مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة – مقعرة .

الدكتور محمد سويقات*
الدكتور وديع علي**
رشا عثمان***

(تاريخ الإيداع 29 / 4 / 2009. قُبِل للنشر في 2009/8/5)

□ الملخّص □

يلعب تقريب مورو – يوشيدا دوراً مهمّاً في دراسة مسائل تحليل المتغيرات وتطبيقاتها. في هذا البحث سنستخدم تقريب مورو – يوشيدا لمتحولين في دراسة المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة –مقعرة ، ونقوم بتعميم النتائج المتعلقة بدراسة المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة درست من قبل أتوش وبيون وتيرا في [3] .

الكلمات المفتاحية: مجموع متغير – دالة محدبة –مقعرة – تقارب موسكو فوق/تحت– البيان– تقريب مورو –يوشيدا– مؤثر مطرد أعظمي– مؤثر التفاضل الجزئي.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
** مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
*** طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

The Variational Sum of Subdifferentials Operators of Convex-Concave Functions.

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr. Wadih Ali **
Rasha Othsman ***

(Received 29 / 4 / 2009. Accepted 5/8/2009)

□ ABSTRACT □

The Moreau-Yosida approximation plays a central role in the variationl analyses and their applications. In this paper, we used the Moreau-Yosida approximation of two variables to study the variationl sum of subdifferential operators of convex-concave functions. We generalize the results of variationl sum of convex functions in $[3]$ subdifferential operators of.

Key words : Variationl sum, convex-concave function, Mosco- epi\hypo-graphical-convergence, Moreau-Yosida approximation, maximal monotone operator, Subdifferential operatort.

***Associate Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
**** Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*** **Postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

ليكن المؤثران $A,B:X\rightrightarrows R$. ولنعرف المجموع الكلاسيكي (النقطي) للمؤثرين $A+B$ بالعلاقة:

$$dom\left(A+B\right)=dom\left(A\right)+dom\left(B\right)$$

$$\left(A+B\right)(x) \;=\; Ax+Bx$$

من المعروف أنّ هذا المفهوم غير متوافق في حل مسائل كثيرة في التحليل الرياضي، لذلك بدأ الكثير من الرياضيين بالتفكير بهذه المسألة، وقد توصل حديثاً كل من أتوش وبيون وتيرا في [3] بإيجاد صيغة أخرى لهذا المجموع سمي بالمجموع المتغير بحيث يكون أكثر توافقاً مع المسائل الرياضية المطروحة دون أية شروط مسبقة، وقد استخدم تقريب مورو – يوشيدا A_λ , B_μ للمؤثرين A,B على الترتيب في دراسة المجموع المتغير وتم تعريف هذا المجموع للمؤثرين A,B ورمز له بـ $A\underset{v}{+}B$ بالعلاقة:

$$A\underset{v}{+}B = graph-\liminf_{\Im}\left(A_\lambda + B_\mu\right)$$

حيث يعرف تقريب – يوشيدا A_λ ذو الدليل $\lambda>0$ للمؤثر A بالعلاقة:

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{I}-J_\lambda^A\right) \qquad \text{و} \qquad J_\lambda^A=\left(\mathrm{I}+\lambda A\right)^{-1} \; .$$

وكان من أهم تطبيقاته هو دراسة المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدالتين f,g محدبتين ونصف مستمرتين من الأدنى في [3] .

في هذا البحث، نقوم بدراسة هذا المجموع المتغير لدوال بمتحولين وبشكل خاص الدوال المحدبة – المقعرة والمغلقة، حيث نستخدم مفاهيم عدّة تتعلق بدراسة الدوال ذي المتحولين، خاصة مفهوم تقريب مورو – يوشيدا $A_{\lambda,\mu}$ ونبرهن أن المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدالتين K,L محدبتين –مقعرتين ومغلقتين يعطى بالعلاقة :

$$\partial K\underset{v}{+}\partial L=\partial\left(K+L\right) .$$

يتألف البحث من فقرتين أساسيتين، نعطي في الفقرة الأولى بعض التعاريف والمفاهيم المتعلقة بعناصر التحليل المحدب وعناصر التحليل المحدب–المقعر ونذكرّ بالنتائج التي تم التوصل إليها بالنسبة إلى مجموع المتغير لمؤثرين وأيضاً المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة بمتحول واحد. أما في الفقرة الثانية فسيتمّ مناقشة النتائج التي توصلنا إليها والمتعلقة بالمجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال بمتحولين محدبة –مقعرة .

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث في إعطاء مفهوم جديد لمجموع مؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة – مقعرة، ويتم ذلك بتعميم النتائج المتعلقة بالمجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة التي تمت دراستها في [3]. وللموضوع أهمية كبيرة في حل مسائل رياضية دون استخدام شروط على المؤثرات كما تستخدم في حالة المجموع الكلاسيكي.

طرائق البحث ومواده:

نعطي بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تساعدنا في عرض الموضوع، ونقوم باستخدام تقريب مورو– يوشيدا وطريقة تقارب البيان والتقارب فوق /تحت – البيان في برهان النتائج التي توصلنا إليها في هذا البحث .

تعاريف ومفاهيم أساسية:

نبدأ بتذكرة سريعة لبعض عناصر التحليل المحدب المتعلقة بمتحول واحد $[1,10,13,16]$.

لتكن $f\ \mathrm{X}\to R\cup\{+\infty\}$: دالة معرفة على الفضاء التوبولوجي X.

– نعرف فوق بيان الدالة f (epi graphe) بالعلاقة :

$$epif=\{(x,r)\ \in X\times R: f(x)\ \le\ r\}$$

– نقول عن الدالة f أنها محدبة إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة محدبة في $X\times R$ أو تعرف الدالة f بأنها محدبة إذا تحقق الشرط: من أجل كل $x\,,y$ من X ومن أجل كل $0\le\ \alpha\le 1$ فإن :

$$f\left[\alpha x+(1-\alpha)y\right]\le \alpha f\ (x)+(1-\alpha)f\ (y) \qquad (1)$$

ونقول عن الدالة f إنها مقعرة (concave) إذا كانت الدالة $(-f)$ محدبة.

