مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

تطبيق هندسي لمبدأ القيمة القصوى

الدكتور حسن بدور*

رودى بيدو **

(تاريخ الإيداع 16 / 3 / 2009. قُبِل للنشر في 2009/6/2)

□ الملخّص □

في هذا البحث نستخدم مبدأ القيمة القصوى (يوفي– تيخوميروف Ioffe -Tichomirov) لإيجاد الشروط التي يجب أن تحققها النقاط التي تمثل رؤوس مضلع (عدد أضلاعه n) مرسوم داخل دائرة حتى يكون مجموع مربعات أضلاعه أكبر ما يمكن . وقد تم إيجاد حل المسألة بشكل خاص في حالة الشكل الرباعي، حيث تبين أن الشكل المواتي هو أي شكل رباعي دائري ينطبق أحد قطريه على قطر الدائرة.

الكلمات المفتاحية: المسائل القصوى، مبدأ القيمة القصوى، تابع لاغرانج.

* أستاذ – قسم الرياضيات –جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

A Geometrical Application of The Extremum Principle

Dr. Hassan Baddour *
Roda Bido **

(Received 16 / 3 / 2009. Accepted 2/6/2009)

□ ABSTRACT □

In this paper we apply the Extremum Principle of Ioffe – Tichomirov to find the conditions that are satisfied by points of polygon (with n sides) inscribed in a given circle in order that the sum of the squares of these sides has the maximal value.

It has been shown –as a special case - that the sum of the squares of quadrilateral (n=4) has the maximal value when one of its diameters coincides with diameter of the circle .

Key Words : Extremal Problem, Extremum Principle, Lagrange Function.

* **Professor , Department of Mathematics , University of Tishreen, Lattakia , Syria.**
** **Postgraduate Student, Department of Mathematics , University of Tishreen, Lattakia , Syria.**

مقدمة:

يعد مبدأ القيمة القصوى (يوفي– تيخوميروف Ioffe - Tichomirov) من الوسائل المهمّة والناجحة في معالجة المسائل القصوى. وقد كان لهذا المبدأ تطبيقات كثيرة يرد أهمها في مسائل الحلول المثلى (The Theory of Optimization)[3] ، وفي التحليل المحدب (The Convex Analysis) [5]. سوف نعرض فيما يأتي – باختصار– مضمون هذا المبدأ بما ينسجم والمسألة الهندسية المطروحة التي سنعالجها في هذه الورقة .

ليكن X فضاء باناخ ولنرمز بالرموز $f_0, f_1,..., f_n$ لمجموعة من الداليات المعرفة على الفضاء X التي تنتمي إلى الصف C^1 (أي أنها اشتقاقية من المرتبة الأولى بمفهوم فريشيه(*) ومشتقاتها مستمرة بالنسبة للنظيم) في جوار ما V للنقطة x^* من X .

سوف نعالج المسألة القصوى الآتية:

مسألة 1. أوجد القيمة القصوى للدالي f_0 على المجموعة X بشرط أن يكون

$$f_i(x) \le 0, i = 1,2,..., n, \ \mathrm{x} \in \mathrm{X}$$

نذكر أن النقطة x^* تعد حلاً (نقطة قصوى عظمى أو صغرى) للمسألة 1 [2] إذا كان

$$f_0(x^*) \le f_0(x) \ \ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{V}$$

$$f_i = f_i(x^*) \le 0, \ i = 1,2,..., n$$

ونذكر أن تابع لاغرانج لهذه المسألة هو من الشكل:

$$L = L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x)$$

حيث $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1,..., \lambda_n)$ (تعرف $\lambda_0, \lambda_1,..., \lambda_n$ بمضاريب لاغرانج) .

نظرية1(مبدأ القيمة القصوى). إذا كانت النقطة x^* حلاً للمسألة 1 فإنه يوجد ثوابت $\lambda_0, \lambda_1,..., \lambda_n$ غير سالبة ولا تساوي جميعها الصفر في آن واحد بحيث يتحقق الشرط الآتي:

(*) يكون f اشتقاقياً بمفهوم فريشيه إذا وجد مؤثر خطي مستمر Λ بحيث يكون :

$$f(x+h) = f(x) + \Lambda h + r(h), \quad \frac{\|r(h)\|_y}{\|h\|_x} \xrightarrow[\|h\|_x \to 0]{} 0$$

$$L'_x(x^*, \lambda)h = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f'_{i\,x}(x^*)h = 0, \quad h \in X \qquad (1)$$

وإضافة إلى ذلك

$$\lambda_i f_i(x^*) = 0, \ i = 1,2,..., n$$

يعرف الشرط (1) بشرط لاغرانج (Lagrange Condition)، وهي الحالة المعروفة بالحالة النظامية لمبدأ القيمة القصوى [2]. وفي حالة المسألة النظامية يكون دائماً $\lambda_0 \neq 0$ ولذلك نستطيع أن نفرض أن $\lambda_0 = 1$.

