مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

المعادلات التفاضلية النبضية

الدكتور نبيل أحمد علي*

(تاريخ الإيداع 9 / 2 / 2009. قُبِل للنشر في 2009/8/16)

□ الملخّص □

في العلوم الفيزيائية وفي العلوم التقنية وفي مجالات أخرى من العلوم ، تصادفنا بشكل خاص مسائل تبحث في عمليات الاهتزاز، وهذه المسائل تملك صفات نبضية أو ما يسمى بصفات دفعية، أما في الرياضيات المتقدمة فقد تسمى هذه العمليات بجملة المعادلات التفاضلية تحت التأثير النبضي، وهي عملياً استمرار لطرائق تصميم الساعات.

ففي القرن التاسع عشر ومطلع القرن العشرين ومن خلال نظرية المعادلات التفاضلية سواء أكانت معادلات تفاضلية خطية أم غير خطية لم يعط للصفات النبضية أية أهمية تذكر، فإجمالاً معظم الحركات الاهتزازية أو الدورانية تخضع لتأثيرات نبضية تعاني منها المنحنيات البيانية، ولهذه المجموعات التفاضلية بالتأثير النبضي صفات مميزة سيتم معالجتها من خلال فقرات هذا البحث، وسندرس أيضا بعض مشاكل النظريات الخطية بتأثير نبضي.

الكلمات المفتاحية : معادلة تفاضلية – معادلة تفاضلية نبضية – معادلة تفاضلية ديناميكية – تفرع ثنائي – استقرار اسي – خطي – غير خطي .

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (2) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (2) 2009

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

Impulsive Differential Equations

Dr. Nabil Ahmad Ali *

(Received 9 / 2 / 2009. Accepted 16/8/2009)

□ ABSTRACT □

In physics, technical sciences and other fields of science ,we come across unique problems researching oscillator processes, and these problems possess impulsive characteristics or what is called impulsion characteristics . But in developed mathematics this process differential equations under influence of pulse, this is in the empirically continuous methods of the watches design.

In the nineteenth century and the early twentieth century through the theorem of differential equations either linear differential equation or nonlinear not much attention was given to impulsive characteristics. Almost the oscillation motions or circulation has impulsive characteristics which suffer from data curves. These differential groups with impulsive influence have distinguished characteristics which are going to be examined through in this research. Moreover, some problems of the linear theorems user influence of pulse will also be looked at.

Key Words: differential equations, differential equations Impulsive, differential equations linear, dynamical, exponential, stabitity, dichotomy, continuing, nonlinear

مقدمة:

*Assistant Professor, Department of Mathematics , faculty of Science , Tishreen University, Lattakia, Syria.

كانت نظرية الاهتزازات في البدايات ضمن إطار ميكانيكي، ومن ثم تم توصيف هذا العلم في إطار معادلات تفاضلية خطية ذات طابع اهتزازي، مما عكس لاحقا في بداية القرن العشرين على ظهور علم جديد هو الميكانيك اللاخطي ونظريات الحلول الدورية ففي عام 1973، ومن خلال الدراسة الشاملة للعمليات الاهتزازية ظهر ما يسمى بالمعادلة التفاضلية النبضية وكمثال معروف على نطاق واسع هو نموذج الساعة التي تم تطوير أدائها من خلال هذه المعادلات ومقارنتها بتطبيق الطرائق المقاربة الميكانيكية

لذلك تصادفنا بشكل خاص مسائل تبحث في المعادلات التفاضلية سواء أكانت معادلات تفاضلية خطية أم غير خطية ولم تعط للصفات النبضية أية اهمية تذكر، ولهذه المسائل صفات نبضيه أو ما يسمى بصفات دفعية [1] ، ففي كثيرا من الأحيان تهمل ولا تؤخذ بعين الاعتبار أما في دراستنا لهذه الصفات وانطلاقا من الدراسة التي تمت سابقا للباحثين كري لوف وبهالوبوف ومن خلال هذه المساحة المفتوحة لنا ومن المشاكل الرياضية المطروحة والتي بقيت دون اجابة، فقد قمنا بدراسة بعض مشاكل النظريات الخطية تحت تأثير نبضي، وذلك من خلال قوانين مجموعة المصفوفات الخطية [2]

وفي أثناء دراسة هذه المجموعات في حالة عدم وجود تأثير نبضي، ظهرت لدينا شروط على الاستقرار الأسي والتفرع الثنائي ، وذلك باستخدام المصفوفة الواحدية للاستقرار الأسي ومصفوفة غرين ساموليتكا [4] وسيتم معالجة ذلك من خلال فقرات هذا البحث .