– نقول عن الدالة f إنها دالة مستمرة من الأدنى (Lower semicontinuous) إذا كانت $epif$ مجموعة مغلقة.

– نقول عن الدالة f إنها خاصة (propre) إذا كان مجالها الفعلي:

$$domf=\{x\in \mathrm{X}: f(x)<\infty\}\neq\phi$$

– نرمز لمجموعة الدوال المحدبة والخاصة ونصف المستمرة من الأدنى بـ $\Gamma(X)$

– تعرف الدالة المرافقة $f^*: X^*\to \overline{R}$ للدالة f بالعلاقة:

$$f^*(x^*)=Sup\left\{<x,x^*>-f(x)\ ;\ x\in X\right\} \qquad (2)$$

– نعرف التفاضل الجزئي (subdifferential) للدالة f في النقطة x_0 من $domf$ ويرمز له بـ $\partial f(x_0)$ بالعلاقة:

$$\partial f\,(x_0):=\left\{x^*\in X: f(x)\ge f(x_0)+<x-x_0\,,x^*>\ ;\ \forall x\in X\right\} \qquad (3)$$

– نعرف دالة مورو– يوشيدا التقريبية ذات الدليل λ للدالة f بأنها الدالة f_λ المعرف بالعلاقة :

$$f_\lambda(x):=\inf_{u\in X}\left\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\right\} \qquad (4)$$

وقد برهن في $[1]$ أنه إذا كانت الدالة f من $\Gamma(x)$ فإن f_λ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق ومشتقها يكون تقريب يوشيدا A_λ للمؤثر المطرد الاعظمي $\mathrm{A}=\partial f$ أي:

$$(\partial f)_\lambda=\partial(f_\lambda) \qquad (5)$$

<u>**تعريف 1:**</u>

- **(تقارب المجموعات وفق مفهوم كوراتوفسكي):** $[1]$

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي و $\{C_n, C; n\in N\}$ متتالية من المجموعات الجزئية في X. نقول إنّ $(C_n)_{n\in N}$ تتقارب من C وفق مفهوم كوراتوفسكي إذا كان :

$$\tau-\limsup_n C_n \subseteq C \subseteq \tau-\liminf_n C_n$$

حيث:

$$\tau-\limsup_n C_n := \left\{x\in X : \exists (n_k)_{k\in N}; \exists (x_k)_{k\in N}\ \forall k\in N; x_k\in C_{n_k}; x_k \xrightarrow[k]{\tau} x\right\}$$

$$\tau-\liminf_n C_n := \left\{x\in X : \exists\ (x_n)_{n\in N};\ x_n\in C_n\ ; x_n \xrightarrow[n]{\tau} x\right\}$$

ونكتب اختصاراً : $C=\tau-\lim_n C_n$ أو $C_n \xrightarrow{\tau} C$.

- **(تقارب المجموعات وفق مفهوم موسكو):** $[11]$

إذا كان X فضاء باناخ انعكاسي و كانت $\{C_n, C; n\in N\}$ متتالية من المجموعات الجزئية المحدبة والمغلقة في X. نقول إنّ $(C_n)_{n\in N}$ تتقارب من C وفق مفهوم موسكو إذا كان $s-\limsup_n C_n \subseteq C \subseteq w-\liminf_n C_n$ ونكتب اختصاراً : $C=M-\lim_n C_n$ أو $C_n \xrightarrow{M} C$.

حيث s (w) تشير إلى التبولوجيا القوية (الضعيفة)على X.

- **(تقارب الدوال وفق مفهوم موسكو– فوق البيان):** $[1,11]$

إذا كان X فضاء باناخ انعكاسي و كانت $\{f_n, f: X\to R\cup\{\infty\}, n\in N\}$ متتالية من الدوال من $\Gamma(X)$. نقول إنّ $(f_n)_{n\in N}$ تتقارب نحو f وفق مفهوم موسكو – فوق البيان إذا كانت متتالية المجموعات $\{epif_n; n\in N\}$ تتقارب وفق مفهوم موسكو من $epif$. وهذا يكافئ القول إنّه من أجل كل $x\in X$ فإن الشرطين الآتيين محققان:

$$i)\ \forall\ (x_n)_{n\in N};\ \ x_n \xrightarrow[n]{w} x : f(x) \le \liminf_n f_n(x_n)$$

$$ii)\ \exists\ (\zeta_n)_{n\in N};\ \zeta_n \xrightarrow[n]{s} x : f(x) \ge \limsup_n f_n(\zeta_n)$$

ونكتب: $f=Mosco-epi\lim_n f_n$ أو اختصاراً $f=M-\lim_{e\,n} f_n$ أو $f_n \xrightarrow{M} f$

لنعدّ من الآن وصاعداً $X=H$ فضاء هلبرت ولنعطي بعض التعاريف المتعلقة بالمؤثرات $[2,3,9,17]$.

ليكن $A: H \rightrightarrows H$ مؤثراً متعدد القيم ، نعرف المجال الفعلي للمؤثر A ويرمز له $domA$ بالشكل:

$$dom\,A := \{x\in H\ /\ Ax\ne\phi\}$$

– نعرف بيان المؤثر A $(graph\,A)$ بالعلاقة:

$$(6)\ graph\,A := \{(x,y)\in \mathrm{H}\times\mathrm{H}\ /\ y\in \mathrm{A}x\}$$

– نعرف المؤثر العكسي A^{-1} للمؤثر A بالعلاقة:

$$y\in \mathrm{A}x \Leftrightarrow x\in \mathrm{A}^{-1}y$$

– نرمز بـ $\overline{\mathrm{A}}$ للمؤثر A المعرف بالعلاقة :

$$graph\,\overline{\mathrm{A}} := \overline{graph\,\mathrm{A}}$$

– نقــول عــن المــؤثر A إنّــه مــؤثر مطــرد ًo إذا حقــق العلاقــة: مــن أجــل كــل $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in graphA$ فإن :

$$(7) \quad < y_2-y_1,\, x_2-x_1 > \;\geq 0$$

– يكون المؤثر A أعظميا إذا كانت مجموعة نقاط بيانه غير محتواة في مجموعة بيان أي مؤثر مطرد آخر.

