0$ إلى الخرج النهائي $y(T) = Cx_T$.

3- استنتاج متجهة التحكم ثم استنتاج متجهة الحالة وكذلك متجهة الخرج.

الحل:

الطلب الأول:

لدينا : $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

اعتمادا على النظرية 3 نجد:

$$rank[A^2B, AB, B]=rank[\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}]=2,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=1, \qquad rank[C]=2$$

أي إن النظام قابل للتحكم بالمخرجات.

الطلب الثاني:نطبق الخوارزمية السابقة باستخدام برنامج Mathematica من أجل ....,T=2,3,4 فنجد أن هنالك حل ممكن من أجل T=7، فيكون الحد الأدنى لعدد الخطوات T=7 ، وبالتالي نحصل على متجهة التحكم.

```
LinearProgramming[{1,1,1,1,1,1,1},
 {{7,6,5,4,3,2,1},
 {8,7,6,5,4,3,2} },
 {{8,0},{12,0}} ,{{-1,1},{-1,1},{-1,1},{-1,1},{-1,1},{-1,1},{-1,1}}]
Output:
{-1,0,1,1,1,1,1}
```

أي إن متجهة التحكم:U={-1,0,1,1,1,1,1}

الطلب الثالث: يمكننا استنتاج متجهة الحالة للنظام:

$$x_1=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}, x_2=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}, x_3=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}, x_4=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}, x_5=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}, x_6=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}, x_7=\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}$$

وتكون متجهة الخرج للنظام:

$$y_1=\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}, y_2=\begin{bmatrix}-2\\ -3\end{bmatrix}, y_3=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}, y_4=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}, y_5=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}, y_6=\begin{bmatrix}4\\ 7\end{bmatrix}, y_7=\begin{bmatrix}8\\ 12\end{bmatrix}$$

ز- قابلية الرصد في الأنظمة الخطية المتقطعة والتي لا تتضمن متجهة التحكم:

تعريف [4,5,6]:يقال عن نظام ما إنه قابل للرصد إذا وفقط إذا كان من الممكن تحديد الحالة الابتدائية x(0) فقط عن طريق سجل محدد من القياسات y(t) (الخرج) من أجل عدد محدد من الخطوات.

فإذا كان لدينا النظام التالي:

$$x(t+1)=Ax(t) \qquad ; x(0)=x_0 \text{ غير معروفة}$$

$$y(t)=Cx(t) \qquad (9)$$

حيث A و C مصفوفتان أبعادهما على الترتيب $n\times n$ و $p\times n$

نظرية5: نقول إن النظام (9) قابل للرصد إذا تحقق الشرط التالي:

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ CA^{T-1} \end{bmatrix} = n$$

البرهان:

من أجل t=0,1,2,……..T-1 ، نجد:

$$\begin{aligned} & x(1) = Ax(0) = Ax_0 \\ & x(2) = Ax(1) = A[Ax_0] = A^2 x_0 \\ & \vdots \\ & x(T) = A^T x_0 \end{aligned}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\begin{aligned} & y(0) = Cx(0) = Cx_0 \\ & y(1) = Cx(1) = C[Ax_0] = CAx_0 \\ & y(2) = Cx(2) = CA^2 x_0 \\ & \vdots \\ & y(T-1) = CA^{T-1} x_0 \end{aligned}$$

ويمكننا كتابة هذه العلاقات بالشكل المصفوفي على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{T-1} \end{bmatrix} x_0 \qquad (10)$$

نلاحظ أنه يوجد لجملة المعادلات (10) حل وحيد إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ CA^{T-1} \end{bmatrix}_{(np)xn} = n$$

نتيجة: نقول عن النظام (9) إنه قابل للرصد إذا تحقق الشرط التالي: rank[O]=n ، حيث O هي المصفوفة:

$$O = [C', A'C', ...(A^{(T-1)})'C'] = n$$

ملاحظة: نعني بـ C' منقول المصفوفة C.

مثال4: ليكن النظام التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

المطلوب: دراسة قابلية الرصد لهذا النظام.

الحل: لدينا $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$، نشكل المصفوفة O :

$$O = \begin{bmatrix} C', A'C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow rank[O] = 2$$

أي إن النظام قابل للرصد.

أما إذا أخذنا: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ، فتكون $O = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow rank[O] = 1$ ، أي أن النظام غير قابل للرصد.

ح- قابلية الرصد بوجود شروط على متجهة البداية X(0)

نعدل النظام (9) بإضافة الشرط التالي:

$$|x(0)| \le 1 \qquad (11)$$

نظرية6: الشرط اللازم والكافي حتى يكون النظام (9) قابلاً للرصد بوجود الشرط (11) هو أن يتحقق مايلي:

أ- $rank[A' - \lambda_k I, C'] = n$.

ب- $|\lambda_k| \le 1$ حيث λ_k هي القيم المميزة للمصفوفة A .

مثال5: ندرس قابلية الرصد للنظام التالي:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\ , x(0) = x_0,$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t),$$
$$|x_0| \le 1 .$$

الحل:

لدينا: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

أولا: نحسب القيم المميزة للمصفوفة A فنجد $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

ثانيا: نحسب $rank[A' - \lambda_k I, C'] = rank \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$.

أي إن النظام قابل للرصد.

ط- خوارزمية لإيجاد الحل الأمثل للنظام (9):

خطوة 1: نتأكد أن النظام (9) قابل للرصد.

خطوة 2: نعطي T=2 .