أهمية البحث وأهدافه:

تنبع أهمية البحث من كونه متابعة لدراسات سابقة [1] في المسائل القصوى، خاصّة الهندسية منها ثم معالجتها بطريقة جديدة فعالة من خلال استخدام أحد أشكال مبدأ القيمة القصوى .

النتائج والمناقشة:

هناك مسائل هندسية كثيرة ([1] ،[2]) يعتمد حلها على إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لمقدار معين منها مثلاً كيف نرسم مثلثاً داخل دائرة بحيث يكون مجموع مربعات أضلاعه أكبر ما يمكن. هذه المسألة يمكن أن تحل بأكثر من طريقة، ولكننا سنستخدم هنا مبدأ لقيمة القصوى المذكور لنرى كيف أنه يمثل أداة سريعة وناجعة في الحل ثم نعمم هذه المسألة إلى مسائل مشابهة أخرى في هذا المجال، مثل رسم شكل رباعي داخل دائرة بحيث تكون مجموع مربعات أضلاعه أكبر ما يمكن.

مسألة المثلث:

سوف نعالج المسألة الآتية:

مسألة2. ارسم مثلثاً داخل دائرة بحيث يكون مجموع مربعات أضلاعه أكبر ما يمكن.

في سبيل استخدام مبدأ القيمة القصوى لحل هذه المسألة نفرض أولاً (ودون الإخلال بالعمومية) أن مركز الدائرة هو الصفر ونصف قطرها الواحد وأن أحد رؤوس المثلث يقع في النقطة $1 = (1,0) = z_0$ ثم نرمز للنقطتين الباقيتين المتحولتين بالرمزين z_1 , z_2 . في هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد القيمة العظمى للمقدار:

$$|z_1 - 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - 1|^2$$

بشرط أن يكون $|z_1|^2 = 1 , |z_2|^2 = 1$. أو بشكل آخر وبما ينسجم مع المسألة1 يكون المطلوب هو إيجاد القيمة العظمى للدالي:

$$f_0(z_1, z_2) = |z_1 - 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - 1|^2$$

المعرفة على المجموعة $\Re^2 \times \Re^2$ بشرط أن يكون:

$$f_1(z_1, z_2) = |z_1|^2 - 1 = 0$$

$$f_2(z_1, z_2) = |z_2|^2 - 1 = 0$$

ويكون لتابع لاغرانج بالنسبة لهذه المسألة الشكل:

$$\begin{aligned} L(z_1, z_2, \lambda) &= \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \\ &= \left(|z_1 - 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - 1|^2\right) + \lambda_1 |z_1|^2 + \lambda_2 |z_2|^2 - \lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned}$$

حيث نقبل أن يكون $\lambda_0 = 1$.

فإذا كانت $z^* = \left(z_1^*\ , z_2^*\right)$ النقطة المرشحة للقيمة القصوى كان بحسب مبدأ لاغرانج (1):

$$(2)\ L'_{z_1}\left(z_1^*, z_2^*, \lambda\right) = 0$$

$$(2')\qquad L'_{z_2}\left(z_1^*, z_2^*, \lambda\right) = 0$$

فإذا وضعنا الآن: $z_1 = \left(x_1\ , y_1\right), z_2 = \left(x_2\ , y_2\right)$ كان لدالي لاغرانج الشكل:

$$L = (x_1 - 1)^2 + y_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - 1)^2 + y_1^2$$
$$+ \lambda_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + \lambda_2\left(x_2^2 + y_2^2\right)$$

وعندئذ يصبح الشرطان (2) و $(2')$ مكافئين للشروط الأربعة الآتية:

$$(3)\ L'_{y_1} = 2\left[(2+\lambda_1)y_1 - y_2\right] = 0 \qquad L'_{x_1} = 2\left[(2+\lambda_1)x_1 - x_2 - 1\right] = 0\ ,$$

$$L'_{y_2} = 2\left[(2+\lambda_2)y_2 - y_1\right] = 0\ L'_{x_2} = 2\left[(2+\lambda_2)x_2 - x_1 - 1\right] = 0\ ,\quad (3')$$