ليكن المؤثران $A,B:H \rightrightarrows H$ ذات القيم المتعددة، ليس بالضرورة خطيان، ولنعرف المجموع الجبري (المجموع الكلاسيكي) للمؤثرين $A+B$ بالعلاقة:

$$dom\,(A+B)=dom\,(A)+dom\,(B)$$

$$(8) \qquad (A+B)(x) \;=\; Ax+Bx$$

إن هذا المفهوم الجبري لمجموع مؤثرين غير متوافق دوماً مع بعض المسائل الرياضية، لذلك كان لابد من إيجاد مفهوم جديد عوضاً عن هذا المفهوم سمي بالمجموع المتغير للمؤثرين انظر $[3]$.

سنرمز بـ I للمجموعة المعطاة بالعلاقة : $I:=\{(\lambda,\mu)\in R^2;\lambda\geq 0,\mu\geq 0,\lambda+\mu\neq 0\}$. من أجل كــل $(\lambda,\mu)\in I$، ســنعدّ المجمــوع الجبــري $C_{\lambda,\mu}:=A_\lambda+B_\mu$ حتــى لا يحــدث التبــاس نعــدّ $A_0=A$ و $B_0=B$. نشير إلى أنه بسبب $\lambda+\mu\neq 0$ فإن واحد من المؤثرات A_λ، B_μ يكون ليبشز مستمراً وبالتالي $C_{\lambda,\mu}$ يكون مؤثراً مطرداً أعظمياً $[7]$. لنرمز بـ $\Im$ لمرشحة كل الجوارات ذات المركز صفر في I و نرمز للنهاية الحدية الدنيا (على الترتيب .النهاية الحدية العليا) للأسرة $\{graph\; C_{\lambda,\mu};\lambda,\mu\in\tau\}$ بـ $graph-\liminf\limits_{\Im} C_{\lambda,\mu}$ (على الترتيب. $graph-\limsup\limits_{\Im} C_{\lambda,\mu}$) بالنسبة إلى التبولوجيا المعرفة على $H\times H$ على كل المرشحة $\Im$.

نذّكر أن :

- (x,y)نقطة من $graph-\liminf\limits_{\tau} C_{\lambda,\mu}$ إذا كان من أجل كل جوار Q للنقطة (x,y)يوجد $I\in\Im$ ومن أجل كل $\lambda,\mu\in I$ فإن: $graphC_{\lambda,\mu}\cap Q\neq\phi$.
- (x,y)نقطة من $graph-\limsup\limits_{\tau} C_{\lambda,\mu}$ إذا كان من أجل كل جوار Q للنقطة (x,y) ومن أجل كل $I\in\Im$ يوجد $\lambda,\mu\in I$ بحيث: $graphC_{\lambda,\mu}\cap Q\neq\phi$.

نقول إن الأسرة$\{C_{\lambda,\mu};\lambda,\mu\in\tau\}$متقاربة وفق **مفهوم البيان** (**(graph convergence)**) نحو C ونرمز لها بـ $graph-\lim\limits_{\Im} C_{\lambda,\mu}=C$ إذا كان :

$$\mathrm{C} \;=\; graph-\liminf_{\Im} C_{\lambda,\mu} = \; graph-\limsup_{\Im} C_{\lambda,\mu} \qquad (9)$$

تعريف 2 : يعرف المجموع المتغير للمؤثرين المطردين الأعظميين A,B ونرمز له بـ $A\underset{v}{+}B$ بأنه المؤثر المعطى بالعلاقة:

$$A\underset{v}{+}B = graph-\liminf_{\Im}\left(A_\lambda+B_\mu\right)$$

بما أن التبولوجيا المعرفة على $H \times H$ تُعدّ قابلة للعد من المرتبة الأولى والمرشحة τ قاعدة قابلة للعد، فإنه يكون لدينا (x,y) نقطة من $graph\left(A \underset{v}{+} B\right)$، إذا وفقط إذا كانت، من أجل كل المتتاليات $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ و $(\mu_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق $\lambda_n \geq 0$، $\mu_n \geq 0$، $\lambda_n + \mu_n \neq 0$، $\lim \lambda_n = \lim_n \mu_n = 0$، توجد متتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ بحيث يكون: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ، $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ وإن $y_n \in \left(A_{\lambda_n} + B_{\mu_n}\right)(x_n)$

تعطي المبرهنة الآتية بعض الخصائص المتعلقة بالمجموع المتغير.

مبرهنة 3: $[3]$:

من أجل المؤثرين $A, B : \mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{H}$ لدينا الآتي :

1) إن $A \underset{v}{+} B$ عملية معرفة دوماً

2) إن. $A \underset{v}{+} B$ مؤثر مطرد و $dom\left(A \underset{v}{+} B\right) \neq \phi$ إذا كان $dom(A) \cap dom(B) \neq \phi$.

3) إن. $B \underset{v}{+} A = A \underset{v}{+} B$ (العملية تبديليه)

4) إن. $A \underset{v}{+} B$ مؤثر مطرد أعظمي إذا وفقط إذا وجدت النهاية $graph - \lim_{\tau}\left(A_\lambda + B_\mu\right)$ وفق مفهوم البيان.

الآن لننتقل للدوال بمتحولين: نعدّ كل من X ,Y فضاء هلبرت ، وسنقوم بتذكرة سريعة لبعض عناصر التحليل المحدب – المقعر $[5,6,13,16,18]$.

لتكن $K : X \times Y \to \overline{R}$ دالة بمتحولين .

– نقول عن الدالة K أنهّا محدبة–مقعرة(convex-concave) إذا كانت محدبة بالنسبة إلى المتحوّل الأول ومقعرة بالنسبة إلى المتحوّل الثاني أي أن $x \to K(.,y)$ دالة محدبة من أجل y ثابتة وأن $y \to K(x,.)$ دالة مقعرة من أجل x ثابتة .