أهمية البحث وأهدافه:

من الجدير بالذكر أنّ أهمية هذا البحث هو كيفية بناء معادلة تفاضلية تحت التأثير النبضي، وذلك باستخدام العمليات الرياضية المتقدمة لبناء معادلة تفاضلية بتأثير نبضي ، وذلك على النحو الآتي :

1.لتكن لدينا المعادلة التفاضلية العادية التالية :

$$dx/dt = f(t, x) \quad ; \quad x \in M \quad ; \quad t \in R \qquad (I)$$

2. نعدُّ هنا M فضاءً دورياً .

3 لتكن المجموعة T_t معطاة في فضاء دوري موسع $c^s(T_m)$.

4 . وليكن لدينا معامل الارتباط A_t في الفضاء الدوري الموسع$c^s(T_m)$ ولنمثل هذا المعامل بدالة على النحو الآتي:

$$T'_t = A_t\, T_t$$

فالمعادلات التفاضلية بالتأثير النبضي تكتب بالاعتماد على (1) و (3) بالشكل المدمج الآتي:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x) \quad ; (t,x) \in T_t \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (II) \\ \Delta x\big|_{(t,x)\in T_t} &= A_t(x) - x \end{aligned}$$

وبذلك يكون حل جملة المعادلات التفاضلية (II) من الشكل :

$$x=\varphi(t)$$

ويعدُّ حلا أيضاً للمعادلة (I) ، وذلك خارج الفضاء الموسع $c^s(T_m)$ [3] .

و لهذا الحل انقطاعات من النوع الأول في نقاط مجموعة تعريف الفضاء الدوري الموسع كما يأتي:

$$\Delta x=\varphi(t+0)-\varphi(t-0)=A_t\varphi(t+0)-\varphi(t-0)$$

نلاحظ أنّ تزايد x يمثل النبض أو الدفع، و هو عبارة عن مجموعة الحل لجملة المعادلات II . هذا التزايد الصغير في كثير من الأحيان يهمل ولا يؤخذ بعين الاعتبار.

طرائق البحث ومواده:

عند العودة الى المعادلات التفاضلية سواء أكانت معادلات تفاضلية خطية أم غير خطية لم يعط للصفات النبضية أية أهمية تذكر، فإجمالاً معظم الحركات الإهتزازية أو الدورانية يكون لها صفات نبضية تعاني منها المنحنيات البيانية [1] ، ومن هذه الصفات المميزة للمجموعات التفاضلية بالتأثير النبضي تظهر لدينا ثلاث حالات

a) الزمن في المعادلات التفاضلية بالتأثير النبضي مثبت .

b) يرمز للمجموعة النبضية في لحظة إيجاد صور النقاط P_t على السطوح الدورانية – وذلك ضمن الفضاء الدوري الموسع بـ

$$t=\tau_i(x)$$

c) تسمى الانقطاعات في الفضاء الدوري الموسع بمجموعة الانقطاعات الديناميكية

لنبين من خلال المثال الآتي شكل الفضاء الدوري و شكل جملة المعادلات التفاضلية تحت التأثير النبضي

مثال : لتكن المجموعة T_t معطاة في فضاء دوري موسع $c^s(T_m)$. والعملية التالية محققة فيه

$$T_t=\{\ (t,x)\in R^2\big|\quad x=\arctan(\tan x)\ \}$$

و ليكن معامل الارتباط يحقق المساواة الآتية:

$$A_t(t,x)=(t,x^2 signx)$$

إذا فرضنا المعادلة (I)على الشكل

$$\frac{dx}{dt}=0$$

بالمقارنة نجد أنّ جملة المعادلات (II) تحت التأثير النبضي تأخذ الشكل الاتي :

$$;\ \ (t,x)\notin T_t\ \frac{dx}{dt}=0$$

$$\Delta x\big|_{(t,x)\in T_t}=x^2 signx-x$$

هناك أمثلة لبناء معادلات تفاضلية تحت تأثير نبضي سنقوم بدراسة بعضها، و ذلك من خلال مجريات هذا البحث أما من أهداف هذا البحث فهو دراسة سلوك المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية التي على الأغلب تعاني

من انقطاعات لحظية أو ما يسمى بالصفات النبضية لكون هذه الانقطاعات لم تؤخذ بعين الاعتبار، بل حتى الأن لم تتم دراستها أو الإشارة إلى ذلك .