من هذه العلاقات ومن الشرطين الإضافيين للمسألة نحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$(2+\lambda_1)x_1 = x_2 + 1\ ,\quad (2+\lambda_1)y_1 = y_2\ ,\qquad (4)$$

$$(4')\qquad (2+\lambda_2)x_2 = x_1 + 1\ ,\ (2+\lambda_2)y_2 = y_1\ ,$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 1\ ,\qquad x_2^2 + y_2^2 = 1$$

التي تحققها نقطة القيمة القصوى:

$$\left(z_1^*, z_2^*\right) = \left(\left(x_1^*, y_1^*\right), \left(x_2^*, y_2^*\right)\right).$$

بحل جملة المعادلات هذه نجد أن:

$$x_1^* = \frac{-1}{2},\ y_1^* = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad x_2^* = \frac{-1}{2},\ y_2^* = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

وبذلك تكون رؤوس المثلث المطلوب هي

$$z_0^* = (1,0),\ z_1^* = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ z_2^* = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

وهذا المثلث كما نلاحظ هو متساوي الأضلاع.

ملاحظة1. بملاحظة أن الشرط ((3)وكذلك الشرط$(3')$) يمكن أن يكتب بالشكل:

$$\left(L'_{x_1}, L'_{y_1}\right) = 2\left[(2+\lambda_1)x_1 - x_2 - 1, (2+\lambda_1)y_1 - y_2\right] = 0$$

أي الشكل:

$$(2+\lambda_1)(x_1, y_1) = (x_2, y_2) + (1,0)$$

نستنتج أن عملية الاشتقاق للمعادلتين (2) و $(2')$ يمكن أن تختصر جملة المعادلات الأربع الأولى في (4)و $(4')$ إلى الشكل الآتي:

$$(5)\ \begin{aligned}(2+\lambda_1)z_1 &= z_2 + 1\\ (2+\lambda_2)z_2 &= z_1 + 1\end{aligned}$$

وسوف نستخدم هذا الأسلوب المختصر في حل المسألة التي تأتي:

مسألة الشكل الرباعي

بشكل مشابه للحالة السابقة يمكن معالجة المسألة الآتية:

مسألة3. ارسم شكلاً رباعياً داخل دائرة بحيث يكون مجموع مربعات أضلاعه أكبر ما يمكن.

نفرض أن نصف قطر هذه الدائرة هو الواحد ونصف قطرها الصفر وأن أحد رؤوس الشكل الرباعي يقع في النقطة $z_0=(1,0)=1$ وبقية النقاط الثلاث $z_1\ ,z_2\ ,z_3$ واقعة على محيط هذه الدائرة . في هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد القيمة العظمى للدالي:

$$f_0(z_1,z_2,z_3)=|z_1-1|^2+|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-1|^2$$

المعرف على المجموعة $\Re^2\times\Re^2\times\Re^2$ بشرط أن يكون

$$f_1(z_1,z_2,z_3)=|z_1|^2-1=0$$

$$f_2(z_1,z_2,z_3)=|z_2|^2-1=0$$

$$f_3(z_1,z_2,z_3)=|z_3|^2-1=0$$

ويمكن أن يكون لتابع لاغرانج بالنسبة إلى هذه المسألة الشكل:

$$\begin{aligned}L=L(z_1,z_2,\lambda)&=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3\\&=\left(|z_1-1|^2+|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-1|^2\right)+\\&+\lambda_1|z_1|^2+\lambda_2|z_2|^2+\lambda_3|z_3|^2-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\end{aligned}$$