– نعرف المجال الفعلي للدالة K ويرمز له بـ $domK$ بالعلاقة: $domK = dom_1 K \times dom_2 K$

حيث:

$$dom_1 K = \{x \in X : K(x,.) > -\infty\}$$

$$dom_2 K = \{y \in Y : K(.,y) < +\infty\}$$

– نعرف الدالة القرينة المحدبة(parent convex) F للدالة K، $F : X \times Y^* \to \overline{R}$ بالعلاقة :

$$F(x,y^*) = \sup_{y\in Y}\{K(x,y) + \langle y, y^* \rangle\} \qquad (10)$$

والدالة القرينة المقعرة (parent concave) G للدالة K ، $G : X^* \times Y \to \overline{R}$ بالعلاقة:

$$G(x,y) = \inf_{x\in X}\{K(x,y) - \langle x, x^* \rangle\} \qquad (11)$$

من الواضح أن F دالة محدبة على $X \times Y^*$ و G دالة مقعرة على $X^* \times Y$.

– نقول عن الدالة K إنها مغلقة إذا كان $F = (-G)^*$ و $(-G) = F^*$، حيث F^* و G^* هي الدوال المرافقة لـ F و G على الترتيب، ونقول إن K دالة خاصة إذا كان $domK \neq \phi$ ونقول عن دالتين أنهما متكافئتان إذا كان لهما الدوال القرينة نفسها.

– نعرف صف التكافؤ لدالة محدبة–مقعرة K ويرمز له بـ $[\underline{K},\overline{K}]$ بأنه مجموعة الدوال المحصورة بين $\underline{K}$ و $\overline{K}$ حيث :

$$\underline{K}(x,y)=\sup_{x^*\in X^*}\left\{G(x^*,y)+<x,x^*>\right\} \qquad (12)$$

$$\overline{K}(x,y)=\inf_{y^*\in Y^*}\left\{F(x,y^*)-<y,y^*>\right\} \qquad (13)$$

وقد برهن من قبل روكافولار [13] انه يوجد تقابل واحد لواحد بين مجموعة صفوف التكافؤ المغلقة لدوال محدبة–مقعرة $[\underline{K},\overline{K}]$ وبين مجموعة الدوال المحدبة المغلقة $\Gamma(X\times Y^*)$.

– نعرف النقطة $(\bar{x},\bar{y})$ بأنها نقطة سرجية للدالة K إذا حققت العلاقة :

$$K(\bar{x},y)\le K(\bar{x},\bar{y})\le K(x,\bar{y});\qquad \forall(x,y)\in X\times Y$$

ونرمز لمجموعة النقاط السرجية للدالة K بـ $\arg\min-\max K$ أي أن :

$$\arg\min-\max K:=\{(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y\,/\,K(\bar{x},y)\le K(\bar{x},\bar{y})\le K(x,\bar{y}),\quad \forall(x,y)\in X\times Y\}$$

– نعرف التفاضل الجزئي ∂K لدالة محدبة–مقعرة K انظر [5] [13] بالعلاقة:

$$\partial K(x,y):=\partial_1 K(x,y)\times\left(-\partial_2(-K)(x,y)\right)$$

حيث $\partial_1 K,\partial_2 K$ يدل على التفاضل الجزئي للدالة K بالنسبة إلى المتحول الأول ،المتحول الثاني على الترتيب .

نعرف أيضا المؤثر التفاضلي A^K المرتبط بـ K بالعلاقة:

$$(14)\,A^K(x,y):=\partial_1 K(x,y)\times\partial_2(-K)(x,y)$$

وبرهن في [13] إذا كانت K دالة محدبة–مقعرة مغلقة فإن A^K مؤثر مطرد أعظمياً ومن الضروري أن نذَّكر بالتكافؤ الآتي :

$$(x^*,y^*)\in\partial K(x,y)\Leftrightarrow(x^*,-y)\in\partial F(x,y^*)$$

$$(x^*,y^*)\in\partial A^K(x,y)\Leftrightarrow(x^*,y)\in\partial F(x,y^*)$$

من أجل كل دالة محدبة–مقعرة مغلقة K ،تعرف دالة تقريب مورو–يوشيدا $K_{\lambda,\mu}$ ذو الدليلين λ,μ بالعلاقة:

$$K_{\lambda,\mu}(x,y):=\inf_{u\in X}\sup_{v\in Y}\left\{K(u,v)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\}$$

$$=\sup_{v\in Y}\inf_{u\in X}\left\{K(u,v)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\} \qquad (15)$$

إن هذه المسألة تقبل نقطة سرجيه وحيدة حلاً لها ويرمز لهابـ$(x_{\lambda,\mu},y_{\lambda,\mu})$ انظر [5,6] وتتصف بالعلاقة:

$$\left(\frac{x-x_{\lambda,\mu}}{\lambda},-\frac{y-y_{\lambda,\mu}}{\mu}\right)\in\partial K(x_{\lambda,\mu},y_{\lambda,\mu})$$

وقد برهن في [6] إن $K_{\lambda,\mu}$ دالة محدبة–مقعرة مغلقة ذات قيم منتهية معرفة في كل مكان وقابلة للاشتقاق من المرتبة الأولى ويعطى مشتقها بالعلاقة :

$$\nabla K_{\lambda,\mu}(x,y)=\left(\frac{x-x_{\lambda,\mu}}{\lambda},-\frac{y-y_{\lambda,\mu}}{\mu}\right)$$

زيادة على ذلك برهن أن $K_{\lambda,\mu}$ دالة ليبشتز− مستمرة على مجموعات محدودة.

أخيراً نعرف مؤثر تقريب مورو− يوشيد $A^K_{\lambda,\mu}$ بالعلاقة:

$$A^K_{\lambda,\mu}(x,y)=\left(\frac{x-x_{\lambda,\mu}}{\lambda},-\frac{y-y_{\lambda,\mu}}{\mu}\right)$$

وقد برهن في $[5]$ أن : $A^K_{\lambda,\mu} = A^{K_{\lambda,\mu}}$ ومن اجل $\lambda=\mu$ فأن :

$$(16)\ A^{K_{\lambda,\lambda}} = A^K_{\lambda,\lambda} = \left(A^K\right)_\lambda$$

حيث A^K عرفت في (14).

