مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

استمرار وتراص مؤثر أوريسون في فضاء أورليتشس

الدكتور احمد بكداش*

(تاريخ الإيداع 14 / 4 / 2013. قُبِل للنشر في 30 / 6 /2013)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو دراسة وتعميم بعض النتائج المتعلقة بتراص و استمرار مؤثر أوريسون بمتحولين المعرف بمعادلة تكاملية على مجموعة G معرف عليها قياس لوبيغ في فضاء أورليشتس L_f المزود بالنظيم:

$$\|u\|_f = \sup_{\rho(v,f)\le 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \;;v(x)\in L^*{}_g \;,\; u(x)\in L^*{}_f$$

والمحقق لشروط معينة ,وثمّ دراسة التقارب المنتظم لمتتالية من مؤثرات أوريسون K_n المعرفة بالتوابع $k_n(x,y;u)$ وذلك باستخدام التقارب بالقياس من خلال الاعتماد على شرط كاراثيودوري للمجموعات القيوسة والحصول على نتائج مماثلة لشروط الاستمرار والتراص لمؤثر اختياري يحققها مؤثر أوريسون.

الكلمات المفتاحية: فضاء أورليشتس ,مؤثر أوريسون , ,قياس لوبيغ ,التقارب بالقياس, $N\,f(u)$ –تابع.

* مدرس – قسم الرياضيات –كلية العلوم –جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (2) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (2) 2013

Compactness and Continuity Urysohn operator in SPACE Orlicz

Dr. Ahmed Bakdash*

(Received 14 / 4 / 2013. Accepted 30 / 6 /2013)

□ ABSTRACT □

The aim of this paper is to study and generalize some results that related by compactness and continuity of Urysohn.S operator of two variables on a set G on which a lebesgue measure is defined and using the norm:

$$\|u\|_f = \sup_{\rho(v,g)\leq 1}\left|\int u(x).v(x)dx\right| \ ;\ v(x)\in L^*_g \ ,\ u(x)\in L^*_f$$

That achieved some certain conditions and study uniform convergence sequence of Urysohn.S. operators K_n that defined by functions $k_n(x,y,u)$ using conver -gence In measure depending on Caratheodory condition of measurable sets and obtain similar results related by continuity and compactness conditions of optional operator that achieved Urysohn .S operator .

Key words: Orlicz .W space ,Urysohn.S operator,Lebesgue measure, convergence in measure, $f\ N-$ function.

*Assistant Professor, Department of Mathematics , Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تعتبر المؤثرات التكاملية الخطية وغير الخطية من المواضيع المهمة التي تعتمد في دراستها على صفوف التوابع المحدبة والمستمرة والمتراصة و التي تلعب دوراً هاماً في مختلف فروع الرياضيات وفي تطور نظرية الفضاءات بشكل عام وفضاء أورليشتس (الفضاء المنتظم ,وكحالة خاصة الفضاءات L^P) وتطبيقاتها في التحليل التابعي ولأهميتها الخاصة تمت دراسة المعادلات التكاملية غير الخطية ذات الشكل:

$$\lambda \varphi(x) = \int_0^1 k(x, y) f[\varphi(y)] dy$$

إذ $f(u)$ تابع متزايد بشكل مضطرد لأجل أي تابع uموجب, إذ إن المؤثرات المعرفة بالطرف الأيمن من المعادلة التكاملية غير معرفة في أي فضاء L^Pلذلك فإن دراسة المعادلات التكاملية بالطريقة غير الخطية في التحليل التابعي أظهرت صعوبتها ,عندئذ تمَ اللجوء إلى دراسة صفوف المعادلات غير الخطية من خلال المسائل غير الخطية للمعادلات التكاملية لتلك المؤثرات بمتحولين($x, y \in G, -\infty < u < \infty$)وقام بدراسة تلك المؤثرات التكاملية وغير الخطية العديد من الرياضيين :$[2, 4, 11, 12]$.

في هذا البحث سندرس الاستمرار التام والتراص لأحد أهم المؤثرات التكاملية غير الخطية هو مؤثر ب. أوريسون ($Urysohn\ .B.S\ Operator$) في فضاء أورليشتس ($Orlicz\, W.\ space$).