خطوة 3: نكون المصفوفة O.

خطوة 4: نكون البرنامج الخطي التالي:

$$Z = Cx_0 \to \min$$
$$O x_0 = y$$
$$| x_0 | \le 1$$

خطوة 5: نتحقق هل يوجد للنظام حل ممكن. فإذا كان هنالك حل نذهب إلى الخطوة 7، وإلا نطبق الخطوة 6

خطوة 6: نعطي T تزايد بمقدار 1 ، أي T=T+1، ثم نذهب إلى الخطوة الثالثة.

خطوة 7− النهاية.

<u>مثال 6:</u> بإعطاء قيم للمتجهة $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ المطلوب، إيجاد $x_0(t)$ للنظام المعطى في المثال (4).

الحل:

- تأكدنا سابقا أن النظام قابل للرصد.
- نعطي T=2 .
- نكّون المصفوفة $O = [C', A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$.
- نكون البرنامج الخطي:

$$Z = x_0(1) + x_0(2) \to \min$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(1) \\ x_0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$| x_0(1) | \le 1, | x_0(2) | \le 1$$

- باستخدام برنامج mathematika نتحقق من أنه يوجد للنظام حل ضمن الشروط السابقة ، فنجد أن الشرط غير محقق، لذلك نعطي T تزايد بمقدار 1، ونعود من جديد لنكون المصفوفة:

$$O = [C', A'C', (A')^2 C'] = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

فيكون البرنامج الخطي الجديد

$$Z = x_0(1) + x_0(2) + x_0(3) \to \min$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$| x_0(1) | \le 1, | x_0(2) | \le 1, | x_0(3) | \le 1$$

من جديد، نتأكد إذا كان يوجد للنظام حل، فنجد أن هنالك حلاً وهو نتيجة خرج البرنامج التالي:

```
LinearProgramming[{1,1,1},
 {{1,7,5},
 {2,10,2} },
 {{4,0},{4,0}} ,{{-1,1},{-1,1},{-1,1}}]
```

Output:

$\{-1, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}\}$

أي إن الحل الأمثل للنظام هو :
$$\begin{bmatrix} x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

ي–قابلية الرصد للأنظمة الخطية التي تتضمن متجهة التحكم:

ليكن النظام معطى على النحو التالي:
$$\begin{aligned} & x(t+1) = Ax(t) + Bu(t+1)\ ; t = 0,1,2,......T-1 \\ & x(0) = x_0 \quad (unknown) \qquad\qquad (12) \\ & y(t) = Cx(t) \end{aligned}$$

نستطيع أن نكتب:
$$\begin{aligned} & y(0) = Cx(0) = Cx_0 \\ & y(1) = Cx(1) = C[Ax_0 + Bu(1)] = CAx_0 + CBu(1) \\ & y(2) = Cx(2) = C[Ax(1) + Bu(2)] = CA^2x_0 + CABu(1) + CBu(2) \\ & \vdots \\ & y(T-1) = CA^{T-1}x_0 + CA^{T-2}Bu(1) + ...CBu(T-1) \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) - CBu(1) \\ y(2) - CBu(1) - CBu(2) \\ . \\ y(T-1) - CA^{T-2}Bu(1) - ... - CBu(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ CA^{T-1} \end{bmatrix} x_0$$

نتيجة [3]: نقول إن النظام (12) قابل للرصد إذا تحقق الشرط التالي:
$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ CA^{T-1} \end{bmatrix} = n$$

مثال7: ندرس قابلية الرصد للنظام المعطى في المثال 1:

الحل: نشكل المصفوفة O من أجل T=2 :

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

أي إن النظام غير قابل للرصد.

أما إذا أخذنا $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ فيكون :

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 10 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 3$$

إي إن النظام قابل للرصد.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تم إيجاد الحل الأمثل لمخرجات النظام بوجود شروط على متجهة التحكم، وكذلك تم إيجاد الحل الأمثل لرصد متجهة الحالة الابتدائية. ويمكننا مستقبلا دراسة أمكانية إصلاح النظام في حال كونه غير قابلا للرصد

المراجع:

1. GAJIC, Z.; LELIC, M., *Modern Control Systems Engineering*. Prentice Hall International, London, 1996, 241–247.
2. HOU M.; MÜLLER P. C., *Design of observers for linear systems with unknown inputs*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-37, 1992, 871-875.
3. MURTA Y. *Optimal Control Methods for Linear Discrete-Time Economic System*, Nagoya Japan, 1982, 197
4. RAVICHANDRAN, C.S.; SUBHA, R. S.; MANIKANDAN, T., *Designing of PID Controller for Discrete Time Linear System Using Balanced Approach Reduced Order Model. American Journal of Applied Sciences*, Vol. 4, No. 3, 2007, 155-159.
5. RAVICHANDRAN, C.S.; SUBHA RANI, S.; SUNDARAPANDIAN, V. *Simple Method for Design of Reduced Order Output Feedback Controller for Discrete Time Linear System*. Gest International Transaction on Communication and Signal Processing, Vol. 9, No.1, 2006, 63-74.
6. STEFANI ; SHAHIAN ; SAVANT ; HOSTETTER, *Design of Feedback Systems*, Oxford University Press, New York, 2002, 650–652.

7. YAN-MING, FU.; GUANG-REN, DUAN.; SHEN-MIN SONG, *Design of Unknown Input Observer for Linear Time-delay Systems*. International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 2, No. 4, 2004, 530-535.