تعريف 4: $[10,6]$

لتكن $K\in[\underline{K},\overline{K}]$ و $L\in[\underline{L},\overline{L}]$ نعرف مجموع الداليتين L,K بأنه صف تكافؤ من الدوال المحدبة−المقعرة المغلقة يرمز له بـ $[\underline{w},\overline{w}]$ كما يأتي:

$$\overline{w}=\begin{cases}\overline{K}(x,y)+\overline{L}(x,y); & x\in dom_1K\cap dom_1L\\ +\infty & ;\ x\notin dom_1K\cap dom_1L\end{cases}$$

$$\underline{w}=\begin{cases}\underline{K}(x,y)+\underline{L}(x,y); & y\in dom_2K\cap dom_2L\\ -\infty & ;\ y\notin dom_2K\cap dom_2L\end{cases}$$

إن كل من $\underline{w},\overline{w}$ دالة محدبة −مقعرة وتحقق العلاقة:

$$w\in[\underline{w},\overline{w}]\quad \text{لكل}\quad \underline{w}\le w\le\overline{w}$$

تعريف 5: (تقارب موسكو – فوق / تحت – البيان): $[6]$

ليكن X,Y فضائي باناخ انعكاسيين ولتكن $\{K^n, K:X\times Y\to\overline{R}, n\in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة – المقعرة. نقول عن المتتالية إنها تتقارب وفق موسكو فوق− تحت البيان إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$$i)\ \forall(x,y)\in X\times Y,\ \forall y_n\xrightarrow[n]{w}y,\ \exists x_n\xrightarrow[n]{s}x:\limsup_n K^n(x_n,y_n)\le K(x,y)$$

$$ii)\ \forall(x,y)\in X\times Y,\ \forall x_n\xrightarrow[n]{w}x,\ \exists y_n\xrightarrow[n]{s}y:\liminf_n K^n(x_n,y_n)\ge K(x,y)$$

ونكتب : $K=Mosco-epi\setminus hypo-\lim_n K_n$ أو اختصاراً $K=M-e\setminus h-\lim_n K_n$.

في نهاية هذه الفقرة نذّكر بالعلاقة بين تقارب متتالية من الدوال المحدبة – المقعرة وفق موسكو فوق− تحت البيان وتقارب متتالية تفاضلاتها الجزئية وفق مفهوم البيان.

نظرية 6 : $[6, theorm\ 6.1]$

ليكن X,Y فضائي باناخ انعكاسيين ولتكن $\{K^n, K:X\times Y\to\overline{R}, n\in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة – المقعرة المغلقة. عندئذ لدينا التكافؤ : $(i)\Leftrightarrow(ii)$ حيث

$$\text{i)}\ K = Mosco-epi\setminus hypo-\lim_n K_n$$

$$\textbf{ii)}\ \partial K = graph - \lim_n \partial K_n$$

النتائج والمناقشة :

مبرهنة1:

بفرض $K \in [\underline{K}, \overline{K}]$ و $L \in [\underline{L}, \overline{L}]$ ولتكن F_1 و F_2 (على الترتيب G_1 و G_2) الدوال القرينة المحدبة (على الترتيب الدوال القرينة المقعرة) لكل من K و L عندئذ من أجل كل $0 < \lambda$، $0 < \mu$ ومن أجل كل $\underline{w} \le w \le \overline{w}$ فإن:

$$w = M - e/h - \lim_{\lambda,\mu \to 0} \left(K_{\lambda,\lambda} + L_{\mu,\mu} \right)$$

البرهان:

سنتحقق من الشرطين في التعريف 4.5 :

1- لكل $(x,y) \in dom\overline{w}$ ومن أجل كل $y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} y$ يوجد $x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} x$ بحيث يكون:

$$\limsup_{\tau} \left(K_{\lambda,\lambda} + L_{\mu,\mu} \right) \left(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu} \right) \le \overline{w}(x,y)$$

2- لكل $(x,y) \in dom\underline{w}$ ومن أجل كل $x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} x$ يوجد $y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} y$ بحيث يكون :

$$\underline{w}(x,y) \le \liminf_{\tau} \left(K_{\lambda,\lambda} + L_{\mu,\mu} \right) \left(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu} \right)$$

لنبرهن 1) : ليكن $(x,y) \in dom\overline{w}$ عندئذ نستطيع أن نعرف $x_{\lambda,\mu} = x \xrightarrow{s} x$ ومن أجل كل $y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} y$ نكتب حسب تعريف دالة مورو – يوشيدا في العلاقة (15) :

$$\left(K_{\lambda,\lambda} + L_{\mu,\mu} \right) \left(x, y_{\lambda,\mu} \right) = \sup_v \inf_u \left\{ K(u,v) + \frac{1}{2\lambda} \|x-u\|^2 - \frac{1}{2\lambda} \|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} +$$

$$+ \sup_v \inf_u \left\{ L(u,v) + \frac{1}{2\mu} \|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu} \|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\}$$

$$\le \sup_v \inf_u \left\{ \overline{K}(u,v) + \frac{1}{2\lambda} \|x-u\|^2 - \frac{1}{2\lambda} \|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} +$$

$$\sup_v \inf_u \left\{ \overline{L}(u,v) + \frac{1}{2\mu} \|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu} \|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\}$$

ومن أجل $x = u$ فإن :

$$= \sup_v \left\{ \overline{K}(u,v) - \frac{1}{2\lambda} \|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} + \sup_v \left\{ \overline{L}(u,v) - \frac{1}{2\mu} \|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\}$$