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة بعض الشروط التي تجعل مؤثراً تكاملياً مستمراً تماماً ومتراصاً وبشكل خاص مؤثر أوريسون في فضاء أورليشتس نظراً لأهميته التطبيقية ,لأن تلك الشروط تظهر العلاقة بين استمرار المؤثر وتراصه وأهمية كون كلاً التابعين $f(u), g(v)$ $N-$تابع متمم للآخر و ذلك بتشكيل متتالية من المجموعات المغلقة ودراسة تقاربها .

طرائق البحث وموادە:

تعتمد هذه الدراسة على بعض المفاهيم و التعاريف الأساسية المعتمدة في مجال التحليل التابعي واستخدمنا في دراستنا هذه شروط الاستمرار التام ومفهوم التراص التي تبناها العديد من الباحثين في أعمال مختلفة $[8,10,11]$.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

سنعتبر أن المؤثر K معرَفاً على فضاء أورليشتس L_fالمكون من صفوف التوابع الحقيقية ,لأجل ذلك نبدأ بذكر بعض المفاهيم الأساسية التي نعتمد عليها في دراستنا منها المجموعة

Gالمغلقة المحدودة في الفضاء الإقليدي المنتهي البعد وسنعرف عليها قياس لوبيغ والمجموعة $\hat{G}$ وهي الجداء التبولوجي $G \times G$ذو قياس ,كما أن مفهوم استمرارية القياس يعني وجود مجموعة جزئية في كل مجموعة بحيث: $G_1 \subset G; \mu(G_1) = \frac{1}{2}\mu(G)$

- التابع $f(u)$ يسمى $N-$تابع[1] إذا أمكن تمثيله بالعلاقة : $f(u)=\int_0^{|u|}P(t)dt$ حيث $p(t)$ موجب عندما $t>0$ ومستمر من اليمين عندما $t\geq 0$ ويحقق الشرط : $p(0)=0\ ,\ p(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$.

-التابعان $f(u)$ و $g(v)$ المعرفان بالشكل: $q(s)=\sup\limits_{p(t)\leq s}t\ ;\ g(v)=\int_0^{|v|}q(s)ds\ ,\ f(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$ يسمى كلاً منهما $N-$تابع متمم للآخر.

- نقول إن التابع $f(u)$ $N-$تابع يحقق الشرط Δ لأجل قيم u الكبيرة إذا وجدت الثوابت $k>0\ ,\ u_0\geq 0$ بحيث: $f(2u)\leq kf(u)\ ,\ (u\geq u_0)$.

- نقول إن التابع $f(u)$ $N-$تابع يحقق الشرط Δ_1 إذا وجدت الثوابت الموجبة $u_0\ ,c$ بحيث :

$$f(u\,v)\leq c\,f(u)f(v)\ ,\ (u\ ,\ v\geq u_0)$$

- يرمز بـ $L_g(G)$ لصف التوابع الحقيقية $u(x)$ المعرفة على G المحققة للشرط الآتي:

$$\rho(u,g)=\int_G g[u(x)]dx<\infty \qquad ;\ f(u)\quad N-\text{تابع ما}$$

وإن $L^*{}_g$ يرمز لمجموعة كل التوابع $u(x)$ المحققة للشرط:

$$\langle u,v\rangle=\int_G u(x)v(x)dx<\infty\ \ ,\ \forall v(x)\in L_g(G)$$

حيث $g(u)\ ,f(v)$ $N-$تابع كلاً منهما متمم للأخر. [1].

تعرَّف E_f بأنها مجموعة مغلقة من التوابع المحدودة في $L^*{}_g$,كما تعرَّف $\hat{L^*}_g$ بأنها صفوف التوابع في الفضاء $L^*{}_g\left(\hat{G}\right)$.

تعريف4.1: [5]

-يسمى $\|u\|_f$ نظيم أورليشنس على المجموعة $L^*{}_g$ والذي يعرف بالمساواة التالية:

$$\|u\|_f\ =\sup_{\rho(v,g)\leq 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|\ \ ;v(x)\in L^*{}_g\ \ ,u(x)\in L^*{}_f$$

والذي يحقق الشروط التالية:

$$1)\|u\|_f=0\Leftrightarrow u(x)=0\quad ;a.e. \qquad \text{(تقريباً في كل مكان)}$$

$$2)\|\alpha\, u\|_f=|\alpha|\|u\|_f$$

$$3)\|u_1+u_2\|_f\leq\|u_2\|_f+\|u_2\|_f$$

عندئذ تصبح $L^*{}_g$ مع النظيم $\|u\|_f$ فضاء خطياً منتظماً يسمى فضاء أورليشتس .