النتائج والمناقشة:

من واقع الأسئلة الكثيرة والمشاكل الرياضية المطروحة التي بقيت دون إجابة يعالج البحث شروط الاستقرار تحت تأثير دفعي، وذلك بالاعتماد على مجموعة المصفوفات الخطية، ومن خلال هذه الدراسة تم التوصل إلى النتائج الآتية:

1.دراسة سلوك المعادلات التفاضلية غير المتجانسة في حقول متجهات قياساتها عبارة عن سطوح دورانية

2.دراسة شروط حفظ الاستقرار الأسي.

لنبين ذلك من خلال المناقشة الآتية:

اولا: دراسة بعض مشاكل النظريات الخطية تحت تأثير نبضي

لنقم في بادئ الأمر بدراسة هذه النظريات الخطية من دون تأثير نبضي، و ذلك على مجموعة معادلات تفاضلية غير متجانسة في حقول متجهات قياساتها عبارة عن سطوح دورانية .

لتكن لدينا الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة، و ذلك تحت تأثير نبضي

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = a(\omega) \qquad ; \quad \omega \in T_m / I \\ &\frac{dx}{dt} = P(\omega)x + f(\omega) \\ &\Delta x\big|_{\omega \in I} = B(\omega)x \end{aligned} \qquad (III)$$

حيث $x \in R^n$ ، $\omega \in T_m$ و هنا T_m هي عبارة عن سطوح دورانية قياسها m و لتكن $a(\omega)$ و $P(\omega)$ و $f(\omega)$ و $B(\omega)$ دوال دورية دورها 2π المعرفة على الفضاء الدوري الموسع $c^s(T_m)$ [5]،

و لتكن المجموعة :

$$I = \{\omega \in T_m; \quad \psi(\omega) = 0\}$$

إن السطوح الإفتراضية للمجموعة (III) تأخذ الشكل

$$x = u(\omega) \quad ; u \in C^s(T_m)$$

وهذه السطوح تمثل حلولاً لجملة المعادلات (III) و u دوال تنتمي إلى السطوح الدورانية .

فحلول الجملة الخطية غير المتجانسة (III) تسمى بالمجموعات الدورانية الافتراضية بالتأثير النبضي، و ذلك بقياس s مرة . أما بحالة $s=0$ تسمى بالسطوح الإفتراضية الدورانية بالتأثير النبضي[2] .

ثانيا: دراسة سلوك المعادلة التفاضلية الخطية بدون تأثير نبضي

إن الجملة التفاضلية الخطية لجملة المعادلات (III) تأخذ الشكل

$$\frac{d\omega}{at} = a(\omega) \qquad , \qquad \frac{dx}{dt} = P(\omega)x \qquad (IV)$$

نلاحظ بأن جملة المعادلاتIV غير خاضعة لتأثير نبضي ، فالسطوح الدورانية الافتراضية أو ما يعرف بالحلول الافتراضية تأخذ الشكل :

$$x = 0 \ , \ \ \omega \in T_m$$

و تسمى جملة المعادلات IV بالمعادلات الديناميكية الخطية الموسعة إذا كانت الحلول أو السطوح الدورانية من الشكل :

$$\omega = \omega_t(\omega_0) \ ; \qquad x = x_t(\omega_0, x_0)$$

لكي يكون السطح الدوراني : $x = 0 \ , \ \ \omega \in T_m$ هو عبارة عن استقرار أسي يجب أن يحقق الشروط الآتية:

$$a) \ \ \omega(\omega_0) = \omega_0$$
$$b) \ \ x(\omega_0, x_0) = x_0$$
$$c) \ \ \|x_t(\omega_0, x_0)\| \le k e^{-\chi(t-\tau)}\|x_\tau(\omega_0, x_0)\|$$