بالتعويض عن $\overline{K}, \overline{L}$ كل بقيمته ينتج:

$$= \sup_v \left\{ \inf_{y^*} \left(F_1(x,y^*) - \langle y^*, v \rangle \right) - \frac{1}{2\lambda} \|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} +$$

$$\sup_{v}\left\{\inf_{y^*}\left(F_2(x,y^*)-<y^*,v>\right)-\frac{1}{2\mu}\left\|y_{\lambda,\mu}-v\right\|^2\right\}$$

$$\leq \inf_{y^*}\sup_{v}\left\{\left(F_1(x,y^*)-<y^*,v>\right)-\frac{1}{2\lambda}\left\|y_{\lambda,\mu}-v\right\|^2\right\}+$$

$$\inf_{y^*}\sup_{v}\left\{\left(F_2(x,y^*)-<y^*,v>\right)-\frac{1}{2\mu}\left\|y_{\lambda,\mu}-v\right\|^2\right\}$$

$$=\inf_{y^*}\left\{F_1(x,y^*)+\sup_{v}(-<y^*,v>-\frac{1}{2\lambda}\left\|y_{\lambda,\mu}-v\right\|^2)\right\}+$$

$$\inf_{y^*}\left\{F_2(x,y^*)+\sup_{v}(-<y^*,v>-\frac{1}{2\mu}\left\|y_{\lambda,\mu}-v\right\|^2)\right\}$$

بفرض $z=y_{\lambda,\mu}-v$ واستخدام العلاقة **(2)** نجد :

$$=\inf_{y^*}\left\{F_1(x,y^*)-<y_{\lambda,\mu},y^*>+\frac{\lambda}{2}\left\|y^*\right\|^2\right\}+\inf_{y^*}\left\{F_2(x,y^*)-<y_{\lambda,\mu},y^*>+\frac{\mu}{2}\left\|y^*\right\|^2\right\}$$

بأخذ النهاية العليا للعلاقتين عندما $\lambda\to 0$ و $\mu\to 0$ فإن

$$\limsup_{\tau}\left(K_{\lambda,\lambda}+L_{\mu,\mu}\right)\left(x,y_{\lambda,\mu}\right)\leq\inf_{y^*}\left\{F_1(x,y^*)-<y,y^*>\right\}+\inf_{y^*}\left\{F_2(x,y^*)-<y,y^*>\right\}$$

$$=\left(\overline{K}+\overline{L}\right)(x,y)$$

وهذه العلاقة صحيحة من أجل كل $y_{\lambda,\mu}\xrightarrow{w}y$ وبالتالي :

$$\limsup_{\mathfrak{I}}\left(K_{\lambda,\lambda}+L_{\mu,\mu}\right)(x_{\lambda,\mu},y_{\lambda,\mu})\leq\overline{w}\,(x,y)$$

الآن لنبرهن 2) : من أجل $(x,y)\in dom\underline{w}$ نستطيع إن نعرف $y_{\lambda,\mu}=y\xrightarrow{s}y$ ومن اجل كل $x_{\lambda,\mu}\xrightarrow{w}x$ نكتب:

$$\left(K_{\lambda,\lambda}+L_{\mu,\mu}\right)(x_{\lambda,\mu},y)=\inf_{u}\sup_{v}\left\{K(u,v)+\frac{1}{2\lambda}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2-\frac{1}{2\lambda}\left\|y-v\right\|^2\right\}+$$

$$+\inf_{u}\sup_{v}\left\{L(u,v)+\frac{1}{2\mu}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2-\frac{1}{2\mu}\left\|y-v\right\|^2\right\}$$

$$\geq\inf_{u}\sup_{v}\left\{\underline{K}(u,v)+\frac{1}{2\lambda}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2-\frac{1}{2\lambda}\left\|y-v\right\|^2\right\}+$$

$$\inf_{u}\sup_{v}\left\{\underline{L}(u,v)+\frac{1}{2\mu}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2-\frac{1}{2\mu}\left\|y-v\right\|^2\right\}$$

من أجل $v=y$ يكون:

$$\geq\inf_{u}\left\{\underline{K}(u,v)+\frac{1}{2\lambda}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2\right\}+\inf_{u}\left\{\underline{L}(u,v)+\frac{1}{2\mu}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2\right\}$$

$$=\inf_{u}\left\{\sup_{x^*}\left(G_1(x^*,y)+<x^*,x>\right)+\frac{1}{2\lambda}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2\right\}+$$

$$\inf_u\left\{\sup_{x^*}\left(G_2(x^*,y)\ +<x^*,x>\right)+\frac{1}{2\mu}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2\right\}$$
$$\geq \sup_{x^*}\left\{G_1(x^*,y)+\inf_u\left(<x^*,x>+\frac{1}{2\lambda}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2\right)\right\}+$$
$$\sup_{x^*}\left\{G_2(x^*,y)+\inf_u\left(<x^*,x>+\frac{1}{2\mu}\left\|x_{\lambda,\mu}-u\right\|^2\right)\right\}$$

بفرض $z=x_{\lambda,\mu}-u$ واستخدام العلاقة **(2)** نجد :

$$=\sup_{x^*}\left\{G_1(x^*,y)+<x^*,x_{\lambda,\mu}>-\frac{\lambda}{2}\left\|x^*\right\|^2\right\}+\sup_{x^*}\left\{G_2(x^*,y)+<x^*,x_{\lambda,\mu}>-\frac{\mu}{2}\left\|x^*\right\|^2\right\}$$

ومنه بأخذ النهاية الدنيا للمتراجحة السابقة عندما $\lambda\to 0$ و $\mu\to 0$ فإننا نحصل على :

$$\liminf_{\tau}\left(K_{\lambda,\lambda}+L_{\mu,\mu}\right)(x_{\lambda,\mu},y)\geq\left(\underline{K}+\underline{L}\right)(x_{\lambda,\mu},y)$$

وهذه العلاقة صحيحة من اجل $x_{\lambda,\mu}\xrightarrow{w}x$

إذن:

$$\liminf_{\tau}\left(K_{\lambda,\lambda}+L_{\mu,\mu}\right)\left(x_{\lambda,\mu},y_{\lambda,\mu}\right)\geq\underline{w}\left(x,y\right)$$

وبذلك يتم برهان النظرية.