تعريف4.2:(شرط كاراثيودوري) [6]

يقال عن التابع الحقيقي $f(x,u)$ بالمتحولين $x\in G\ ,\ -\infty<u<+\infty$ إنه يحقق شرط كاراثيودوري إذا وفقط إذا كان مستمراً بالمتحول u في كل مكان تقريباً لأجل جميع $x\in G$ وقيوس بـ x عندما يكون u ثابت.

مبرهنة4.1 : [6]

التابع $f(x,u)$ يحقق شرط كاراثيودوري $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists G_0 \subset G$; مجموعة مغلقة $G \quad \& \ \mu(G \setminus G_0) < \varepsilon$

و يكون التابع $f(x,u)$ مستمراً على المجموعة $G_0 \times (-\infty,+\infty)$ بالمتغيرين x,u .

تعريف4.3: [5]

يعرف مؤثر أوريسون (*Urysohn .B.S Operator*) بالمعادلة التكاملية غير خطية التالية:

$$Ku(x) = \int_G k[x, y, u(y)]dy \qquad (1)$$

لذلك إذا كان $k(x, y, u)$ تابعاً محققاً لشرط كاراثيودوري فإنه يكون قيوساً و مستمراً بالمتحول u تقريباً في كل مكان لأجل جميع قيم المتحولات $x, y \in G$, وإذا كان $N\ f(u)$ – تابعاً, $\varphi(x)$ تابعاً غير سالب, $R(u)$ تابعاً مستمراً غير سالب أيضاً ومتزايد باضطراد من اجل كل $0 < u$,عندئذ تتحقق المتباينات الآتية:

$$|k(x, y, u)| \le k(x, y)[\varphi(x) + R(|u|)] \qquad (x, y \in G \ , -\infty < u < +\infty) \qquad (2)$$

$$\iint_{\hat{G}} g[k(x, y)]dxdy \le b < +\infty \qquad (3)$$

سوف نهتم بدراسة تحقق الشرطين (2)و (3)الكافية لكي يكون مؤثر أوريسون المعرَف على فضاء أورليتشس L_ϕ^* مستمراً تماماً ومتراصاً.

إنَ الشرطين (2)و (3) تعني أن قيم المؤثر (1)محدودة على الكرة $T(\theta, r; L_\phi^*)$ أي:

$$\|Ku\|_\phi \le c \quad , \left(\|u\|_\phi \le r\right) \qquad (4)$$

حيث c ثابت موجب . وإذا كان $k(x) \in L_g^*$ تابعاً غير سالب ويحقق الشرط : $\int_G g[k(x)]dx \le \dfrac{b}{\mu(G)}$

فإنَ المؤثر المعرَف بالمساواة: $Ku(x) = \int_G \dfrac{k(x) + k(y)}{2} R(|u(y)|)dy$ يحقق الشرطين (2)و (3),عندئذ وفقاً للشرط (4)نحصل على العلاقة:

$$\left\| \int_G k(y) R(|u(y)|)dy + k(x) \int_G R(|u(y)|)dy \right\|_\phi \le 2c \qquad (5)$$

من هنا ينتج أن $k(x) \in L_\phi^*$,بالتالي فإن $L_g^* \subset L_\phi^*$.

مبرهنة4.2: [1]

ليكن $f_1(u), f_2(u)$ N –تابعين ما,عندئذ حتى يكون $L_{f_1}^* \subset L_{f_2}^*$ يلزم ويكفي أن تتحقق العلاقة: $f_2(u) < f_1(u)$.هذا يعني وجود الثوابت وجود الثوابت $0 < u_0$, $0 < k$ المحققة للشرط:

$$f_2(u) \le f_1(ku) \qquad ; u \ge u_0 \ .$$

ومن الجدير ذكره هنا, أنه عندما تكون قيم المتحول $0 < \alpha$ كبيرة يتحقق :

$$\phi(\alpha u) < f(u) \qquad ; \qquad \phi \ N\text{–تابع} \qquad (6)$$

بالتالي من (5)ينتج أن التكامل $\int_G k(y)R(|u(y)|)dy$ محدود لأجل أي تابع $k(x)\in L_g^*$ فضلاً على ذلك فإن المؤثر $Ru(x)=R\left(\frac{r|u(x)|}{2}\right)$ يحول الكرة $T(\theta,r;L_\phi^*)$ إلى مجموعة محدودة في الفضاء L_f^*من خلال $f(v)$ $N-$ تابع المتمم لـ $g(u)$ $N-$ تابع ,عندئذ يمكن إيجاد الثوابت الموجبة c_1, c_2, c_3 المحققة للمتباينة

$$f\left[\frac{1}{c_1}R\left(\frac{r\,u}{2}\right)\right]\le c_2+c_3\phi(u)\ ,\qquad (-\infty<u<+\infty)$$