حيث $\omega_0 \in T_m$ يُعدُّ هنا τ عدداً حقيقياً و k ثابتاً موجباً و حيث $x_0 \in E^n$ اذا كانت E^n عبارة من فضاء مفروض . و هذا الفضاء يمثل مجموع المجالات الفرعية للفضاءين $E^+ = E^+(\omega_0)$ و $E^- = E^-(\omega_0)$ وذلك بالبعدين r و n-r على الترتيب أي بمعنى اذا كانت حلول المعادلة (IV) هي

$$x_t(\omega_0, x_0) \quad , \varphi_t(\omega_0)$$

عند $x_0 \in E^+$ فإن الشرط الثالث يبقى نفسه وهو

$$\|x_t(\omega_0, x_0)\| \le k\, e^{-j\ (t-\tau)}\|x_\tau(\omega_0, x_0)\| \ \ , \ \ t \le \tau$$

أما اذا كانت الحلول محققة عند $x_0 \in E^-$ فإن الشرط الثالث يصبح

$$\|x_t(\omega_0, x_0)\| \le k_1 e^{j_1(t-\tau)}\|x_\tau(\omega_0, x_0)\| \quad , \quad t \ge \tau$$

حيث $K, j, K_1 \ , j_1$ ثوابت موجبة ولا تتعلق τ, x_o, ω_o .

نتيجة 1 ـ يمكننا القول إنّه اذا كان الفضاء E^n عبارة عن فضاءين E^+ و E^- فإن السطوح الدورانية الافتراضية

$$x = 0 \ \ , \ \ \omega \in T_m$$

ويكون لجملة المعادلات IV انقسام أسي، و هذا يعني أنّ جملة المعادلات هذه هي انقسام أسي (تفرع ثنائي) في كل الحالات . [5]

يتم البرهان بطرائق الاختيارات العشوائية $\tau \in R, x \in E^n, \omega \in \mathrm{T}_m$ من أجل $t \ge \tau$. وبأخذ أيضاً مصفوفة غرين – سامولينكو $C(\varphi)$ [5]. فإن إعدادها الخاصة تساوي الواحد والصفر وربطها بفرضيات النتيجة مع متجهات المصفوفة المحددة بالمساوتين الآتيتين:

$$C(\varphi)x = x \ \ \& \ C(\varphi)x = 0$$

فهذا يعني أنّ جملة المعادلات هذه هي انقسام أسي (تفرع ثنائي أسي) في كل الحالات .

نتيجــة (2) : السـطوح الدورانيـة $u \in c^s(T_m)$, $x = u(\omega)$ لجملـة المعـادلات التفاضـلية غيـر المتجانسة (III) تعتبر استقرار أسي .

يتم البرهان بفرض أن $E = E^+$ فالحلقة تكون في هذه الحالة $\omega \in T_m$, $x = 0$ مستقرة اسيا وبأخذ دالة لبانوف وبتجزئة الحلول على شكل فواصل زمنية مثبتة وباستخدام الاستدلال نحصل على التقييمات المحققة من كون الجملة التفاضلية (IV) *مستقرة اسيا*

يمكننا القول إنّ جملة المعادلات (IV) هي عبارة عن أجزاء منشطرة في الفضاء ، أي في فضاء السطوح الدورانية $c^s(T_m)$ اذا وجد هناك مصفوفة متقهقرة أو منحلة ــ المصفوفة المنحلة هي المصفوفة الآتية $\phi(\omega) = \|I + B(\omega)\| \le \frac{1}{k}$ الذي يكون فيها البارمتر k يسعى إلى اللانهاية أو محددها يساوي الصفر

فمثلا من أجل :

$$\Phi(\omega) \in C^s(T_m) \, ; \; \omega \in T_m$$

وبإجراء تغيير بالمتحولات على النحو الآتي:

$$x = \phi(\omega)y$$

و هذا التغيير ينقلنا الى جملة معادلات جديدة بالتأثير النبضي على النحو الآتي:

$$\frac{d\omega}{dt} = a(\omega) \;\; ; \quad \omega \in I$$

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(\omega)y \qquad\qquad (V)$$

$$\Delta y\big|_{\omega \in I} = B^{-1}(\omega)y$$

حيث Φ مصفوفة لاجزاء قطرية (عناصر القطر الرئيس)

$$\Phi = diag\{\omega_1, \omega_2\}$$

و أن $B^{-1}(\omega)$ المصفوفة العكسية و ذلك اذا تحقق الشرط

$$\det(E + B(\omega)) \neq 0$$

حيث E هي المصفوفة الواحدية و نستنتج الحل للمعادلة (V) بالشكل

$$x_t(\omega_0, x_0) = \phi(\omega_t, \omega_0) \cdot Y_t(\omega_0, y_0)$$

حيث هنا :

$$y_0 = \phi^{-1}(\omega_0)x_0 \;,\; x_0 \in E^n ,\; \omega_0 \in T_m \;,\; t \in R$$