<u>نظرية 2 :</u>

لتكن $K\in[\underline{K},\overline{K}]$ و $L\in[\underline{L},\overline{L}]$ دالتين محدبتين–مقعرتين مغلقتين عندئذ من اجل كل $\lambda>0$ و $\mu>0$ يكون $A^{K_{\lambda,\lambda}}+A^{L\mu,\mu}$ مؤثر مطرد أعظمي وتتحقق العلاقة:

$$A^{K_{\lambda,\lambda}}+A^{L\mu,\mu}=A^{K_{\lambda,\lambda}+L\mu,\mu}\qquad(17)$$

من اجل برهان النظرية لا بد من إعطاء المبرهنة المساعدة الآتية:

<u>مبرهنة مساعدة 3:</u>

لتكن $K\in[\underline{K},\overline{K}]$ و $L\in[\underline{L},\overline{L}]$ دالتين محدبتين–مقعرتين مغلقتين بحيث يكون

$$(18)\ domL\cap domK\neq\phi$$

عندئذ إذا كان A^K+A^L مؤثر مطرد أعظمي فان العلاقة الآتية محققة :

$$A^w=A^K+A^L\qquad(19)$$ لكل $w\in[\underline{w},\overline{w}]$.

<u>البرهان:</u>

إنّ كل من المؤثرين A^K,A^L مطرد أعظمي حسب $[13]$ ومجموع مؤثرين أعظميين غير أعظمي بشكل عام لكن اعتماداً على الفرض $domL\cap domK\neq\phi$ فإن المجموع A^K+A^L يكون مؤثراً مطرداً أعظمياً حسب $[7,8]$.

من أجل برهان العلاقة السابقة يكفي برهان $A^K+A^L\subseteq A^w$ لأن الاحتواء الآخر محقق دوماً $[13]$.

ليكن $(z_1^*,z_2^*)\in\left(A^L+A^K\right)(x,y)$ من أجل $x\in dom_1L\cap dom_1K$ و $y\in dom_2L\cap dom_2K$

عندئذ يوجد $(x_1^*,y_1^*)\in A^L$ و $(x_2^*,y_2^*)\in A^K$ مع $z_1^{\ *}=x_1^{\ *}+x_2^{\ *}$ و $z_2^{\ *}=y_1^{\ *}+y_2^{\ *}$ بحيث يكون:

$$(20)\, x_1^{\,*} \in \partial_1 L\left(x,y\right),\quad y_1^{\,*} \in \partial_2\left(-L\right)\left(x,y\right)$$
$$(21)\ x_2^{\,*} \in \partial_1 K\left(x,y\right),\quad y_2^{\,*} \in \partial_2\left(-K\right)\left(x,y\right)$$

من (20) نستنتج أنّ :

$$(22)\left.\begin{array}{l} L\left(z,y\right) \ge L\left(x,y\right) + < x_1^*, z-y >,\quad \forall z \in X \\ L\left(x,g\right) \le L\left(x,y\right) + < y_1^*, g-y >,\quad \forall g \in Y \end{array}\right\}$$

ومن(21) نستنتج أنّ:

$$\left.\begin{array}{l} K(z,y) \ge K(x,y) + < x_2^*, z-y >,\quad \forall z \in X \\ K(x,g) \le K(x,y) - < y_2^*, g-y >,\quad \forall g \in Y \end{array}\right\} \qquad (23)$$

وبما أن $\underline{K} \le K \le \overline{K}$ و $\underline{L} \le L \le \overline{L}$ فإن (21) تكتب بالشكل :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{L}(z,y) \ge \underline{L}(x,y) + < x_1^*, z-y >,\quad \forall z \in X \\ \underline{L}(x,g) \le \overline{L}(x,y) - < y_1^*, g-y >,\quad \forall g \in Y \end{array}\right\} \qquad (24)$$

وتكتب (22) بالشكل :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{K}(z,y) \ge \underline{K}(x,y) + < x_2^*, z-y >,\quad \forall z \in X \\ \underline{K}(x,g) \le \overline{K}(x,y) - < y_2^*, g-y >,\quad \forall g \in Y \end{array}\right\} \qquad (25)$$

بجمع (23) و (24) طرفاً إلى طرف نجد :

$$(26)\quad \left.\begin{array}{l} \left(\overline{K}+\overline{L}\right)(z,y) \ge \left(\underline{K}+\underline{L}\right)(x,y) + < x_2^* + x_1^*, z-y >,\quad \forall z \in X \\ \left(\underline{K}+\underline{L}\right)(x,g) \le \left(\overline{K}+\overline{L}\right)(x,y) - < y_2^* + y_1^*, g-y >,\quad \forall g \in Y \end{array}\right\}$$

وبما أنّ $x \in dom_1 L \cap dom_1 K$ و $y \in dom_2 L \cap dom_2 K$ فإننا نستطيع كتابة (26) بالشكل :

$$\left.\begin{array}{l} w(z,y) \ge w(x,y) + < z_1^*, z-y >,\quad \forall z \in X \\ w(x,g) \le w(x,y) - < z_2^*, g-y >,\quad \forall g \in Y \end{array}\right\}$$

إي أن:
$$z_1^* \in \partial_1 w\left(x,y\right),\quad z_2^* \in \partial_2\left(-w\right)\left(x,y\right)$$

ومنه : $(z_1^*, z_2^*) \in A^w\ ,\ \ \underline{w} \le w \le \overline{w}$ وهو المطلوب .

برهان النظرية:

نعلم حسب بريزيس ([7]مبرهنة 2.4) أنّه إذا كان لدينا مؤثران أعظميان معرفان في كل مكان، فإنّ مجموعهما يكون مؤثراً مطرداً أعظمياً وبما أن كل من المؤثرين $A^{K_{\lambda,\lambda}}, A^{L\mu,\mu}$ مطرد أعظمي ومعرف في كل مكان أي معرف من اجل كل القيم (x,y) من $X \times Y$ فإن مجموعهما $A^{K_{\lambda,\lambda}} + A^{L\mu,\mu}$ يكون أيضاً مطرداً أعظمياً . إذن بتطبيق المبرهنة المساعدة 5.3 نحصل على $A^{K_{\lambda,\lambda}} + A^{L\mu,\mu} = A^{K_{\lambda,\lambda}+L\mu,\mu}$ ، وبهذا يتم برهان النظرية.