من هذه المتباينة ينتج أنه لأجل قيم المتحول $u>0$ والكبيرة تتحقق المتباينة التالية :

$$f[\beta\, R(\gamma u)]<k\phi(\alpha u) \qquad (7)$$

أخيراً وفقاً للمتباينات السابقة يمكن استنتاج المتباينة التالية :

$$f[\beta\, R(\gamma u)]<kg(u) \qquad (8)$$

وهذا ما يثبت أن التابع $\phi(u)$ يحقق المتباينات (6) و (7)من كونه $N-$تابع .

تعريف 4.4: $[3]$

يدعى المؤثر T المعرف على المجموعة G أنه متراص إذا حوَّل صورة كل مجموعة جزئية محدودة $G_1\subset G$إلى مجموعة متراصة ,ويكون مستمراً تماماً إذا كان مستمراً ومتراصاً .

تبين المبرهنة الآتية محدودية مؤثر أوريسون المعرَّف بالعلاقة (1):

مبرهنة 4.2 : $[3,4]$

بفرض أن f $N-$تابع يحقـق الشرط Δ_1 والشروط $(2),(3),(6)$ و (7) عندئذ إذا كان التابع $a(x)\in L_f^*=L_f$ تكون مجموعة قيم نظيم المؤثر (1) المـــعرَف على الكرة $T\left(\theta,\frac{\gamma}{\alpha};L_\phi^*\right)$ محدودة في الفضاء L_ϕ^*,وهذا النظيم يحقق المتباينة الآتية:

$$\|Ku\|_\phi\le c\|k(x,y)\|_g\quad,\quad\left(\|u\|_\phi\le\frac{\gamma}{\alpha}\right) \qquad (9)$$

علماً أن الثابت c غير متعلق بالنواة $k(x,y)$.

نتيجة4.1:

بفرض أن شروط المبرهنة 4.2 محققة عندئذ يمكن إيجاد متتالية من المجموعات المغلقة $\{G_n\}_{n=1}^\infty$التي تحقق $\hat{G}_n\subset\hat{G}$ ويكون قياس $\mu\left(\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)<\frac{1}{n}$ فيكون التابع $k(x,y,u)$ مستمراً بكل متحولاته على المجموعات $\hat{G}_n\times]-\infty,+\infty[$ وتكون التوابع $k(x,y)\varphi(y),k(x,y)$ أيضاً مستمرة على المجموعات $\hat{G}_n$فقط .لذلك نستطيع تعريف متتالية التوابع كما يلي:

$$k_n(x,y,u)=\begin{cases} k(x,y,u)\ ;\ \{x,y\}\in\hat{G}_n\\ 0\qquad ;\ \{x,y\}\notin\hat{G}_n\end{cases}$$

من هذه النتيجة نلاحظ أن كلاً من التوابع $k_n(x,y,u)$ تحقق الشرط(2) وفقاً للمبرهنة 4.2 ومنها يمكن تعريف مؤثرات أوريسون بالمساواة: $K_n u(x)=\int_G k_n[x,y,u(y)]dy$ من الكرة $T\left(\theta,\dfrac{\gamma}{\alpha};L_\phi^*\right)$ إلى الفضاء L_ϕ^* أي:$(K_n:T\to L_\phi^*)$. ونجد أن متتالية المؤثرات $(K_n)_{n=1}^\infty$ هذه متقاربة بانتظام ,وذلك لأن:

$$Ku(x)-K_nu(x)=\int k_n[x,y,u(y)]\chi\left(x,y;\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)dy$$

ووفقاً للعلاقة (2)و المبرهنة 4.2 يكون:

$$\|Ku-K_nu\|_\phi\le\left\|\int_G k(x,y)\chi\left(x,y;\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)[\varphi(x)+R(|u(y)|)]dy\right\|_\phi\le$$

$$\le c\left\|k(x,y)\chi\left(x,y;\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)\right\|_{\hat{g}}\qquad\left(\|u\|_\phi\le\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

وفضلاً على ذلك, إذا فرضنا أن النواة $k(x,y)\in\hat{E}_n$ ($\hat{E}_n$ تعني المجموعات المغلقة في فضاء التوابع المحدودة L_f^*) نجد أن: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|k(x,y)\chi\left(x,y;\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)\right\|_{\hat{g}}=0$ بالتالي يكون: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|u\|_\phi\le\frac{\gamma}{\alpha}}\|Ku-K_nu\|_\phi=0$.