بعد القبول أن $\lambda_0=1$. فإذا كانت $z^*=\left(z_1{}^*\ ,z_2{}^*,z_3{}^*\right)$ النقطة المرشحة للقيمة القصوى كان بحسب مبدأ لاغرانج (1):

$$L'_{z_k}\left(z_1{}^*,z_2{}^*,z_3{}^*,\lambda\right)=0\ ,k=1,2,3$$

وعندئذ وبحسب الملاحظة1 فإن عملية الاشتقاق السابقة بالنسبة إلى المتحوّل z_k $(\ k=1,2,3\ )$ تؤدي (قارن (5))إلى جملة المعادلات:

$$(2+\lambda_1)\,z_1=z_2+1 \qquad (6)$$

$$(2+\lambda_2)\,z_2=z_1+z_3 \qquad (6')$$

$$(2+\lambda_3)\,z_3=z_2+1 \qquad (6'')$$

بمقارنة (6) بِ $(6'')$ ، آخذين بالحسبان أن $1=|z_3|^2=|z_1|^2$، نجد أن :

$$|2+\lambda_1|=|2+\lambda_3|$$

ويتفق ذلك مع العلاقة $\lambda_1=-4-\lambda_3$.: عندئذ ومن العلاقتين (6) و $(6'')$ نفسهما نستنتج أن:

$$(2+\lambda_1)z_1=(-2-\lambda_1)z_3$$

وبالتالي: $z_1=-z_3$ أو $z_1^*=-z_3^*$. في الحالة هذه تؤول المعادلة $(6')$ إلى الشكل:

$$(2+\lambda_2)\,z_2=0$$

وتكون صحيحة فقط عندما $\lambda_2 = -2$ (كون $z_2 \neq 0$) وبالتالي بإمكان z_2^* أن تأخذ أي قيمة على محيط الدائرة واقعة بين z_1^* و z_3^* .

مما تقدم نستنتج أن مجموع مربعات أضلاع الشكل الرباعي الدائري يكون أكبر ما يمكن عندما يكون أحد قطري هذا الشكل منطبقاً على قطر الدائرة المرسوم داخلها.

النتائج والمناقشة:

بالإمكان استخدام الأسلوب السابق لإيجاد الشروط التي يجب أن تحققها النقاط التي تمثل رؤوس مضلع مرسوم داخل دائرة حتى يكون مجموع مربعات أضلاعه أكبر ما يمكن. بالفعل! إذا كان P مضلعاً تقع رؤوسه $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ على محيط الدائرة $|z| = 1$ فأن المسألة تؤول إلى معالجة المسألة القصوى الآتية:

مسألة4. أوجد القيمة العظمى للدالي:

$$(7)\ f_0(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k=1}^{n} |z_{k-1} - z_n|^2 \ ,\ z_k \in \Re^2$$

بشرط أن يكون

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = \ \ldots \ = |z_n|^2 = 1, \quad z_0 = z_n = 1 \qquad (8)$$

لحل هذه المسألة نبني تابع لاغرانج الذي سيكون له في هذه الحالة الشكل:

$$L(z_1,\ldots,z_n) = \lambda_0 \sum_{k=1}^{n} |z_{k-1} - z_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |z_k|^2$$

ثم نستخدم شرط لاغرانج (1):

$$L'_{z_k}\left(z_1^*,\ldots,z_{n-1}^*,\lambda\right) = 0\ , k = 1,2,\ldots,n\text{-}1$$

للوصول إلى جملة المعادلات (قارن (6) و $(6')$ و $(6'')$) :

$$(2 + \lambda_k) z_k = z_{k-1} + z_{k+1}\ ,\ \ k = 1,2,\ldots,n\text{-}1$$

فنحصل بمساعدة الشروط الإضافية (8) على $2n\text{-}2$ معادلة بِ $2n\text{-}2$ مجهول والتي سيؤدي حلها إلى إيجاد نقطة القيمة القصوى $\left(z_1^*,\ldots,z^*_{n-1}\right)$ للدالي (7) .

الاستنتاجات والتوصيات:

بالإمكان تعميم المسائل السابقة إلى حالات هندسية أخرى كما يمكن البحث عن آلية يتم من خلالها تحديد نوع المضلع الذي يحقق الحل الأمثل مع الاستفادة من مراعاة حالتين تكون فيهما n فردية أو زوجية .

المراجع:

[1] BADDOUR,H. *The Izoperimetric Problem in Hardy Space* ,Irbid Journal of Research and Studies , 6, 1,2003 ,1-13

[2] IOFFE, A.D. TICHOMIROV, W.I. *The Theory of Extremal Problems* North-Holland, Amsterdam, 1979, 250.

[3] JOHANNES, J. *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Springer, CA402. J335 ,1996, 200.

[4] PONTRIGIN, S.BOLTIANSKI, V.GGAMRKLIDZE, R.VMISHCHENKO, E.F, *The Mathematical Ttheory of Optimal Processes* , Wiley 1962, 150.

[5] ROCKAFELLAR, R.T. *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1972, 150-200.