مثال : لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية من دون تأثير نبضي على النحو الآتي

$$\frac{d\omega}{dt}=\sin\omega$$
$$\frac{dx_1}{dt}=(\zeta\sin m\omega+\lambda_1\cos\omega)x_1+(1+\lambda_2\cos\omega)x_2+\lambda_2\cos\omega x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt}=(1-\zeta\sin m\omega)x_1+(-\zeta\sin m\omega-1)x_2-(\lambda_1\cos\omega+\lambda_2\cos\omega)x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt}=(1-\lambda_1\cos\omega)x_1+(-\zeta\sin m\omega-\lambda_2\cos\omega)x_2-\lambda_1\cos\omega\, x_3$$

نلاحظ هنا $x=(x_1,x_2,x_3)$ متجهة مؤلفة من ثلاثة عناصر[6] و نلاحظ هنا أنّ $A(\omega)$ تمثل مصفوفة مؤلفة من دوال دورية يمكن نقل عناصرها على شكل مجموع أو حاصل جمع مصفوفتين على النحو الآتي:

$$A(\omega)=\begin{pmatrix} A_{12}(\omega)+A_{13}(\omega) & B_2(\omega)+A_{23}(\omega) & -A_{23}^*(\omega)+B_3(\omega) \\ B_1(\omega)-A_{12}(\omega) & -A_{12}^*(\omega)-B_2(\omega) & -A_{13}^*(\omega)+A_{23}^*(\omega) \\ B_1(\omega)-A_{13}(\omega) & -A_{12}^*(\omega)-A_{23}(\omega) & -A_{13}^*(\omega)-B_3(\omega) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & B & B_3 \\ B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -B_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{12}+A_{13} & A_{23} & -A_{23}^* \\ -A_{12} & -A_{12}^* & -A_{13}^*+A_{23}^* \\ -A_{13} & -A_{12}^*-A_{23} & -A_{23}^* \end{pmatrix}$$

بإجراء تغيير بالمتحولات من الشكل $x=\phi(\omega)y$

وعلى اعتبار أن طبيعة الحل لمثل هذه المعادلات هي من الشكل $x=u(\omega)$

وبما أن $x=x_t(\omega_0,x_0)$

فحاصل جمع المصفوفتين السابقتين تنقلنا الى المصفوفة في الشكل

$$\Phi(\omega)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

عندئذ تصبح جملة المعادلات على النحو الآتي

$$\frac{d\omega}{dt}=\sin\omega$$
$$\frac{dy}{dt}=\varphi(\omega)y \quad ; \quad y=(y_1,y_2,y_3)$$

و يصبح لدينا الحل

$$y_0 = u(\omega_0)x_0$$

و هنا :

حيث $\omega \in T_m$

و يجب أن نلاحظ أنّ $x=(x_1, x_2, x_3)$ متجهة ثلاثية الأبعاد يمكننا كتابتها على شكل حجم

$$V = P\left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_{13} + x_{23}\right) - \cos x_3^2$$

أما لدراسة هذا المثال تحت تأثير نبضي أي (Δx) يكتب بالشكل

$$\Delta x\big|_{\omega(t)=2\pi k} = B(\omega)x$$

حيث :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} a\sin\omega & b\sin\omega \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

فالحل يعطى بالشكل الاتي، وذلك انطلاقاً من معادلة الحل من دون تأثير نبضي مضروبة في مصفوفة النبض

$$x_{t+0} = B(\omega)\ u(\omega)$$

أن ما يبرر حلول الجملة (III) وكل ما ورد من حلول هو بالحالة العامة الحل نفسه وذلك لأن مصفوفة الجملة الخطية تحت تأثير نبضي فيها انقطاعات في النقاط τ_i ومن المرجع [7] نجد وبالمقارنة مع مصفوفة الجملة الخطية من دون تأثير نبضي التي أيضاً تعاني من انقطاعات في النقاط τ_i وهذا ما يطرح وجود تناسب مبرر في الحالتين النبضية وغير النبضية

$$\phi_\tau^t\left(\omega_\theta(\omega)\right) = \phi_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\omega)$$

أما اختلاف الحلول هو فقط في الحل الناتج من الاستقرار والانقسام الاسي وهو صلب موضوع دراسة البحث ومشكلاته .