وهذا يعني أن متتالية المؤثرات $\{K_n\}_{n=1}^\infty$تتقارب بانتظام إلى المؤثر K .

نلاحظ أن المؤثرات K_n المعرَفة للتوابع $k_n(x,y,u)$ تحقق المتباينة الآتية:

$$|k_n(x,y,u)|\le a_n+b_nR(|u|)\ \ ,(-\infty<u<+\infty)$$

حيث أن:

$$a_n=\max_{\{x,y\}\in\hat{G}_n}|k(x,y)\varphi(x)|\ \ ,\ \ b_n=\max_{\{x,y\}\in\hat{G}_n}|k(x,y)|\ .$$

النتائج والمناقشة:

<u>مبرهنة5.1:</u>

إنَ صفات الاستمرار والتراص لمؤثر اختياري K تتكافأ مع صفات مؤثر أوريسون التالي:

$$Ku(x)=\int_G k[x,y,u(y)]dy$$

<u>البرهان:</u>

بما أن المؤثر $k(x,y,u)$ متراصاً فهو يحقق المتباينة الآتية:

$$|k(x,y,u)|\le\varphi(x)+R|u(y)|\ \ ;\ (x,y\in G\ ,-\infty<u<+\infty)\qquad(12)$$

عندئذ نستطيع تعريف متتالية تابعية جديدة $k_n(x,y,u)$بحيث يكون التابع $k(x,y,u)$ نهاية لها كما يلي:

$$k_n(x,y,u)=\begin{cases} k(x,y,u) & ; \ \|u\|\le n \\ k(x,y,n)(n+1-u) & ; n<u<n+1 \\ k(x,y,-n)(u+n+1) & ; \ -n-1<u<-n \\ 0 & ; \ |u|\ge n+1 \end{cases}$$

ولنأخذ مؤثرات أوريسون K_n المعرفة بالتوابع $k_n(x,y,u)$ السابقة, فيكون المطلوب :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\|u\|_\phi\le\frac{\gamma}{\alpha}}\|Ku-K_nu\|_\phi=0 \qquad (13)$$

ليكن $u(x)\in T\left(\theta,\frac{\gamma}{\alpha};L^*_\phi\right)$ و لنرمز بـ G' للمجموعة $G\{|u(x)|>n\}$ التي قياسها يحقق:

$$\mu(G')\le\frac{1}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}\int_G\phi\left[\frac{\alpha u(x)}{\gamma}\right]dx\le\frac{1}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}\left\|\frac{\alpha}{\gamma}u(x)\right\|_\phi\le\frac{1}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}$$

ومن تعريف المؤثرات K_n نجد أن:

$$|Ku(x)-K_nu(x)|\le\int_G|k[x,y,u(y)]-k_n[x,y,u(y)]|dy\le\int_{G'}|k[x,y,u(y)]|dy+\int_{G'}|k[x,y,u(y)]|dy$$

حيث أن: $\|\psi\|_\phi\le\|u\|_\phi\le\gamma/\alpha$; $\psi(x)=n\chi(x,G')sign\,u(x)$ فيكون حسب العلاقة (12) :

$$|Ku(x)-K_nu(x)|\le\int_G\chi\left(x,y;\hat{G'}\right)[\varphi+R(|u(y)|)]dy+\int_G\chi\left(x,y;\hat{G'}\right)[\varphi+R(|\psi(y)|)]dy \ ; \ \hat{G'}=G\times G'$$

من ذلك و المبرهنة 4.2 تتحقق المتباينة الآتية:

$$\|Ku-K_nu\|_\phi\le\frac{2C\,\mu(G)}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}f^{-1}\left[\frac{\phi\left(\frac{n\alpha}{\gamma}\right)}{\mu(G)}\right] \qquad ; \quad \left(\|u\|_\phi\le\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

وبجعل $n\to\infty$ في العلاقة السابقة نحصل على العلاقة (13) وبذلك يتم المطلوب .