نظرية 4:

ليكن $K \in [\underline{K},\overline{K}]$ و $L \in [\underline{L},\overline{L}]$ دالتين محدبتين–مقعرتين مغلقتين عندئذ:

$$A^K \underset{v}{+} A^L = A^{K+L}$$

وهذا يعني أنّ:

$$\partial K \underset{v}{+} \partial L = \partial(K+L)$$

البرهان:

من أجل كل $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ لدينا حسب العلاقة (16) أن $A^{K_{\lambda,\lambda}} = \left(A^K\right)_\lambda$ وأن $A^{L_{\mu,\mu}} = \left(A^L\right)_\mu$

وبالتالي : $A^{K_{\lambda,\lambda}} + A^{L_{\mu,\mu}} = \left(A^K\right)_\lambda + \left(A^L\right)_\mu$

ومنه حسب النظرية 5.3 نحصل على الآتي:

$$A^{w_{\lambda,\mu}} = A^{\left(K_{\lambda,\lambda}+L_{\mu,\mu}\right)} = \left(A^K\right)_\lambda + \left(A^L\right)_\mu$$

من جهة أخرى لدينا حسب النظرية 5.1 أن : $W = M - e/h - \lim\limits_{\lambda,\mu\to 0} W_{\lambda,\mu}$ وبتطبيق النظرية 4.6 يكون:

$$graph-\lim_{\Im} A^{w_{\lambda,\mu}} = A^w$$

حيث : $W_{\lambda,\mu} = K_{\lambda,\lambda} + L_{\mu,\mu}$ و $W = K + L$

ومنه

$$graph-\lim_{\Im}\left(\left(A^K\right)_\lambda + \left(A^L\right)_\mu\right) = A^w$$

$$A^K \underset{v}{+} A^L = A^w = A^{K+L}$$

وهذا يعني أيضاً أنّ: $\partial K \underset{v}{+} \partial L = \partial(K+L)$. وهو المطلوب.

بتطبيق هذه النظرية نحصل على ا المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة في فضاء هلبرت (النظرية 2 في [3]).

نتيجة 5 : لتكن كل من $f: X \to R \cup \{+\infty\}$ و $g: X \to R \cup \{+\infty\}$ دالة محدبة نصف مستمرة من الأدنى ، خاصة. أي إذا فرضنا $x \to K(x,y) = f(x)$ و $x \to L(x,y) = g(x)$.

عندئذ $\partial K = \partial f$ و $\partial L = \partial g$ ويكون : $\partial f \underset{v}{+} \partial g = \partial(f+g)$ وهذا يكافئ :

$$graph-\lim_{\tau}\left[(\partial f)_\lambda + (\partial g)_\lambda\right] = graph-\lim_{\tau} \partial\left(f_\lambda + g_\lambda\right) = \partial(f+g) .$$

الاستنتاجات والتوصيات:

إن لمفهوم المجموع المتغير لمؤثرين مطردين أعظميين دوراً مهمّاً في حل العديد من المسائل الأساسية المطروحة في التحليل الرياضي، وبشكل خاص المجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة والمجموع المتغير لمؤثرات التفاضلات الجزئية لدوال محدبة –مقعرة. قد تبين أنّ أغلب الدراسات حول هذا المفهوم تمت في فضاءات منتهية البعد وفضاءات هلبرت.ونظراً لأهمية الموضوع وتطبيقاته نوصي بأن تعمم هذه الدراسة إلى فضاءات باناخ الانعكاسية وفضاءات باناخ العامة.

المراجع:

[1] ATTOUCH, H. : *Variational convergence for functions and operators*, Pitman, London, 1984, 420

[2] ATTOUCH, H: *On the maximality of the sum of two maximal notons operators;* Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.,5, n° 2, 1981, 143-147.

[3] ATTOUCH, H., BAILLON, J.P., THERA, M. : *Variational sum of maximal monotone operators*, J.Convex Ana., 1994, 1-29.

[4] ATTOUCH, H; AZE, D. ; WETS,R.: *On continuity properties of the partial Legendre-Fenchel Trasform : Convergence of sequences augmented Lagrangian functions, Moreau-Yoshida approximates and subdiffferential operators*, FERMAT Days 85: Mathematics for Optimization, 1986.

[5] AZE, D., *Rate of convergence for the saddle points of convex-concave functions*, Trans. Math. Opti. K.H, Hoffmann, J.B. Hiriat-Urruty, C.Lemarech, editors, Intertional Series of Num. Math., vol.84, 1988,9-23.

[6] ATTOUCH, H; AZE, D. ; WETS,R.: *Convergence of convex-concave saddle functions*, Ann. H.Poincare, Analyse non linéaire, 5, 1988, 532-572.

[7] BREZIS, H.: *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland,Amsterdam, 1973.

[8] BREZIS, H.; CRANDALL, M.; PAZY, A.: *Convergence and approximation of nonlinear semigroups in Banach spaces*, J.Funct.Anal.1971, 63-774

[9] KRAUSS, E.: A representation of maximal monotone operators by saddle functions, Rev. Roumaine. Math. Pures.Appl. 30, 1985 , 823-837.

[10] EKLEND,I. ; TEMMAM, R.: *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod 1974, 396.

[11] MOSCO, U.: *On the continuity of the Young-Fenchel Transformation*. Journ. Math. Anal. Appl.35, 1971, 318-335.

[12] REVALSKI, J-P. ; THERA, M. : *Enlargements and sum of monotones operators, to appear in: Nonlinear Anal*. Theory, Methods and applications 2000.

[13] ROCKAFELLAR, R. : *convx Analysis* . Princeton University Press, Princeton N. J 1970, 446.

[14] ROCKAFELLAR, R: *On the maximality of sums of nonlinear monotone opertors.* Trans. Amaer. Math.Soc.149, 1970, 75-88.

[15] ROCKAFELLAR, R: *Monotone operators, associated with saddle functions and minimax problems*, Proc. Symp. Pure. Math. AMS ,18 , 1970 , 240-250.

[16] ROCKAFELLAR, R. ; WETS, R. : *variational analysis*, 2en, Springer, New York, 2004, 386.

[17] TOKA,D. : *Variational sum and Kato's conjecture. J. Convex Ana*., 9, n 1, 2002, 291-294.