. وبعد إجراء تغيير بالمتحولات نحصل على الشكل النهائي للحل

$$y = u_1(\omega_0)x$$

يمكن استخدام هذه النتائج في معالجة الأنظمة الاهتزازية التي توجد في المسائل التطبيقية التي تخضع للتأثير النبضي، ففي كل الأحوال ومن خلال المعادلات التفاضلية الخطية أو غير الخطية وفي القرن التاسع عشر ومطلع قرن العشرين لم تُعْطَ أهمية تذكر للمؤثرات التي تحدث للحركات الدورانية والاهتزازية، ولأنه في الواقع تعاني منحنياتها البيانية لتأثير نبضي على شكل انقطاعات نبضية ديناميكية Δx معطاة على النحو الآتي $\Delta x = q(t+0) - q(t-o)$. فمن التحليل الخاص للنتائج يمكن استخدامها في السياق العام لهذه المسائل الكبيرة والمفتوحة.

الاستنتاجات والتوصيات:

من خلال دراسة بعض خصائص هذه الصفات النبضية لجملة المعادلات التفاضلية، فلا بد من العودة إلى الشروط الكافية لوجود الحركات الدورانية، وهذه الشروط مأخوذة من طرائق التحليل العددي للباحث الدكتوراناتولي ساموليتكا، وذلك من دون تأثير نبضي، لذلك نوصي بدراسة لاحقة ان تتم دراسة بعض هذه الحالات بمساعدة الطرق العددية التي حصلنا على شروط وجود الحركة الدورانية لهذه المجموعة . ويمكن التوصل لحلول هذه المعادلات بإيجاد مخطط لدراسة التقاربات الدورية المبينة لها .

وفي الختام نجد أن العمليات الرياضية ذات الطابع الاهتزازي يحتل مكاناً مهمّاً بين العمليات التي تظهر في الفيزياء والهندسة الكهربائية الالكترونية وغير من مجالات العلوم الطبيعية . وما انجز من هذا البحث هو هذا التصور الذي تمت دراسته لوصف حالة جزئية من النمذجة الرياضية لنظام فيزيائي لمعادلات رياضية ذي طابع اهتزازي تمت معالجتها في النظرية الخطية

ومع تطلعات مستقبلية هو التوجه الجديد لبلورة نظرية مستقلة في الفيزياء الرياضية أي نظرية الاهتزازات اللاخطية ومساهمة أيضاً في حل مسائل النظرية اللاخطية وصولاً إلى مسائل الميكانيك اللاخطي .

واخيرا أتمنى من لديهم اهتمامات في مجال المعادلات التفاضلية النبضية أن يراسلوني إلى عنواني البريدي لنتعاون في حل بعض المشاكل الرياضية المتعلقة بهذا المجال، ولأنه حقيقة لدي كثير من المسائل في النظرية الخطية واللاخطية التي بقيت مفتوحة دون حل؟ والله ولي التوفيق .

المراجع:

1-ELSQOLTS.L, *differential eguation sand the calculus of variations* ,Moscow, Mir,10, 1998, 398.

2- BERMANT.A, *Mathematical Analysis* , Moscow , World , 2004, 437.

3- WILLIAM.R.D, *Elementary differential eguations with applications,* London, 2005, 14-377-396.

4- SAMOILENKO .A.M, Perestyuk .N.A . , *Impulsive differential eguations*, New Jersey , London , Hong Kong , World - Scientific . Publ 14 ,1995, 462.

5- SAMOILENKO .A.M, *Vibrational Freduencies and Virtual Torus*, faculty of Science , Ukrane, Kiev , 3, 2001, 456.

6- RICHARD.B. *Schaums 2500 Solved problems in differential eguations,* Academia arabic copyright. 613.

7- METROPOLSKE.U, *Virtual rotational surfaces and the conditions of the system existence under impulsive influence*, Magazine differential eguation,10-1302-1313- Ukrane- Kiev -1989.