بذلك نكون قد أثبتنا استمرارية وتراص مؤثر أوريسون وفقاً للمبرهنة 4.2وذلك بإضافة الشرط $k(x,y)\in\hat{E}_n$ والذي يتوافق مع خاصية مؤثر أوريسون الناتجة من محدودية التابع $k(x,y,u)$ أي:

$$|k(x,y,u)|\le d \ ; \ (x,y\in G\ ,-\infty<u<+\infty) \qquad (14)$$

وهذا ما يحقق الشرط :

$$k(x,y,u)\equiv 0 \qquad (|u|\ge u_0 \quad \& \, u_0=const>0) \qquad (15)$$

نتيجة5.1:

عند تحقق الشرطين (14) و (15) والمبرهنة. 5.1 وإمكانية إيجاد متتالية من المجموعات المغلقة $\hat{G}_n \subset \hat{G}$ المحققة للشرط: $\mu\left(\hat{G} \setminus \hat{G}n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وكون التابع $k(x,y,u)$ مستمراً بالمتحولات $-\infty < u < \infty$, $\{x,y\} \in \hat{G}_n$, فإنه يمكن إيجاد متتالية توابع مستمرة $k_n(x,y,u)$ و تتقارب إلى التابع $k(x,y,u)$; $\{x,y\} \in \hat{G}_n$ وتحقق:

$$|k(x,y,u)| \le d \;\; ; (x, y \in G \;, -\infty < u < +\infty)$$

$$k(x,y,u) \equiv 0 \qquad (|u| \ge u_0 \;\; \& \, u_0 = const > 0)$$

مبرهنة5.2:

إن مؤثرات أوريسون K_n المعرَفة بالتوابع $k_n(x,y,u)$ بمعادلة تكاملية غير خطية هي مؤثرات مستمرة ومتراصة.

البرهان:

بما أن مجموعة التوابع $k_n(x,y,u)$ محدودة و متراصة وتشكل فضاء أورليشتس وكل منها تابع مستمر بانتظام ,فضلاً على أن كلاً من المؤثرات K_n تأخذ قيمها في الفضاء C , فيمكن إيجاد متتالية تابعية أخرى $\{u_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ تتقارب بالقياس إلى التابع $u_0(x)$, أيضاً تتقارب نقطياً لآجل كل x, عندئذ بالانتقال إلى النهاية تحت إشارة التكامل نجد:

$$K_n u_0(x) = \int_G k_n[x, y, u(y)]dy = \lim_{i\to\infty} \int_G k_n[x, y, u_i(y)]dy = \lim_{i\to\infty} K_n u_i(x)$$

من جهة أخرى : التقارب المنتظم للمتتالية $K_n u_i(x)$ نحو التابع $K_n u_0(x)$ يعني أن:

$$K_n \in \{L_\phi^* \to C ; a.e\} \Rightarrow K_n \in \{L_\phi^* \to L_\phi^* ; a.e.\} \quad \forall u(x) \in L_\phi^*$$

وهذا يؤدي بدوره إلى تحقق المتباينة :

$$|K\,u(x) - K_n u(x)| \le 2d \int_G \chi\left(x, y ; \hat{G} \setminus \hat{G}_n\right) dy$$

ومنه:

$$\|Ku - K_n u\|_\phi \le c_1 \left\| \chi\left(x, y ; \hat{G} \setminus \hat{G}_n\right) \right\|_{\hat{\phi}}$$

وهذه المتباينة تثبت استمرارية وتراص مؤثرات المتتالية K_n المتقاربة بانتظام إلى المؤثر K في كل الفضاء L_ϕ^* وهذا يؤدي بدوره إلى استمرار وتراص المؤثر K وهو المطلوب.

مبرهنة5.3:

ليكن $N\, f(v)\,,\, g(u)$ – تابعين كل منهما متمم للأخر ,والتابع الثاني منهما يحقق الشرط Δ_1 وليكن :

$$|k(x,y,u)| \le k(x,y)[\varphi(x) + R(|u|)] \; ; (x, y \in G, -\infty < u < \infty)$$

علماً أن $\varphi(x) \in L_f^*$, $k(x,y) \in \hat{E}_g$ والتابع $R(|u|)$ غير سالب .عندئذ إذا أمكن إيجاد الثوابت الموجبة β, γ, c بحيث :

$$f[\beta R(\gamma u)] \le c\, g(u) \tag{17}$$

فإنَ المؤثر المعرَف بالمساواة:

$$Ku(x) = \int_G k[x, y, u(y)]dy \tag{18}$$

يحقق $Ku\in\{T(\theta,\gamma;L_\phi^*)\to L_\phi^*\,;a.e\}$ (أي أن هذا المؤثر ينتمي إلى مجموعة المؤثرات المعرفة على الكرة $T(\theta,\gamma,L_\phi^*)$والمتقاربة تقريباً في الفضاء L_ϕ^*) أي : يمكن إيجاد $\phi(u)$ $N-$ تابع يحقق المتباينة :

$$f[\beta R(\gamma u)]\le c\phi(u)\le c\,g(u) \tag{19}$$

البرهان:

ينتج بإضافة شرط على تعريف المؤثر K ليس فقط على الكرة $T(\theta,\gamma\,;L_\phi^*)$ وإنما على كل الفضاء L_ϕ^* , ثم من خلال المتباينتين (17) و (19) وجعل الثابت γ كبيراً بقدر كاف نحصل على المطلوب.

في الحالة الخاصة عندما يكون المؤثر Kمعرفاً على كل الفضاء L_ϕ وكون التابع $\phi(u)$ $N-$ تابعاً محققاً للشرط Δو قيم المتحول uكبيرة فإنه يتحقق: $f[\beta R(2^8\,u)]\le c\phi(2^8\,u)\le c_1\,\phi(u)\le c_1 g(u)$

أي أن المؤثر مستمر تماماً (مستمر ومتراص) كما أن دور محدودية المؤثر بارز في إثبات صحة كل ما سبق.

وبشكل مماثل يمكن التأكد من أن مؤثر أوريسون يكون مستمراً تماماً على كل الفضاء L_ϕ^* ,وذلك إذا كان التابع $R(u)$ محققاً للشرط Δ لآجل القيم الكبيرة للمتحول uأي: $R(2u)\le c_1 R(u)$.

من عبارة التكافؤ بين التابعين أي: $f[\phi(u)]\sim\phi(u)$ فإنه لآجل قيم المتحول u الكبيرة بقدر كاف يكون : $f[\phi(u)]\le\phi(\alpha u)$ وتحقق الشروط (17) و (19) يكون :

$$R[\alpha\gamma\,u]\le c\phi(u)\le c\;\,g(u) \tag{20}$$

وهذا بدوره يؤدي إلى تحقق المتباينات التالية:

$$f[R(\gamma u)]\le f\left[c\phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right]\le c_1 f\left[\phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right]\le c_1\phi(u)\le c_1 g(u)$$

وهو المطلوب.

كل ما ذكر سابقاً تعطي شروط الاستمرار التام في بعض فضاءات أورليشتس لبعض المؤثرات التكاملية.

مبرهنة5.4 :

ليكن $f(v)\,,g(u)$ $N-$ تابعاً , كل منهما متمماً للأخر,والثاني منهما يحقق الشرطΔوليكن :

$$|k(x,y,u)|\le k(x,y)[\varphi(x)+R(|u|)]\quad(x,y\in G\;,-\infty<u<\infty) \tag{21}$$

إذ إن $k(x,y)\in\hat{L}_g^*=\hat{L}_g\;,\varphi(x)\in L_f^*$,$R(u)$تابع غير متناقص وغير سالب لآجل كل $u>0$.

عندئذ يمكن إيجاد $c=const>0$ بحيث أنه لأجل قيم المتحول الكبيرة ,تتحقق المتباينة الآتية :

$$R(u)<c\,\frac{g(u)}{u} \tag{22}$$

ويكون التابع $R(u)$ معرفاً على فضاء أورليشتس L_ϕ^* و مؤثر أوريسون التالي:

$$Ku(x)=\int_G k[x,y,u(y)]dy \tag{23}$$

يكون مستمراً تماماً.

البرهان:

بما أن التابع $g[k(x,y)]$ محدوداً على $\hat{G}$فإنه يمكن إيجاد تابع $\phi(u)$ $N-$تابع يحقق الشرطين Δ و Δ_1

ويكون : $\iint_G \phi\{g[k(x,y)]\}dxdy < \infty$ ولنثبت أن المؤثر (23) معرف على الفضاء L_ϕ^*. نلاحظ من تحقق المتباينة من أجل قيم u الكبيرة بقدر كاف: (24) $f[\beta R(u)] \le \frac{1}{\gamma} u$

عندئذ من أجل $u_0 \le u$ وجعل التابع $u(x) \in L_\phi^* = L_\phi$ المحقق للمتباينات :

$$\|\varphi(x) + R(|u(x)|)\|_f \le \|\varphi(x)\|_f + \frac{1}{\beta}\|\beta R(|u(x)|)\|_f \le \|\varphi(x)\|_f + \frac{1}{\beta}\left\{1 + \int_G f[\beta R(|u(x)|)]dx\right\}$$

ووفق المتباينة (24) يكون:

$$\|\varphi(x) + R(|u(x)|)\|_f \le \|\varphi(x)\|_f + \frac{1}{\beta}\left\{1 + f[\beta R(u_0)]\mu(G) + \frac{1}{\gamma}\int_G |u(x)|dx\right\} \le$$

$$\le \|\varphi(x)\|_f + \frac{1}{\beta}\{1 + f[\beta R(u_0)]\mu(G) + \lambda\|u\|_\phi\} \qquad ; \lambda = const$$

و إذا كان $\|u\|_\phi \le r$ فهذا يؤدي إلى تحقق المتباينة,أي :

$$\|\varphi(x) + R((|u(x)|))\|_f \le c(r) \tag{25}$$

وبالانتقال إلى المؤثر التكاملي: $Av(x) = \int_G k(x,y)v(y)dy$ نجد أن المؤثر $A : L_f^* \to L_\phi$ مستمر ويحقق:

$$\|Av\|_\phi \le 2l\|k(x,y)\|_{\hat{\psi}}\|v\|_f \quad ; \quad \psi(u) = \phi[g(u)] \tag{26}$$

ووفقاً للعلاقة (21) يكون: $|Ku(x)| \le A[\varphi(x) + R(|u(x)|)]$ من ذلك و تحقق العلاقات (25) و (26) نجد:

$$\|Ku\|_\phi \le 2l\|k(x,y)\|_{\hat{\psi}}\|\varphi(x) + R(|u(x)|)\|_f \le 2lc(r)\|k(x,y)\|_{\hat{\psi}}$$

وهذا ما يثبت الاستمرار التام والتراص للمؤثر (23) وهو ما نريد إثباته.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد كان للمؤثرات الخطية وغير الخطية أهمية خاصة في دراسة مسائل المعادلات التكاملية من وجهة نظر تحليلية في مختلف أنواع فضاءات التحليل التابعي والتي تعتمد في دراستها على صفوف التوابع المحددة المستمرة بشكل خاص على خصائص N –تابع في فضاء أورليشتس وأهميتها في تشكيل متتالية المؤثرات المستمرة والمتراصة ودراسة مختلف أنواع التقارب مثل التقارب بالنظيم والتقارب بالقياس في ذلك الفضاء .والسؤال الذي يمكن طرحه إذا كانت متتالية المؤثرات التكاملية غير الخطية متقاربة بالقياس فما هو الشرط الذي يجب أن تحققه هذه المؤثرات حتى يتحقق التقارب بالوسط وهل قيوسية المجموعات المعرفة عليها تلك المؤثرات ضروري؟ وما هو دور الـ N –تابعاً في ذلك , وهل يمكن استخدام قياس كارلسون في ذلك .

المراجع:

[1]Luxemburg W . A.J. and Zaanen A . C. :Some remarks on Banach function space , Nederl . Akad .Wetensch.Proc.ser.A.59-Indag.Math.56(1984).
[2] D.L.Cohn :,Measure Theory ,Birk hauser ,Boston,p.138-212. (1980)
[3] D.Girela and J.A.P elaez:, Carlson Measures ,multipliers and integration operators for space of Dirichlet Type,J.Anal.Math .Malaga spain,1-15. (2006)
[4] K .Hoffman :,Banach spaces of Analytic function ,Dover Publi cations, Inc, Minneola New York p.379-417, (2007).
[5] Milnes H.W. :,Convexityof Orlicz spaces,Pacif.J.Math,7.3(1957).
[6] H.L.Royden : Real Analysis THIRD EDITION.p.118-130,(1988).
[7] WALTER RUDIN: Principles of Mathematical Analysis McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS(Mathematics Series).p.300-325,(1976).
[8] Walter Rudin: FUNCTIONAL ANALYSIS McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS(Mathematics Serie),p.292-363 . (1980).
[9] Erwin Kreyszig: INTRODUTORY FUNCTINAL ANALYSIS WITH APPLIC-ATIONS . University of Windsor,p .129-197.(1978).